

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial

universidad de málaga

Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales

MECÁNICA DE FLUIDOS

Notas de clase: Teoría, problemas y prácticas

Ramón Fernández Feria

y

Joaquín Ortega Casanova

2012

Índice general

Índice general **3**

TEMA I **8**

1. El fluido como medio continuo **11**
1.1. Sólidos, líquidos, gases 11
1.2. La hipótesis de medio continuo 14

2. Repaso de algunas nociones matemáticas de interés para la mecánica de los medios continuos **17**
2.1. Escalares, vectores, tensores 17
2.2. Operaciones diferenciales en coordenadas curvilíneas ortogonales 23
2.2.1. Coordenadas cilíndricas y esféricas 26
2.3. Operaciones con el operador ∇ 28
2.4. Teoremas integrales 30

TEMA II **33**

3. Descripción del campo fluido **35**
3.1. Descripción Lagrangiana y Euleriana 35
3.2. Trayectorias 36
3.3. Líneas de corriente 36
3.4. Traza 38
3.5. Derivada sustancial. Aceleración 38
3.6. Circulación. Vorticidad. Flujos irrotacionales. Potencial de velocidad 39
3.7. Flujos solenoidales o incompresibles. Función de corriente 41
3.8. Ejercicio de trayectorias, líneas de corrientes y trazas 43

4. Análisis del movimiento en el entorno de un punto **47**
4.1. Significado del tensor gradiente de velocidad $\nabla\vec{v}$ 47
4.2. Movimiento relativo de un elemento de volumen de forma arbitraria 47
4.3. Ejemplo: Deformación de una superficie esférica 51

Prácticas y ejercicios de cinemática **55**
Práctica 'multimedia' 55
Problemas propuestos de cinemática 55

TEMA III **59**

5. Ecuaciones generales que gobiernan el movimiento de los fluidos **61**
5.1. Flujo convectivo a través de una superficie 61
5.2. Teorema de Transporte de Reynolds 62
5.3. Formulación integral de las ecuaciones de la Mecánica de Fluidos 64
5.3.1. Conservación de la masa 64
5.3.2. Ecuación de cantidad de movimiento 65
5.3.3. Ecuación de la energía 66

6. Ecuación de conservación de la masa **67**
6.1. Ecuación de continuidad 67
6.2. Flujos incompresibles y compresibles. Caudal y gasto másico 68

7. Ecuación de cantidad de movimiento **71**
7.1. Fuerzas de volumen y fuerzas de superficie 71
7.2. Tensor de esfuerzos 73
7.3. Ecuación de cantidad de movimiento 75
7.4. Fluidos Newtonianos. Ley de Stokes 76
7.5. Ecuación de Navier-Stokes 79

8. Ecuación de la energía **81**
8.1. Vector flujo de calor. Ley de Fourier 81
8.2. Ecuación de conservación de la energía 83
8.3. Ecuación diferencial de las energías interna y mecánica 83
8.4. Breve repaso de Termodinámica. Hipótesis de equilibrio termodinámico local 85
8.5. Ecuaciones de la entalpía y de la entropía 88
8.6. Ecuaciones de estado 89

Ejercicios de aplicación de las ecuaciones en forma integral **91**
Problema resuelto 91
Problemas propuestos 95

9. Ecuaciones de Navier-Stokes **103**
9.1. Resumen de las ecuaciones de Navier-Stokes 103
9.1.1. Fluidos incompresibles con propiedades constantes 104
9.2. Condiciones para que el campo de velocidades sea aproximadamente solenoidal. Número de Mach. Cavitación. 104
9.3. Condiciones iniciales y de contorno 109
9.4. Existencia, unicidad y estabilidad de las soluciones. Turbulencia 111
9.5. Métodos de estudio de los problemas fluidomecánicos 113

9.5.1. Métodos experimentales 113
9.5.2. Modelos simplificados 114
9.5.3. Métodos numéricos 115

TEMA IV **117**

10. Análisis dimensional y semejanza física **119**
10.1. Introducción 119
10.2. Parámetros adimensionales de la Mecánica de Fluidos 120
10.3. Semejanza física 124
10.4. Teorema II de Buckingham 125

Ejercicios de análisis dimensional **129**
Ejemplo resuelto: Alcance de un proyectil 129
Alcance de un proyectil teniendo en cuenta la resistencia aerodinámica . . . 130
Problemas propuestos 133

TEMA V **138**

11. Fluidostática **141**
11.1. Ecuaciones generales 141
11.2. Condiciones de equilibrio 141
11.3. Hidrostática 143
11.4. Fuerza sobre un cuerpo sumergido. Principio de Arquímedes 144
11.5. Equilibrio de gases. Atmósfera estándar 145

Ejercicios de fluidoestática **149**
Ejemplo resuelto 149
Problemas propuestos 150

TEMA VI **152**

12. Movimientos unidireccionales de líquidos **155**
12.1. Ecuaciones y condiciones iniciales y de contorno 155
12.2. Corriente de Couette 156
12.3. Corriente de Poiseuille 157
12.4. Corriente de Poiseuille en un conducto circular 158

13. Movimiento laminar de líquidos en conductos **161**
13.1. Ecuación de Hagen-Poiseuille 161
13.2. Flujo laminar en conductos de sección arbitraria lentamente variable 163
13.3. Tubos de longitud finita. Efecto de entrada 166

Práctica de laboratorio: Experimento de Reynolds **169**
Objetivo, montaje experimental, ecuaciones y definiciones 169
Realización de la práctica y presentación de resultados 172
Anexo: Hoja de toma de datos 174

Ejercicios de movimientos unidireccionales y de movimiento en conductos de líquidos **175**
Ejercicios resueltos 175
Problemas propuestos 180

14. Movimiento alrededor de cuerpos con número de Reynolds pequeño **197**
14.1. Ecuaciones de Stokes 197
14.2. Movimiento alrededor de una esfera. Ley de Stokes 200
14.3. Aproximación de Oseen 204
Problemas propuestos 207

Práctica de laboratorio: Velocidad terminal / sedimentación **209**
Objetivo, montaje experimental, ecuaciones y definiciones 209
Realización de la práctica y presentación de resultados 212
Anexo: Hoja de toma de datos 214

TEMA VII **215**

15. Movimientos ideales **217**
15.1. Introducción 217
15.2. Ecuaciones de Euler 217
15.3. Ecuación de Bernoulli 219
15.4. Flujos isentrópicos 221
15.5. Teorema de la circulación de Kelvin. Movimientos irrotacionales 222
15.6. Conservación de las magnitudes de remanso 224
15.7. Ejemplo de aplicación 226

16. Discontinuidades en los movimientos ideales. Ondas de choque. **233**
16.1. Introducción 233
16.2. Ecuaciones de conservación a través de una discontinuidad 234
16.3. Discontinuidad tangencial 236
16.4. Discontinuidad normal. Onda de choque. Relaciones de Rankine–Hugoniot . 238
16.5. Curva de Hugoniot 238
16.6. Ondas de choque normales en gases perfectos 241
16.7. Ondas de choque no normales 244

17. Movimientos ideales en conductos **247**
17.1. Introducción 247
17.2. Movimiento de líquidos 248
17.3. Movimiento casi estacionario de gases 249

17.4. Flujo isentrópico de un gas perfecto a través de una tobera convergente–divergente . . . 252

18. Carga y descarga de depósitos. Compresores/bombas, turbinas 261
18.1. Introducción . . . 261
18.2. Movimiento a través de un compresor . . . 261
18.3. Carga de un depósito . . . 264

Ejercicios de ondas de choque, flujo ideal en conductos y carga/descarga de depósitos. 267
Ejercicios resueltos . . . 267
Problemas propuestos . . . 276

Práctica de laboratorio: Descarga de un depósito 287
Objetivo, montaje experimental, ecuaciones y definiciones . . . 287
Realización de la práctica y presentación de resultados . . . 290
Anexo: Hoja de toma de datos . . . 293

19. Capa límite laminar incompresible. Resistencia aerodinámica 295
19.1. Concepto de capa límite . . . 295
19.2. Ecuaciones y condiciones de contorno . . . 296
19.3. Capa límite sobre una placa plana. Solución de Blasius . . . 299
19.4. Separación de la capa límite . . . 301
19.5. Resistencias de fricción y de presión . . . 303
19.6. Ejemplo de aplicación de la solución de Blasius. . . . 305

TEMA VIII 308

20. Introducción a la turbulencia 311
20.1. Introducción . . . 311
20.2. Propiedades de los flujos turbulentos . . . 312
20.3. Escalas de la turbulencia. Cascada de energía. Microescala de Kolmogorov . 315
20.4. Tratamiento matemático de la turbulencia . . . 316
20.5. Ecuaciones de Reynolds. Esfuerzos aparentes de Reynolds . . . 318
20.6. El problema del cierre . . . 319
20.6.1. Longitud de mezcla . . . 319

21. Flujo turbulento en conductos 321
21.1. Introducción . . . 321
21.2. Perfil de velocidad y esfuerzo de fricción en un conducto de sección circular . 322
21.2.1. Efecto de la rugosidad de la pared . . . 329
21.3. Ecuaciones, condiciones iniciales y de contorno para el movimiento turbulento de líquidos en conductos . . . 332
21.3.1. Ecuaciones del movimiento . . . 333
21.4. Flujo casi estacionario . . . 335
21.5. Pérdidas localizadas en tuberías . . . 336

21.5.1. Ensanchamiento brusco 337
21.5.2. Contracción brusca 338
21.5.3. Codos 339

Ejercicios de flujo turbulento en conductos. 341
Ejercicio resuelto 341
Problemas propuestos 345

Práctica de laboratorio: Pérdidas de carga en una instalación hidráulica 357
Objetivo, montaje experimental, ecuaciones y definiciones 357
Realización de la práctica y presentación de resultados 359
Anexo: Hoja de toma de datos 361

Bibliografía 363

TEMA I:
Características generales de los fluidos y repaso de matemáticas para los medios continuos

CAPÍTULO 1

El fluido como medio continuo

1.1. Sólidos, líquidos, gases

La propiedad mecánica que distingue a los fluidos (gases y líquidos) de los sólidos es la facilidad que tienen para deformarse. Un sólido mantiene una forma determinada mientras no se le aplique una fuerza externa. Un fluido no tiene una forma determinada, sino que adopta aquella del recipiente que lo contiene. Cuando se le aplica una pequeña fuerza a un trozo de sólido elástico, éste se deforma proporcionalmente a la fuerza aplicada. Por el contrario, si a un fluido se le aplica una fuerza, por pequeña que ésta sea, se deforma indefinidamente. En otras palabras, un sólido presenta resistencia a la deformación, existiendo, si el sólido es elástico, una relación lineal entre fuerza y deformación (Ley de Hooke), cuando esta última es pequeña [ver Figura 1.1(a)]. Un líquido o un gas presentan resistencia a la velocidad de deformación. Se verá más adelante que la mayoría de los fluidos, entre los que se encuentran los más comunes, como son el aire y el agua, en las condiciones que normalmente se presentan en la práctica, obedecen a una ley lineal entre el esfuerzo cortante (o fuerza tangencial por unidad de superficie) aplicado y la velocidad de deformación [aunque estos conceptos se precisarán en lecciones posteriores, en la Figura 1.1(b) se puede ver una ilustración de esta relación lineal, donde τ es el esfuerzo cortante]. Los fluidos que obedecen a este tipo de ley lineal se denominan fluidos Newtonianos, en honor a Isaac Newton quien fue el primero en formular una ley de este tipo en el Libro II de sus *Principia* para un movimiento simple de un líquido, aunque la formulación precisa de esta ley no fue hecha hasta mucho más tarde (ver más adelante).

La frontera entre fluidos y sólidos no está tan definida como se podría pensar en un principio (ver Fig. 1.2). Existen sustancias, como algunas pinturas, que se comportan como sólidos elásticos si permanecen en reposo durante un cierto tiempo, pero que vuelven a comportarse como líquidos si se las agita fuertemente. Otras sustancias, como la brea, se comportan normalmente como sólidos, pero si se les aplica una fuerza durante un periodo de tiempo suficientemente largo, la deformación crece indefinidamente como si fuese un líquido. Afortunadamente, la mayoría de los fluidos, en las condiciones que normalmente se encuentran en la práctica, se comportan como Newtonianos y, por ello, el presente curso introductorio a

la Mecánica de Fluidos se dedicará exclusivamente al estudio de fluidos Newtonianos, estando fuera del programa del presente curso los fluidos no-Newtonianos.[1]

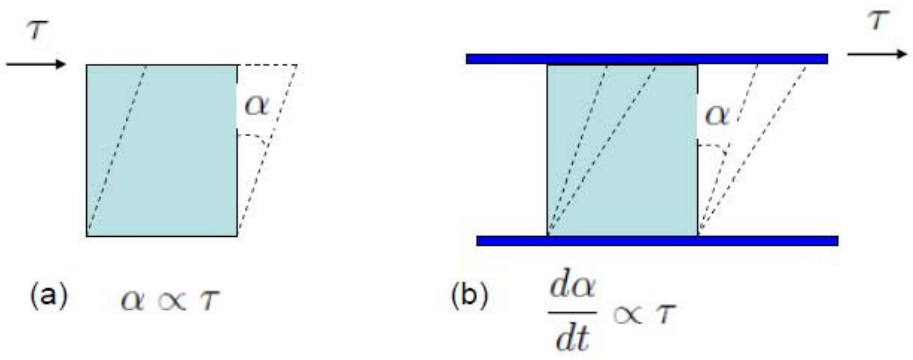


Figura 1.1: Deformación de un elemento sólido (a) y fluido (b) bajo la acción de un esfuerzo cortante τ.

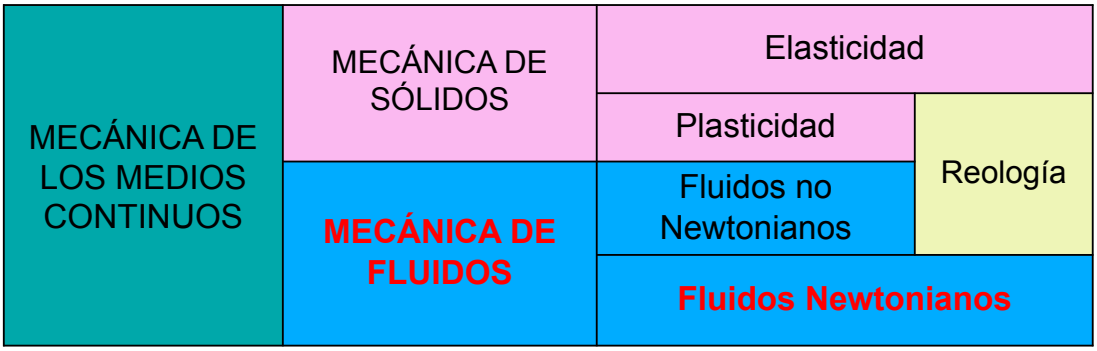


Figura 1.2: Mecánica de los medios continuos

Desde un punto de vista mecánico, la distinción entre líquidos y gases no es tan fundamental como entre éstos (los fluidos) y los sólidos. En líneas generales, la propiedad más importante que distingue a los líquidos de los gases es la compresibilidad: los líquidos son prácticamente incompresibles, por lo que su densidad permanece casi constante aunque sobre ellos actúen presiones muy distintas. Esta propiedad, en el límite ideal de suponer la densidad de un líquido constante a una temperatura dada, hará que el estudio mecánico de los líquidos sea mucho más simple que el de los gases. Por el contrario, los gases son mucho más compresibles y cualquier movimiento que introduzca variaciones apreciables en la presión producirá también variaciones apreciables en la densidad del gas. Sin embargo, algunos movimientos de los que estudiaremos no irán acompañados de variaciones importantes de la presión, por lo que, a efectos mecánicos, los gases se comportan en esas situaciones como si fuesen líquidos.

Para comprender mejor la distinción entre gases, líquidos y sólidos es interesante hacer unas breves consideraciones sobre la naturaleza y la intensidad de las fuerzas intermoleculares en función de la distancia intermolecular. Dos moléculas neutras que no reaccionan

[1]El alumno interesado en esta rama de la Mecánica de Fluidos (que normalmente se incluye en la ciencia llamada *Reología*) puede consultar, por ejemplo, la monografía de G. Bohme, *Non-Newtonian Fluid Mechanics* (North-Holland, Amsterdam, 1987), o el libro más general de R.I. Tanner, *Engineering Rheology* (Oxford University Press, Oxford, 2000).

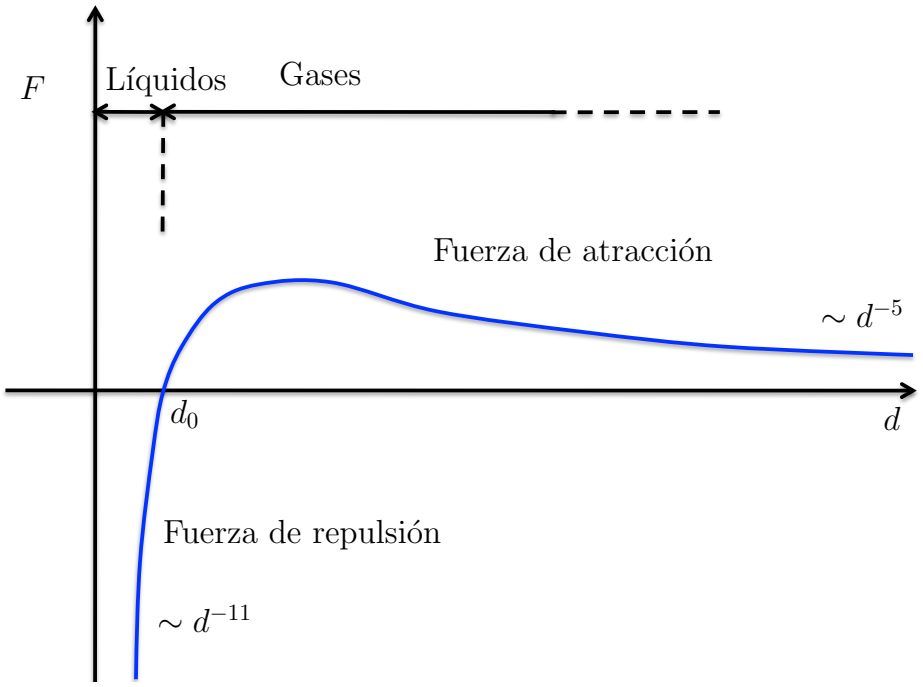


Figura 1.3: Esquema de la fuerza intermolecular de Lennard-Jones entre dos moléculas neutras en función de la distancia intermolecular.

químicamente interaccionan, en el supuesto de que estén aisladas del resto, de acuerdo con el llamado potencial de Lennard-Jones: cuando la distancia entre ellas es menor que una cierta distancia d_o ($d_o \approx 3 \times 10^{-10} m$, dependiendo del tamaño de la molécula) existe una fuerte repulsión entre las moléculas debida a la repulsión electrostática entre las nubes electrónicas, que varía con la distancia d entre las moléculas elevada a la potencia -11 ($\sim d^{-11}$); para distancias mayores que d_o, las moléculas se atraen débilmente debido a la formación de dipolos eléctricos, variando la fuerza de atracción, a grandes distancias, como d^{-5}. Es decir, el módulo de la fuerza viene dado por:

$$F(d) = F_o \left[\left(\frac{d_o}{d} \right)^5 - \left(\frac{d_o}{d} \right)^{11} \right], \tag{1.1}$$

donde F_o es una constante (F_o y d_o dependen de las características de las moléculas) y se ha tomado positiva la fuerza de atracción. Si las moléculas reaccionasen químicamente, a distancias muy cortas aparecería, una vez vencida cierta repulsión electrostática, una fuerza atractiva mucho más intensa (de origen *cuántico*) que tendería a enlazar químicamente las moléculas, y que, por supuesto, no está contenida en la descripción anterior.

La distancia típica entre dos moléculas de una sustancia se puede estimar del conocimiento de su masa molecular y de su densidad. Así, por ejemplo, un gas típico (oxígeno) en condiciones normales ($20^o C$, 1 atm) tiene una densidad de 1,33 kg/m^3. Como la masa molecular del oxígeno es 32 kg/kmol, en un metro cúbico de este gas hay 0,0416 kmoles; teniendo en cuenta el número de Avogadro ($N_A = 6{,}022 \times 10^{26}$ moléculas/kmol), hay $n = 2{,}5 \times 10^{25}$ moléculas de O_2 por metro cúbico. La distancia media entre moléculas de O_2 es, pues, $n^{-1/3} \simeq 4{,}1 \times 10^{-9}$ m, que es unas diez veces la distancia d_o. Es decir, las moléculas de un gas típico están lo suficientemente separadas como para que se puedan

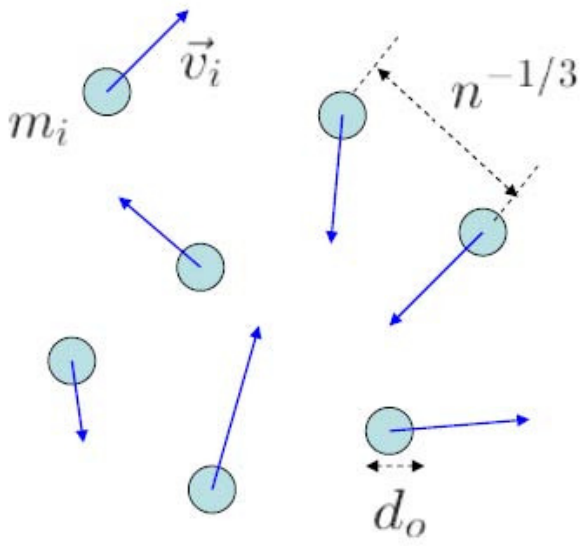


Figura 1.4: Movimiento de las moléculas en un gas.

juntar más por acción de fuerzas externas, sin llegar a la *barrera* que supone la repulsión electrostática cuando la distancia intermolecular es menor que d_o. En los líquidos, la distancia intermolecular típica es mucho menor, del orden de d_o (en el caso del agua a temperatura ambiente, la densidad es 10^3 kg/m^3 y como su masa molecular es 18, la distancia media es de $n^{-1/3} \simeq 3{,}1 \times 10^{-10}$ m), con lo que habría que someter al líquido a presiones gigantescas para vencer la repulsión electrostática (¡que varía como d^{-11}!) y así comprimirlo; de aquí la aparente incompresibilidad de los líquidos. Cuando un líquido se enfría por debajo de su punto de fusión solidificándose, la densidad generalmente varía muy poco (por lo general la densidad aumenta ligeramente, salvo casos excepcionales como el agua); es, pues, sorprendente que un ligero cambio en la densidad cambie tan drásticamente las propiedades mecánicas de la sustancia. Básicamente, las moléculas en un líquido y en un sólido están aproximadamente a la misma distancia (alrededor de d_o), estribando la diferencia en que las moléculas de un sólido están *ancladas* en torno a unas posiciones de equilibrio en una cierta estructura (cristalina o no), perdiendo la movilidad que disfrutaban en el estado líquido. En ambos casos las moléculas están tan cerca unas de otras que solo la acción de fuerzas de compresibilidad extremadamente grandes pueden variar la densidad; sin embargo, la movilidad de las moléculas en el líquido hace que la aplicación de esfuerzos tangenciales provoque una deformación continua, que no se produce en el sólido. Al calentar un líquido por encima de su punto de ebullición, las moléculas se separan unas de otras, adquiriendo una energía cinética proporcional a la temperatura, de forma que en el nuevo estado (gas) la sustancia es fácilmente compresible, así como deformable.

1.2. La hipótesis de medio continuo

Desde un punto de vista molecular, el estudio de los fluidos es extremadamente complejo debido al gigantesco número de moléculas: en $1mm^3$ de un gas en condiciones normales existen alrededor de 10^{16} moléculas, mientras que en el mismo volumen de un líquido típico hay del orden de 10^{20}. El estudiar las interacciones de cada una de las moléculas con el resto

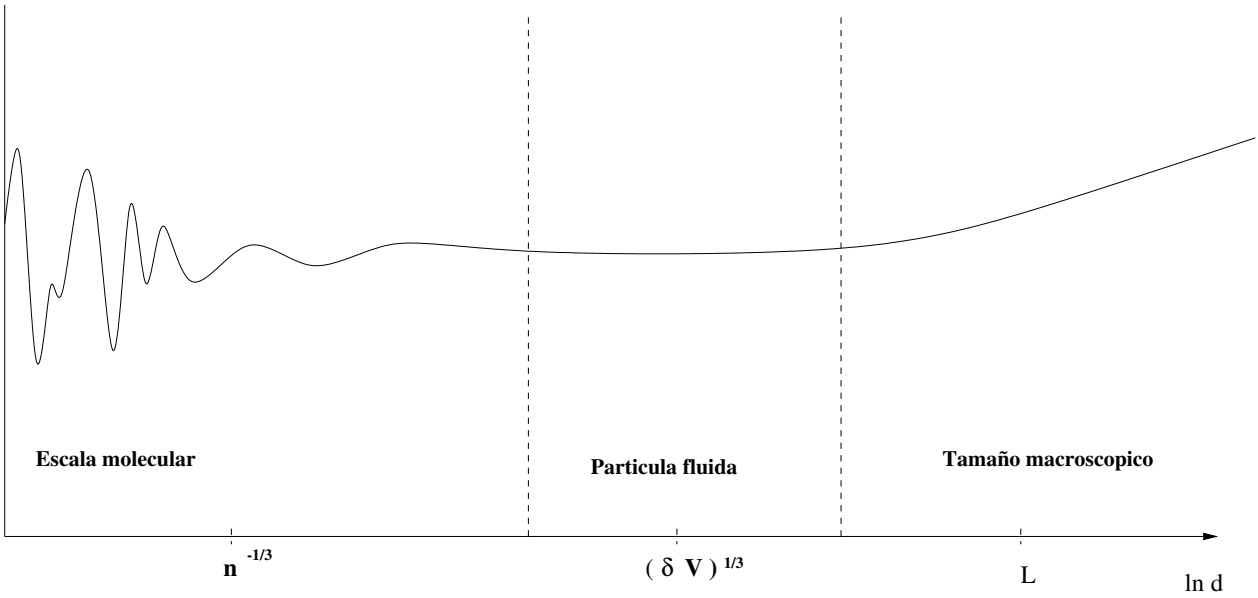


Figura 1.5: Variación de una propiedad típica (masa de moleculas por unidad de volumen o densidad) en función de la distancia sobre la cual se promedia.

no sólo sería un esfuerzo prácticamente imposible, sino también valdío, ya que sería muy difícil extraer información macroscópica útil a partir de la información molecular. Por ello, en la mecánica de fluidos se utiliza la hipótesis de medio continuo, de forma similar a la teoría de la elasticidad en la mecánica de sólidos. Bajo esta hipótesis, el fluido se considera como un campo continuo en el que cada punto representa un volumen δV de fluido (llamado punto material o partícula fluida) lo suficientemente pequeño como para que pueda ser tratado como un diferencial matemático, y lo suficientemente grande como para que contenga un gran número de moléculas y el caracter discreto (molecular) de la materia no se manifieste en él. Así, por ejemplo, el volumen δV deberá ser lo suficientemente grande como para que la masa de las moléculas contenidas en él, δM, no fluctúe de una manera caótica debido al carácter molecular del fluido, y lo suficientemente pequeño como para que esta masa δM no varíe sensiblemente al pasar de un punto $\delta V(\vec{x})$ a otro vecino $\delta V(\vec{x}+\delta\vec{x})$. Obviamente, la hipótesis de medio continuo limita el rango de validez de la Mecánica de Fluidos a sistemas fluidos cuyas condiciones sean tales que exista ese intervalo intermedio de tamaños δV, grande para que contenga un gran número de moléculas y se pueda hablar de valores medios, y pequeño para que $(\delta V)^{1/3}$ sea pequeño comparado con la longitud característica L de variación de esos valores medios y se puedan considerar como variables continuas; es decir, $n^{-1/3} \ll L$, donde n es la densidad numérica o número de moléculas por unidad de volumen, de forma que exista un δV tal que $n^{-1/3} \ll (\delta V)^{1/3} \ll L$ (ver figura 1.5). Afortunadamente, la restricción $n^{-1/3} \ll L$ se cumplen prácticamente en todos los fluidos en las condiciones que generalmente se dan en la naturaleza y en la industria (vimos antes que $n^{-1/3}$, es decir, la distancia media entre moléculas, era del orden de 4×10^{-6} mm para los gases típicos, y del orden de 3×10^{-7} mm para los líquidos típicos, por lo que tendrían que existir condiciones muy extremas en las cuales las propiedades *macroscópicas* variasen en distancias extremadamente pequeñas para que la hipótesis de medio continuo no fuese válida). No obstante, existen situaciones, como por ejemplo el gas interestelar, en que las moléculas están tan separadas unas de otras que la hipótesis de medio continuo falla y hay que estudiar el *gas* como si fuese un conjunto

discreto de partículas (que, por otra parte, rara vez interaccionan unas con otras). Veremos más adelante que la Mecánica de Fluidos hace uso de otra hipótesis (la hipótesis de equilibrio termodinámico local) que es más restrictiva que la hipótesis de medio continuo, aunque también se suele satisfacer en la mayoría de las situaciones de interés práctico.

En la mecánica de medios continuos, en vez de hablar de la posición $\vec{x}_i(t)$ y de la velocidad $\vec{v}_i(t)$ de cada molécula, se habla de magnitudes medias en cada punto $\vec{x}$ (partícula fluida de volumen δV centrada en $\vec{x}$) en cada instante t. Así, se define la densidad,

$$\rho(\vec{x},t) = \lim_{\delta V\to 0} \frac{\sum_{i=1}^{\delta N} m_i}{\delta V}\,, \tag{1.2}$$

donde $\delta N(\vec{x},t)$ es el número de moléculas en el elemento de volumen δV situado en el punto $\vec{x}$ en el instante t, m_i es la masa de la molécula i y el límite $\delta V \to 0$ se toma en el sentido descrito anteriormente, es decir, $(\delta V)^{1/3} \ll L$, pero $(\delta V)^{1/3} \gg n^{-1/3}$. La velocidad media del fluido $\vec{v}$ en el punto $\vec{x}$ en el instante t se define como

$$\vec{v}(\vec{x},t) = \lim_{\delta V\to 0} \frac{\sum_{i=1}^{\delta N} m_i\vec{v}_i}{\delta M}\,, \tag{1.3}$$

donde $\delta M = \sum_{1=1}^{\delta N} m_i$. Por último, la energía interna por unidad de masa, e, se define

$$e + \frac{v^2}{2} = \lim_{\delta V\to 0} \frac{\sum_{i=1}^{\delta N} m_i v_i^2/2}{\delta M}\,, \tag{1.4}$$

donde $v \equiv |\vec{v}|$ siendo $v^2/2$ la energía cinética macroscópica por unidad de masa. Obsérvese que no toda la energía cinética de las moléculas se traduce en una energía cinética media o macroscópica del fluido, sino que parte de ella queda *oculta* en forma de energía interna. Si las moléculas del fluido tuviesen grados de libertad internos, la energía asociada a ellos debería añadirse en el segundo miembro de (1.4), contribuyendo así a la energía interna macroscópica.

Con el uso de magnitudes medias que varían con la posición y el tiempo (campos), las ecuaciones que gobiernan el movimiento y el estado de un fluido no serán, como veremos, ecuaciones diferenciales ordinarias como ocurre en la mecánica de partículas, sino ecuaciones en derivadas parciales similares a las que se encuentran en otras teorías de campo como, por ejemplo, las ecuaciones de Maxwell en Electromagnetismo, o las ecuaciones de la Elasticidad.

Referencias y lecturas complementarias.[2]

- G. K. BATCHELOR, 1967. Secciones 1.1 y 1.2.
- R. FERNÁNDEZ FERIA, 2005. Capítulo 2.
- J. O. HIRSCHFELDER, C. F. CURTISS y R. B. BIRD, 1964. Sección 1.3.
- P. K. KUNDU y I. M. COHEN, 2008. Secciones 1.1-1.4.

[2]Ver *Bibliografía* al final para la referencias completas.

CAPÍTULO 2

Repaso de algunas nociones matemáticas de interés para la mecánica de los medios continuos

No todo el contenido escrito en esta lección se verá en clase. La mayor parte constituye un resumen de temas que ya deben conocer los estudiantes y que se dan explícitamente para fijar la notación que se usará en este curso, para repaso y para referencia en posteriores lecciones.

2.1. Escalares, vectores, tensores

En la Mecánica de Fluidos, como en muchas otras ramas de la Física y de la Ingeniería, aparecen magnitudes que son escalares, otras que son vectoriales y algunas otras que son tensoriales. Antes de pasar a describir matemáticamente el movimiento y la dinámica de los fluidos, en cuyas ecuaciones aparecerán estas magnitudes, es conveniente hacer un breve repaso preliminar de estos conceptos matemáticos básicos y de las operaciones más comunes entre ellos. Aunque en la introducción de algunos de estos conceptos se usarán coordenadas cartesianas, se hará énfasis en el uso de la notación *vectorial,* de manera que los resultados de las operaciones no dependan del sistema coordenado utilizado.

Números puros y magnitudes físicas que no requieren una dirección en el espacio para su especificación completa se denominan **magnitudes escalares** o simplemente **escalares.** Ejemplos típicos son el volumen, la densidad, la masa, la temperatura, la presión, la energía, la entropía, etc.

Una **magnitud vectorial,** o simplemente un **vector,** es una magnitud tal que para su completa especificación necesita una magnitud escalar (módulo del vector) y una dirección. Ejemplos típicos en Mecánica (incluyendo la Mecánica de Fluidos) son la velocidad, la fuerza, la cantidad de movimiento, la aceleración, la velocidad angular, el momento angular, etc. Un vector se puede representar por una linea recta en la dirección del vector con una longitud dada por su módulo (en una escala determinada). Lo designaremos por una letra con una *flechita* sobre ella (por ejemplo, $\vec{v}$). Dado un sistema de coordenadas (cartesiano, cilíndrico, etc., ver más adelante), un vector se representa por

$$\vec{x} = x_i \vec{e}_i \qquad \text{o} \qquad \vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \,, \tag{2.1}$$

donde x_i, $i = 1, 2, 3$ son las componentes del vector sobre cada uno de los vectores unitarios $\vec{e}_i$, $i = 1, 2, 3$ que definen el sistema de coordenadas. Obsérvese que se ha utilizado la notación

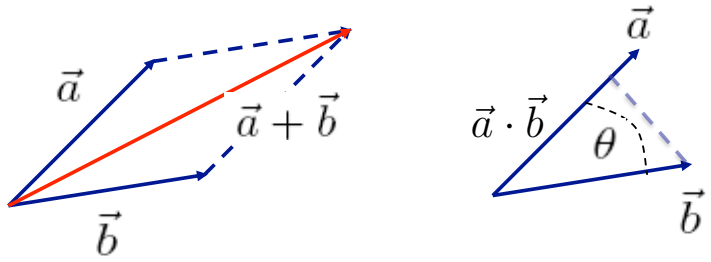


Figura 2.1: Suma y producto escalar de dos vectores.

habitual de indicar suma mediante la repetición de subíndices en un mismo término (a veces llamada notación de Einstein). Por otro lado, en la representación *matricial* [parte derecha de (2.1)], el superíndice T indica *transpuesto.* El módulo de un vector $\vec{x}$ se representará por $|\vec{x}|$, o simplemente x.

La **suma** de dos vectores se rige por la ley del paralelogramo (ver Fig. 2.1). En notación matricial, si $\vec{a} = a_i\vec{e}_i$ y $\vec{b} = b_i\vec{e}_i$ en algún sistema de coordenadas,

$$\vec{a}+\vec{b} = (a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)^T\,.$$

El **producto escalar** de dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es un escalar que viene dado por (ver Fig. 2.1)

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\theta \tag{2.2}$$

y representa la proyección de $\vec{a}$ sobre la dirección del vector $\vec{b}$, o viceversa, la proyección de $\vec{b}$ sobre la dirección del vector $\vec{a}$. Claramente, si dos vectores son *perpendiculares* su producto escalar es nulo. En notación por componentes,

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_ib_i\,.$$

Se deduce que $\vec{a}\cdot\vec{e}_i = a_i$ para cualquier vector unitario $\vec{e}_i$ que define el sistema de coordenadas en el que está representado $\vec{a}$.

El producto escalar es conmutativo, $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$, y se tiene la propiedad distributiva en relación a la suma, $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$.

Como ejemplo típico de producto escalar en Mecánica, si $\vec{F}$ es la fuerza ejercida sobre una partícula que se mueve con velocidad $\vec{v}$, el trabajo realizado por dicha fuerza sobre la partícula es el producto escalar $\vec{F}\cdot\vec{v}$.

El **producto vectorial** de dos vectotes $\vec{a}$ y $\vec{b}$, que se representará por $\vec{a}\wedge\vec{b}$, es otro vector de módulo $|\vec{a}\wedge\vec{b}| = ab\,\mathrm{sen}\,\theta$, perpendicular tanto a $\vec{a}$ como a $\vec{b}$ y cuyo sentido es tal que la rotación de $\vec{a}$ a $\vec{b}$ está relacionada con el sentido de $\vec{a}\wedge\vec{b}$ por la regla del 'sacacorchos' (ver Fig. 2.2). De la definición se sigue que el producto vectorial no es conmutativo, puesto que $\mathrm{sen}(-\theta) = -\,\mathrm{sen}\,\theta$, de forma que $\vec{a}\wedge\vec{b} = -\vec{b}\wedge\vec{a}$. Al igual que el producto escalar, cumple la propiedad distributiva respecto a la suma de vectores, $(\vec{a}+\vec{b})\wedge\vec{c} = \vec{a}\wedge\vec{c}+\vec{b}\wedge\vec{c}$.

Un ejemplo típico de producto vectorial en Mecánica se tiene en un sólido rígido que gira con velocidad angular $\vec{\omega}$ (ver Fig. 2.2): la velocidad de un punto situado en la posición $\vec{r}$ en

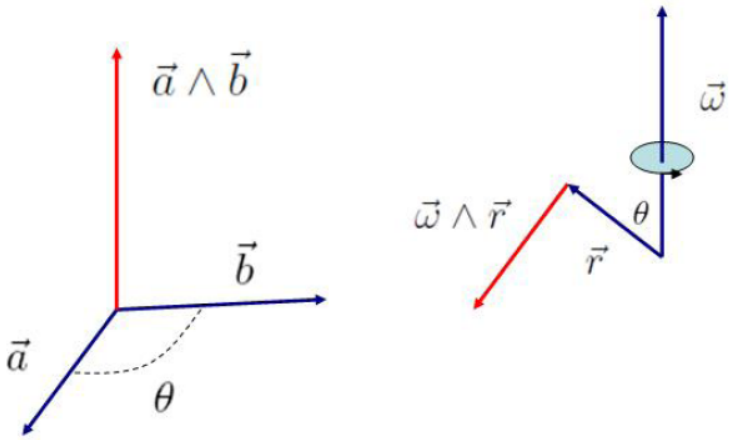


Figura 2.2: Producto vectorial de dos vectores.

relación a un origen que pasa por el eje de giro es $\vec{\omega} \wedge \vec{r}$. Si el giro cambia de sentido ($\vec{\omega} \to -\vec{\omega}$), la velocidad del punto cambia de sentido, de acuerdo con la propiedad no conmutativa del producto vectorial.

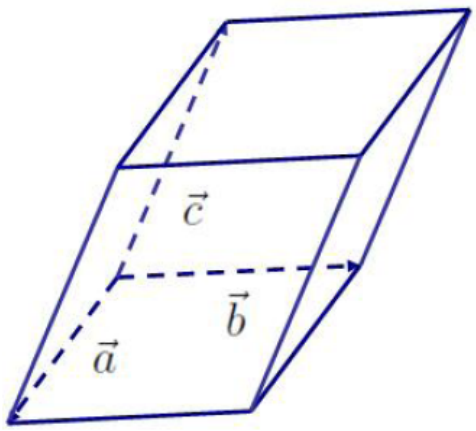


Figura 2.3: Triple producto escalar.

El **triple producto escalar,** o **producto mixto,** de tres vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ es el escalar $\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c})$ y representa el volumen del paralelepípedo formado por esos tres vectores (ver Fig. 2.3). Esto último se deduce fácilmente teniendo en cuenta que $\vec{b} \wedge \vec{c}$ es un vector cuyo módulo representa el área del paralelogramo formado por los vectores $\vec{b}$ y $\vec{c}$ y es normal al plano del mismo, de forma que su producto escalar con $\vec{a}$ proporciona el volumen. Teniendo en cuenta las propiedades mencionadas anteriormente de los productos escalar y vectorial, se tiene:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c} = -\vec{a} \cdot (\vec{c} \wedge \vec{b}) = \dots .$$

El **triple producto vectorial** de tres vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$, que verifica las propiedades

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = -\vec{a} \wedge (\vec{c} \wedge \vec{b}) = (\vec{c} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{a} \, ,$$

se puede escribir como

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}. \tag{2.3}$$

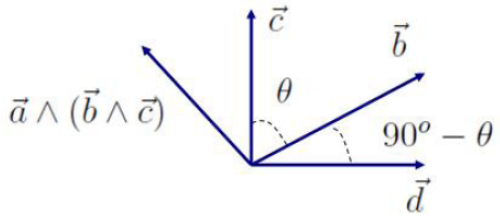


Figura 2.4

Para verlo hay que tener en cuenta que el vector $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})$ es perpendicular al vector $\vec{b} \wedge \vec{c}$, que a su vez es perpendicular al plano que contiene $\vec{b}$ y $\vec{c}$; es decir, tiene que estar en el plano de $\vec{b}$ y $\vec{c}$. Luego

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = p\vec{b} - q\vec{c},$$

donde p y q son escalares. Como $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})$ es perpendicular a $\vec{a}$, su producto escalar por $\vec{a}$ es nulo,

$$0 = p\vec{a} \cdot \vec{b} - q\vec{a} \cdot \vec{c}, \quad \text{de donde} \quad p = \lambda \vec{a} \cdot \vec{c}, \quad q = \lambda \vec{a} \cdot \vec{b}, \tag{2.4}$$

siendo λ otro escalar. Por tanto,

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}.$$

Para determinar λ, si se multiplica el vector anterior por un vector $\vec{d}$ en el mismo plano que $\vec{b}$ y $\vec{c}$ y perpendicular a $\vec{c}$ $(\vec{d} \cdot \vec{c} = 0)$,

$$\vec{d} \cdot [\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})] = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) = \vec{a} \cdot [(\vec{b} \wedge \vec{c}) \wedge \vec{d}],$$

donde se ha hecho uso de la propiedad del triple producto escalar. Como $(\vec{b} \wedge \vec{c}) \wedge \vec{d}$ está en el plano de $\vec{b}$ y $\vec{c}$ y es perpendicular a $\vec{d}$, es un vector en la dirección de $\vec{c}$, cuyo módulo es

$$bcd \operatorname{sen} \theta = bd \cos(90^o - \theta) c\,.$$

Por tanto,

$$(\vec{b} \wedge \vec{c}) \wedge \vec{d} = (\vec{b} \cdot \vec{d})\vec{c},$$

(ver Fig. 2.4) teniéndose que

$$\lambda(\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d})$$

y $\lambda = 1$.

Ésta y algunas otras propiedades vectoriales son más fáciles de demostrar utilizando explícitamente coordenadas cartesianas (ver, por ejemplo, BOURNE y KENDALL, 1992), haciendo uso de la notación para el producto vectorial, válida en coordenadas cartesianas,

$$\vec{a} = a_i \vec{e}_i \,, \quad \vec{b} = b_i \vec{e}_i \,, \quad \vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} . \tag{2.5}$$

Pero, como se dijo al principio, en este repaso al análisis vectorial se intenta utilizar una notación puramente vectorial, independiente del sistema de coordenadas. Más adelante se particularizarán para los sistemas coordenados más comunes en Ingeniería.

Antes de introducir los tensores, es conveniente definir la **diada** formada por dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, o el producto diádico de dos vectores, que se representará simplemente como $\vec{a}\vec{b}$, sin ningún símbolo entre ellos, como una magnitud formada por nueve escalares, que en coordenadas y en notación matricial se representarían, respectivamente,

$$\vec{a}\vec{b} = a_i b_j \vec{e}_i \vec{e}_j \,, \quad \text{o} \quad \vec{a}\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix} . \tag{2.6}$$

Es decir, una diada es un **tensor de segundo orden** cuya componente ij viene dada por $T_{ij} \equiv \{\vec{a}\vec{b}\}_{ij} = a_i b_j$. En general, se llamará tensor de segundo orden (o de rango dos) a una magnitud, que se designará con dos rayitas encima de una letra, formada por nueve escalares en la forma (2.6). En un determinado sistema coordenado, definido por los vectores unitarios $\vec{e}_i, i = 1, 2, 3$, se escribiría (en coordenadas o en notación matricial)

$$\overline{\overline{T}} = T_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j \,, \quad \text{o} \quad \overline{\overline{T}} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} . \tag{2.7}$$

Obsérvese que un vector es un tensor de orden o rango unidad y un escalar es un tensor de rango cero. De análoga manera se definirían los tensores de tercero, cuarto, y órdenes superiores. Aquí solo se van a resumir las propiedades básicas de los tensores de segundo orden y la palabra tensor implícitamente se referirá a un tensor de segundo orden. Un ejemplo típico de tensor, muy importante en la Mecánica de los Medios Continuos y, por tanto, en la Mecánica de Fluidos, es el tensor de esfuerzos $\overline{\overline{\tau}}$, que se definirá en lecciones posteriores.

El producto escalar de un vector por un tensor es un vector:

$$\overline{\overline{T}} \cdot \vec{a} = \vec{b} \,, \quad \vec{b} = b_j \vec{e}_j = T_{ij} a_i \vec{e}_j \,. \tag{2.8}$$

Téngase en cuenta que, salvo que el tensor sea simétrico, este producto escalar no es conmutativo, y no es lo mismo multiplicar por la derecha que por la izquierda:

$$\overline{\overline{T}} \cdot \vec{a} \neq \vec{a} \cdot \overline{\overline{T}} = \overline{\overline{T}}^T \cdot \vec{a} \,, \tag{2.9}$$

teniéndose la igualdad si $\overline{\overline{T}} = \overline{\overline{T}}^T$ (es decir, si $T_{ij} = T_{ji}$). El producto escalar de dos tensores es otro tensor:

$$\overline{\overline{T}} \cdot \overline{\overline{P}} = \overline{\overline{Q}} \,, \quad \overline{\overline{Q}} = Q_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j = T_{ik} P_{kj} \vec{e}_i \vec{e}_j \,, \tag{2.10}$$

es decir, la habitual multiplicación de matrices, en este caso matrices cuadradas 3×3. En particular, para una diada se tiene

$$(\vec{a}\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}\quad\text{y}\quad(\vec{a}\vec{b})\cdot(\vec{c}\vec{d})=(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}\vec{d}\,. \tag{2.11}$$

También se puede definir el **doble producto escalar** de dos tensores, operación que se designará por dos puntos (':'), y cuyo resultado es un escalar formado por la suma de las multiplicaciones de los correspondientes términos de los dos tensores:

$$\overline{\overline{T}}:\overline{\overline{P}}=T_{ij}P_{ij}\,. \tag{2.12}$$

De igual manera se puede definir el triple producto escalar para tensores de tercer orden, etc. Se observa que el producto escalar reduce el rango del tensor en una unidad, mientras que el doble producto escalar en dos. Por ello, al producto escalar también se le suele denominar *contracción.*

Un tensor particularmente importante es el **tensor unidad** o identidad, definido por

$$\overline{\overline{I}}=\delta_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j\quad\text{o}\quad\overline{\overline{I}}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\,, \tag{2.13}$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker ($\delta_{ij}=0$ si $i\neq j$, $\delta_{ij}=1$ si $i=j$). Cualquier vector o tensor multiplicado escalarmente por $\overline{\overline{I}}$ permanece inalterado:

$$\overline{\overline{I}}\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\overline{\overline{I}}=\vec{a}\,,\quad\overline{\overline{I}}\cdot\overline{\overline{T}}=\overline{\overline{T}}\cdot\overline{\overline{I}}=\overline{\overline{T}}\,. \tag{2.14}$$

Por otro lado, el doble producto escalar de $\overline{\overline{I}}$ por otro tensor proporciona la traza o suma de los elementos de la diagonal de este tensor:

$$\overline{\overline{I}}:\overline{\overline{T}}=traza\{\overline{\overline{T}}\}=T_{ii}\,,\quad\overline{\overline{I}}:\vec{a}\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{b}=traza\{\vec{a}\vec{b}\}\,. \tag{2.15}$$

De la definición (2.7), donde un tensor viene dado por nueve escalares en una *base* formada por los nueve tensores o diadas *unitarias* $\vec{e}_i\vec{e}_j\,,i,j=1,2,3$, en algún sistema coordenado, está claro que cualquier tensor se puede escribir como la suma de tres diadas formadas por tres pares de vectores. Es decir, siempre se pueden encontrar 6 vectores tales que un tensor cualquiera $\overline{\overline{T}}$ se puede escribir como

$$\overline{\overline{T}}=\vec{a}\vec{b}+\vec{c}\vec{d}+\vec{e}\vec{f}\,. \tag{2.16}$$

En esta notación, se define el tensor *conjugado* de $\overline{\overline{T}}$ como

$$\overline{\overline{T}}_c=\vec{b}\vec{a}+\vec{d}\vec{c}+\vec{f}\vec{e}\,. \tag{2.17}$$

Dado que

$$\overline{\overline{T}}\cdot\vec{v}=\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{v})+\vec{c}(\vec{d}\cdot\vec{v})+\vec{e}(\vec{f}\cdot\vec{v})=\vec{v}\cdot\overline{\overline{T}}_c\,, \tag{2.18}$$

está claro que el tensor conjugado coincide con el transpuesto, $\overline{\overline{T}}_c=\overline{\overline{T}}^T$. En esta notación es fácil encontrar los dos invariantes más importantes de todo tensor $\overline{\overline{T}}$ definido por (2.16), el *primer invariante escalar,*

$$T_1=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{d}+\vec{e}\cdot\vec{f}=\overline{\overline{I}}:\overline{\overline{T}}=traza\{\overline{\overline{T}}\}\,, \tag{2.19}$$

y el *invariante vector,*

$$\vec{T}_2 = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{c} \wedge \vec{d} + \vec{e} \wedge \vec{f}\,. \tag{2.20}$$

Dado un tensor $\overline{\overline{T}}$, estas dos magnitudes son invariantes frente a cualquier transformación lineal del sistema de coordenadas, que preserva los módulos de los vectores y los ángulos entre ellos (traslación y/o rotación). Existe un segundo invariante escalar (el determinante de la matriz asociada al tensor) que no será definido aquí por ser menos relevante para la descripción de la mecánica de los medios continuos (ver, por ejemplo, ARIS, 1989). El primer invariante escalar de un tensor coincide con el de su conjugado, mientras que el invariante vector del tensor conjugado cambia de signo. Por tanto, para un tensor simétrico, $\overline{\overline{T}} = \overline{\overline{T}}^T \equiv \overline{\overline{T}}_c$, el invariante vector es nulo, mientras que para un tensor antisimétrico, $\overline{\overline{T}} = -\overline{\overline{T}}^T$, el primer invariante escalar es cero (su traza es nula). Todo tensor se puede escribir como la suma de un tensor simétrico y otro antisimétrico mediante la identidad

$$\overline{\overline{T}} = \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{T}} + \overline{\overline{T}}^T\right) + \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{T}} - \overline{\overline{T}}^T\right)\,. \tag{2.21}$$

Se verá más adelante que esta descomposición, aplicada al denominado tensor de velocidad de deformación, es muy relevante para describir el movimiento de los fluidos.

En lo que sigue de este tema se resumirán algunas operaciones diferenciales e integrales relevantes aplicadas a los **campos escalares, vectoriales y tensoriales,** es decir, a magnitudes escalares, vectoriales y tensoriales que varían de un punto a otro del espacio. Primero se definirán las operaciones más relevantes en coordenadas generalizadas, para después resumirlas en notación vectorial, de forma que sean generales para cualquier sistema de coordenadas. Esto permitirá escribir las ecuaciones que gobiernan el movimiento de los fluidos en cualquier sistema coordenado.

2.2. Operaciones diferenciales en coordenadas curvilíneas ortogonales

Sean α, β y γ un conjunto de coordenadas curvilíneas ortogonales y $\vec{e}_\alpha$, $\vec{e}_\beta$ y $\vec{e}_\gamma$ los vectores unitarios paralelos a las líneas coordenadas en las direcciones de incremento de α, β y γ, respectivamente; es decir,

$$\vec{e}_\alpha = \frac{\partial\vec{x}/\partial\alpha}{|\partial\vec{x}/\partial\alpha|}\,, \quad \text{etc.}\,, \tag{2.22}$$

donde $\vec{x} = \vec{x}(\alpha, \beta, \gamma)$ es el vector posición de un punto genérico con respecto al origen de coordenadas (ver Fig. 2.5). Para que las coordenadas (α, β, γ) sean ortogonales, se debe verificar

$$\vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta = \vec{e}_\beta \cdot \vec{e}_\gamma = \vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\gamma = 0\,, \tag{2.23}$$

$$\vec{e}_\alpha = \vec{e}_\beta \wedge \vec{e}_\gamma\,, \quad \text{etc.} \tag{2.24}$$

Se definen las funciones de escala

$$h_\alpha \equiv \left|\frac{\partial\vec{x}}{\partial\alpha}\right|\,, \quad h_\beta \equiv \left|\frac{\partial\vec{x}}{\partial\beta}\right|\,, \quad h_\gamma \equiv \left|\frac{\partial\vec{x}}{\partial\gamma}\right|\,, \tag{2.25}$$

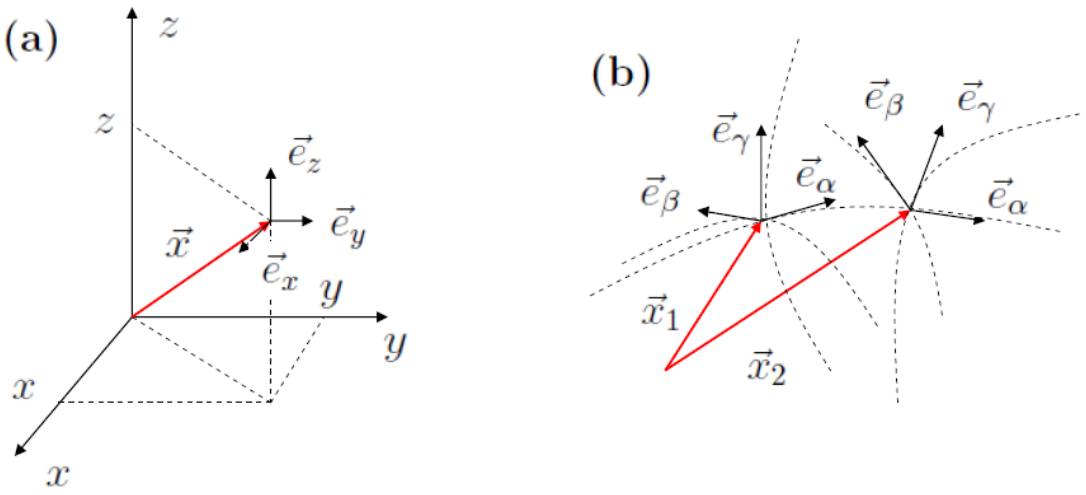


Figura 2.5: (a) Coordenadas cartesianas. (b) Coordenadas curvilíneas, mostrando la variación de los vectores unitarios cuando $\vec{x}$ varía a lo largo de la 'coordenada' α.

de forma que

$$\vec{e}_\alpha = \frac{1}{h_\alpha}\frac{\partial \vec{x}}{\partial \alpha}\,, \quad \text{etc.}\,, \tag{2.26}$$

y el elemento diferencial de longitud viene dado por

$$d\vec{x} = h_\alpha d\alpha \vec{e}_\alpha + h_\beta d\beta \vec{e}_\beta + h_\gamma d\gamma \vec{e}_\gamma\,, \tag{2.27}$$

$$(dl)^2 \equiv d\vec{x}\cdot d\vec{x} = h_\alpha^2 (d\alpha)^2 + h_\beta^2 (d\beta)^2 + h_\gamma^2 (d\gamma)^2\,. \tag{2.28}$$

Las coordenadas ortogonales más simples son las **coordenadas cartesianas** (x, y, z) [ver Fig. 2.5(a)], en las que $h_x = h_y = h_z = 1$, $d\vec{x} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$.

A continuación se resumen las operaciones diferenciales más comunes con el **operador nabla,** que se designará por ∇, que es siempre un vector (es decir, un operador vectorial) y, por tanto, no se le pondrá la *flechita* arriba, pues va implícita con la notación ∇.

Si ϕ es un campo escalar, su **gradiente** es un campo vectorial que se define por

$$\nabla\phi \equiv \frac{1}{h_j}\frac{\partial \phi}{\partial j}\vec{e}_j \equiv \frac{1}{h_\alpha}\frac{\partial \phi}{\partial \alpha}\vec{e}_\alpha + \frac{1}{h_\beta}\frac{\partial \phi}{\partial \beta}\vec{e}_\beta + \frac{1}{h_\gamma}\frac{\partial \phi}{\partial \gamma}\vec{e}_\gamma\,, \tag{2.29}$$

donde $j = \alpha, \beta, \gamma$, y se ha utilizado de nuevo la notación habitual de indicar suma mediante la repetición de subíndices. Este vector $\nabla\phi$ es perpendicular a la superficie dada por $\phi(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ en el punto considerado. Por otra parte, si $\vec{v}$ es un campo vectorial, $\vec{v} \equiv v_\alpha \vec{e}_\alpha + v_\beta \vec{e}_\beta + v_\gamma \vec{e}_\gamma \equiv v_j \vec{e}_j$, su **divergencia** viene dada por el campo escalar

$$\nabla\cdot\vec{v} \equiv \vec{e}_j \cdot \frac{1}{h_j}\frac{\partial \vec{v}}{\partial j} = \frac{1}{h_\alpha h_\beta h_\gamma}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}(h_\beta h_\gamma v_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \beta}(h_\alpha h_\gamma v_\beta) + \frac{\partial}{\partial \gamma}(h_\alpha h_\beta v_\gamma)\right]\,, \tag{2.30}$$

mientras que el **rotacional** de $\vec{v}$ es otro campo vectorial definido por

$$\nabla \wedge \vec{v} \equiv \vec{e}_j \wedge \frac{1}{h_j}\frac{\partial \vec{v}}{\partial j} = \frac{1}{h_\alpha h_\beta h_\gamma}\begin{vmatrix} h_\alpha \vec{e}_\alpha & h_\beta \vec{e}_\beta & h_\gamma \vec{e}_\gamma \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} & \frac{\partial}{\partial \beta} & \frac{\partial}{\partial \gamma} \\ h_\alpha v_\alpha & h_\beta v_\beta & h_\gamma v_\gamma \end{vmatrix} . \tag{2.31}$$

El operador **Laplaciano** sobre un campo escalar ϕ se define como

$$\nabla^2\phi \equiv \triangle\phi \equiv \nabla \cdot \nabla\phi$$

$$= \frac{1}{h_\alpha h_\beta h_\gamma}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{h_\beta h_\gamma}{h_\alpha}\frac{\partial\phi}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{h_\alpha h_\gamma}{h_\beta}\frac{\partial\phi}{\partial\beta}\right) + \frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{h_\alpha h_\beta}{h_\gamma}\frac{\partial\phi}{\partial\gamma}\right)\right] . \tag{2.32}$$

Otras dos operaciones frecuentemente usadas en la Mecánica de Fluidos son la Laplaciana de un vector, $\nabla^2\vec{v}$, y la divergencia de un tensor, $\nabla \cdot \overline{\overline{T}}$, donde $\overline{\overline{T}} = T_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j$, $i, j = \alpha, \beta, \gamma$. Estas dos operaciones se realizan utilizando las definiciones anteriores, es decir,

$$\nabla^2\vec{v} = \nabla \cdot \nabla(v_j\vec{e}_j) , \tag{2.33}$$

$$\nabla \cdot \overline{\overline{T}} = \vec{e}_j \cdot \frac{1}{h_j}\frac{\partial}{\partial j}(T_{ik}\vec{e}_i\vec{e}_k) , \tag{2.34}$$

teniendo en cuenta las relaciones

$$\frac{\partial\vec{e}_i}{\partial j} = \frac{1}{h_i}\frac{\partial h_j}{\partial i}\vec{e}_j , \quad i, j = \alpha, \beta, \gamma, \tag{2.35}$$

que resultan de la ortogonalidad de los vectores $\vec{e}_i$ (en la última expresión los subíndices repetidos no están sumados). Sin embargo, la operación $\nabla^2\vec{v}$ se realiza más fácilmente utilizando la igualdad

$$\nabla^2\vec{v} = \nabla(\nabla \cdot \vec{v}) - \nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{v})$$

[ecuación (2.64) de la sección siguiente] y haciendo uso de (2.29)-(2.31). Por último, otra operación frecuente en la Mecánica de Fluidos es $(\vec{b} \cdot \nabla)\vec{a}$, donde $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son dos campos vectoriales [en particular, aparecerá $(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}$]. Al igual que $\nabla^2\vec{v}$ y $\nabla \cdot \overline{\overline{T}}$, esta operación, que es inmediata en coordenadas cartesianas (en ellas es simplemente el producto escalar del vector $\vec{b}$ y el tensor $\nabla\vec{a}$), presenta ciertas dificultades en coordenadas curvilíneas arbitrarias debido a la variación de los vectores unitarios $\vec{e}_i$. Normalmente se realiza haciendo uso de la igualdad $(\vec{b} \cdot \nabla)\vec{a} = (\nabla\vec{a}) \cdot \vec{b} - \vec{b} \wedge (\nabla \wedge \vec{a})$ [ecuación (2.62) de la sección siguiente]. La componente α es:

$$[(\vec{b} \cdot \nabla)\vec{a}]_\alpha = \vec{b} \cdot \nabla a_\alpha + \frac{b_\alpha}{h_\alpha}\left(\frac{a_\alpha}{h_\alpha}\frac{\partial h_\alpha}{\partial\alpha} + \frac{a_\beta}{h_\beta}\frac{\partial h_\alpha}{\partial\beta} + \frac{a_\gamma}{h_\gamma}\frac{\partial h_\alpha}{\partial\gamma}\right)$$

$$- \left(\frac{a_\alpha b_\alpha}{h_\alpha^2}\frac{\partial h_\alpha}{\partial\alpha} + \frac{a_\beta b_\beta}{h_\alpha h_\beta}\frac{\partial h_\beta}{\partial\alpha} + \frac{a_\gamma b_\gamma}{h_\alpha h_\gamma}\frac{\partial h_\gamma}{\partial\alpha}\right) , \tag{2.36}$$

con expresiones similares para las componentes β y γ.

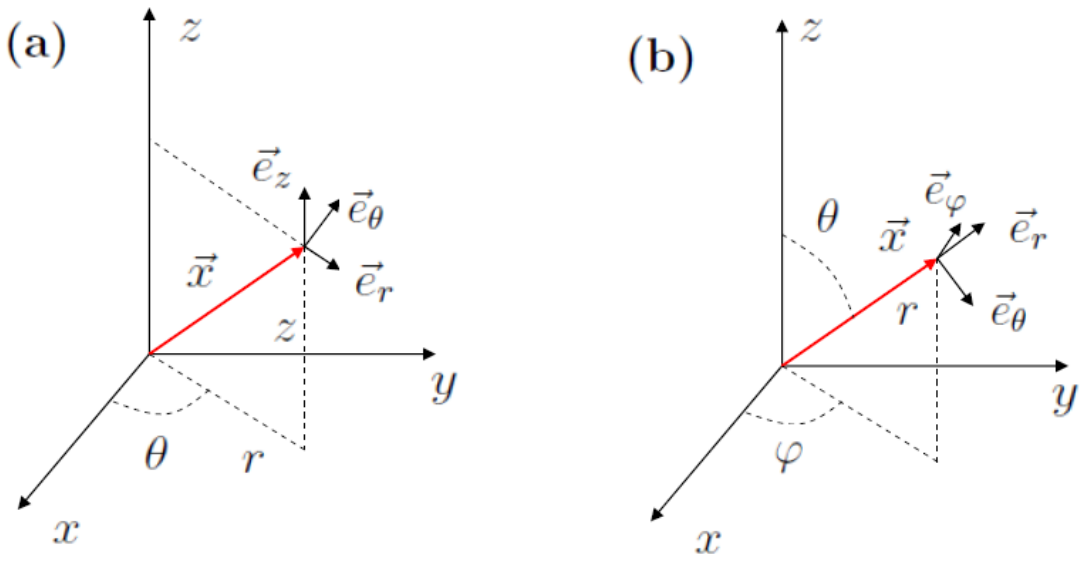


Figura 2.6: (a) Coordenadas cilíndricas. (b) Coordenadas esféricas.

2.2.1. *Coordenadas cilíndricas y esféricas*

El sistema coordenado ortogonal más simple es el cartesiano, en el que $h_\alpha = h_\beta = h_\gamma = 1$. Los dos sistemas coordenados curvilíneos más comúnmente usados son el cilíndrico y el esférico. A continuación se resumen las operaciones más habituales con ∇ es esas coordenadas, que servirán para escribir las ecuaciones que describen el movimiento de los fluidos en dichas coordenadas.

Las **coordenadas cilíndricas** (r, θ, z) están relacionadas con las cartesianas (x, y, z) mediante las relaciones [ver figura 2.6(a)]:

$$x = r\cos\theta\,, \quad y = r\sin\theta \quad , \quad z = z\,, \tag{2.37}$$

con lo que $h_r = 1, h_\theta = r, h_z = 1$. Por tanto se tiene:

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{e}_z\,, \tag{2.38}$$

$$\nabla\cdot\vec{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\,, \tag{2.39}$$

$$\nabla\wedge\vec{v} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right)\vec{e}_z\,, \tag{2.40}$$

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\,, \tag{2.41}$$

$$\nabla^2\vec{v} = \left(\nabla^2 v_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} - \frac{v_r}{r^2}\right)\vec{e}_r + \left(\nabla^2 v_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} - \frac{v_\theta}{r^2}\right)\vec{e}_\theta + \nabla^2 v_z\vec{e}_z\,, \tag{2.42}$$

$$\nabla\cdot\overline{\overline{T}} = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rT_{rr}) + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{\theta r}}{\partial\theta} + \frac{\partial T_{zr}}{\partial z} - \frac{T_{\theta\theta}}{r}\right]\vec{e}_r$$

$$+\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rT_{r\theta})+\frac{1}{r}\frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial T_{z\theta}}{\partial z}+\frac{T_{\theta r}}{r}\right]\vec{e}_\theta$$
$$+\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rT_{rz})+\frac{1}{r}\frac{\partial T_{\theta z}}{\partial\theta}+\frac{\partial T_{zz}}{\partial z}\right]\vec{e}_z\,, \tag{2.43}$$

$$(\vec{b}\cdot\nabla)\vec{a}=\left(b_r\frac{\partial a_r}{\partial r}+\frac{b_\theta}{r}\frac{\partial a_r}{\partial\theta}+b_z\frac{\partial a_r}{\partial z}-\frac{b_\theta a_\theta}{r}\right)\vec{e}_r$$
$$+\left(b_r\frac{\partial a_\theta}{\partial r}+\frac{b_\theta}{r}\frac{\partial a_\theta}{\partial\theta}+b_z\frac{\partial a_\theta}{\partial z}+\frac{b_\theta a_r}{r}\right)\vec{e}_\theta$$
$$+\left(b_r\frac{\partial a_z}{\partial r}+\frac{b_\theta}{r}\frac{\partial a_z}{\partial\theta}+b_z\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)\vec{e}_z\,. \tag{2.44}$$

Las **coordenadas esféricas** (r,θ,φ) satisfacen las siguientes relaciones [figura 2.6(b)]:

$$x=r\sin\theta\cos\varphi\,,\quad y=r\sin\theta\sin\varphi\,,\quad z=r\cos\theta\,, \tag{2.45}$$

$$h_r=1\,,\quad h_\theta=r\,,\quad h_\varphi=r\sin\theta\,, \tag{2.46}$$

$$\nabla\phi=\frac{\partial\phi}{\partial r}\vec{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi\,, \tag{2.47}$$

$$\nabla\cdot\vec{v}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2v_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta v_\theta)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}\quad, \tag{2.48}$$

$$\nabla\wedge\vec{v}=\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta v_\varphi)}{\partial\theta}-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_r$$
$$+\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta$$
$$+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_\theta)}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right)\vec{e}_\varphi\,, \tag{2.49}$$

$$\nabla^2\phi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}\,, \tag{2.50}$$

$$\nabla^2\vec{v}=\left(\nabla^2v_r-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}-\frac{2v_r}{r^2}-\frac{2cot\theta v_\theta}{r^2}-\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_r$$
$$+\left(\nabla^2v_\theta+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}-\frac{v_\theta}{r^2\sin^2\theta}-\frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_\theta$$
$$+\left(\nabla^2v_\varphi+\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi}-\frac{v_\varphi}{r^2\sin^2\theta}+\frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_\varphi\,, \tag{2.51}$$

$$\nabla\cdot\overline{\overline{T}}=\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2T_{rr})+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta T_{\theta r})+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial T_{\varphi r}}{\partial\varphi}-\frac{T_{\theta\theta}+T_{\varphi\varphi}}{r}\right]\vec{e}_r$$
$$+\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2T_{r\theta})+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta T_{\theta\theta})+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial T_{\varphi\theta}}{\partial\varphi}+\frac{T_{\theta r}-cot\theta T_{\varphi\varphi}}{r}\right]\vec{e}_\theta$$

$$+\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2T_{r\varphi})+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta T_{\theta\varphi})+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial T_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi}+\frac{T_{\varphi r}+cot\theta T_{\varphi\theta}}{r}\right]\vec{e}_\varphi\,, \tag{2.52}$$

$$\begin{aligned}(\vec{b}\cdot\nabla)\vec{a} &= \left(b_r\frac{\partial a_r}{\partial r}+\frac{b_\theta}{r}\frac{\partial a_r}{\partial\theta}+\frac{b_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial a_r}{\partial\varphi}-\frac{b_\theta a_\theta+b_\varphi a_\varphi}{r}\right)\vec{e}_r\\ &+\left(b_r\frac{\partial a_\theta}{\partial r}+\frac{b_\theta}{r}\frac{\partial a_\theta}{\partial\theta}+\frac{b_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\theta}{\partial\varphi}+\frac{b_\theta a_r}{r}-\frac{cot\theta b_\varphi a_\varphi}{r}\right)\vec{e}_\theta\\ &+\left(b_r\frac{\partial a_\varphi}{\partial r}+\frac{b_\theta}{r}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\theta}+\frac{b_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{b_\varphi a_r}{r}+\frac{cot\theta b_\varphi a_\theta}{r}\right)\vec{e}_\varphi\,.\end{aligned} \tag{2.53}$$

2.3. Operaciones con el operador ∇

En coordenadas cartesianas es fácil realizar las operaciones que involucran al operador ∇ (es decir, gradientes, divergencias, rotacionales) mediante el uso de subíndices. Cuando las coordenadas son curvilíneas, la técnica de usar subíndices es mucho más complicada. Por ello conviene, siempre que sea posible, realizar las operaciones con ∇ en notación vectorial compacta, ya que de esta forma el resultado será válido en cualquier sistema coordenado. A continuación se dan una serie de identidades que involucran al operador ∇. Para su obtención se hace uso de la regla de derivación de un producto [téngase en cuenta que, cuando los factores son vectores, el orden es importante; así, $(\nabla\phi)\vec{v}\neq(\vec{v}\nabla)\phi$, $(\nabla\vec{a})\cdot\vec{b}\neq\vec{b}\cdot\nabla\vec{a}$, etc.]. También se utilizan las identidades

$$\nabla\wedge\nabla\phi=0\,,\quad \nabla\cdot(\nabla\wedge\vec{v})=0\,, \tag{2.54}$$

válidas para todo campo escalar ϕ y todo campo vectorial $\vec{v}$, y las relaciones vectoriales

$$\vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}=(\vec{c}\wedge\vec{b})\wedge\vec{a}\,, \tag{2.55}$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\wedge\vec{c})=(\vec{a}\wedge\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot(\vec{c}\wedge\vec{a})\,. \tag{2.56}$$

En algunas de las siguientes expresiones se incluyen pasos intermedios para facilitar su seguimiento. Un punto encima de una letra indica el factor sobre el cual actúa el operador ∇ en los casos en que haya alguna ambigüedad.

$$\nabla(\phi\psi)=\phi\nabla\psi+\psi\nabla\phi\,, \tag{2.57}$$

$$\nabla(\phi\vec{v})=\phi\nabla\vec{v}+(\nabla\phi)\vec{v}\,, \tag{2.58}$$

$$\nabla\cdot(\phi\vec{v})=\phi\nabla\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\nabla\phi\,, \tag{2.59}$$

$$\nabla\wedge(\phi\vec{v})=\phi\nabla\wedge\vec{v}+\nabla\phi\wedge\vec{v}=\phi\nabla\wedge\vec{v}-\vec{v}\wedge\nabla\phi\,, \tag{2.60}$$

$$\nabla\cdot(\vec{a}\wedge\vec{b})=\nabla\cdot(\dot{\vec{a}}\wedge\vec{b})+\nabla\cdot(\vec{a}\wedge\dot{\vec{b}})=(\nabla\wedge\vec{a})\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot(\nabla\wedge\vec{b})\,, \tag{2.61}$$

$$\vec{a}\wedge(\nabla\wedge\vec{b})=(\nabla\vec{b})\cdot\vec{a}-(\vec{a}\cdot\nabla)\vec{b}\,, \tag{2.62}$$

$$\vec{v}\wedge(\nabla\wedge\vec{v})=\nabla\frac{1}{2}v^2-(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}\,, \tag{2.63}$$

$$\nabla\wedge(\nabla\wedge\vec{v})=\nabla(\nabla\cdot\vec{v})-\nabla^2\vec{v}\,, \tag{2.64}$$

$$\nabla \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \nabla \wedge (\dot{\vec{a}} \wedge \vec{b}) - \nabla \wedge (\dot{\vec{b}} \wedge \vec{a}) = (\vec{b} \cdot \nabla)\vec{a} - (\nabla \cdot \vec{a})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \nabla)\vec{b} + \vec{a}(\nabla \cdot \vec{b})\,, \quad (2.65)$$

$$\nabla(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\nabla \vec{a}) \cdot \vec{b} + (\nabla \vec{b}) \cdot \vec{a} = \vec{a} \wedge (\nabla \wedge \vec{b}) + \vec{b} \wedge (\nabla \wedge \vec{a}) + (\vec{a} \cdot \nabla)\vec{b} + (\vec{b} \cdot \nabla)\vec{a}\,. \quad (2.66)$$

Otras identidades que involucran al vector posición $\vec{x}$ son:

$$\nabla \vec{x} = \overline{\overline{I}}\,, \quad (2.67)$$

$$\nabla \cdot \vec{x} = 3\,, \quad (2.68)$$

$$\nabla \wedge \vec{x} = 0\,, \quad (2.69)$$

$$\nabla r = \vec{x}/r\,, \quad (2.70)$$

$$\nabla(\vec{x}/r) = (\overline{\overline{I}} - \vec{x}\vec{x})/r \quad , \quad (2.71)$$

donde $\overline{\overline{I}}$ es el tensor unidad y $r \equiv |\vec{x}|$ es la distancia al origen de coordenadas.

Por último, se incluyen algunas operaciones que involucran a un tensor de segundo orden $\overline{\overline{T}}$. Ya definimos anteriormente [ecuación (1.13)] el vector $\nabla \cdot \overline{\overline{T}}$. De forma análoga se puede definir el tensor de segundo orden

$$\nabla \wedge \overline{\overline{T}} \equiv \vec{e}_i \wedge \frac{1}{h_i}\frac{\partial}{\partial i}(T_{jk}\vec{e}_j\vec{e}_k) \quad \left(= \epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}T_{kl}\vec{e}_i\vec{e}_l\right)\,, \quad (2.72)$$

y el tensor de tercer orden

$$\nabla\overline{\overline{T}} \equiv \frac{\vec{e}_i}{h_i}\frac{\partial}{\partial i}(T_{jk}\vec{e}_j\vec{e}_k) \quad \left(= \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_i}\vec{e}_i\vec{e}_j\vec{e}_k\right)\,, \quad (2.73)$$

donde entre paréntesis se ha incluido la correspondiente expresión en coordenadas cartesianas, siendo ϵ_{ijk} el tensor de Levi-Civita ($\epsilon_{ijk} = 0$ si alguno de los tres subíndices se repite, $\epsilon_{ijk} = +1$ si la permutación ijk es par en relación a 123 y $\epsilon_{ijk} = -1$ si es impar). Operaciones en donde interviene el producto escalar de un vector y un tensor son, por ejemplo,

$$\nabla \cdot (\vec{v} \cdot \overline{\overline{T}}) = \nabla\vec{v} : \overline{\overline{T}} + (\nabla \cdot \overline{\overline{T}}^{\,T}) \cdot \vec{v}\,, \quad (2.74)$$

$$\nabla \wedge (\vec{v} \cdot \overline{\overline{T}}) = \nabla\vec{v}\dot{\wedge}\overline{\overline{T}}^{\,T} + \vec{v} \cdot (\nabla \wedge \overline{\overline{T}})^T\,, \quad (2.75)$$

$$\nabla(\vec{v} \cdot \overline{\overline{T}}) = \nabla\vec{v} \cdot \overline{\overline{T}} + \nabla\overline{\overline{T}}^{\,T} \cdot \vec{v}\,, \quad (2.76)$$

donde los dos puntos denotan el doble producto escalar de dos tensores ($\overline{\overline{A}} : \overline{\overline{B}} = A_{ij}B_{ij}$), $\overline{\overline{A}}\dot{\wedge}\overline{\overline{B}}$ significa que el primer componente de ambos tensores se multiplica escalarmente y el segundo vectorialmente (en coordenadas cartesianas, el componente i de este vector sería $\epsilon_{ijk}A_{lj}B_{lk}$), y el superíndice T significa tensor transpuesto.

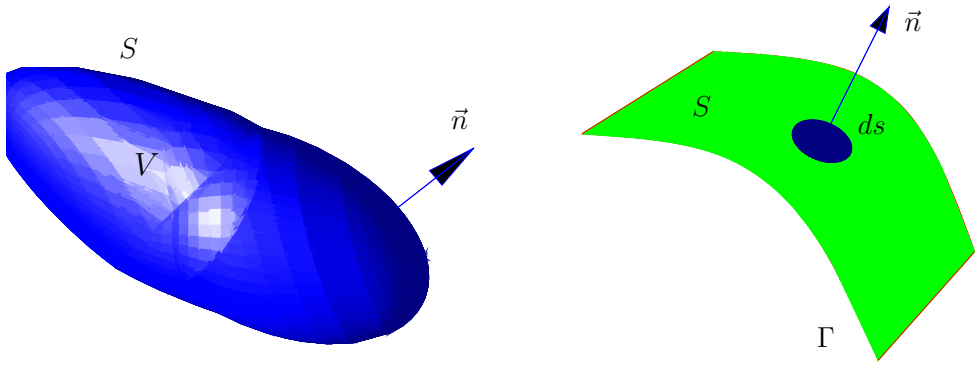


Figura 2.7

2.4. Teoremas integrales

Sea S una superficie cerrada que contiene un volumen V y $\vec{v}$ un campo vectorial definido en él. El Teorema de Gauss (o de la divergencia) nos dice que el *flujo* de $\vec{v}$ a través de S es igual a la integral en V de la divergencia de $\vec{v}$:

$$\int_S d\vec{s}\cdot\vec{v} = \int_V dV \nabla\cdot\vec{v}\,, \tag{2.77}$$

donde $d\vec{s} = ds\vec{n}$, siendo $\vec{n}$ el vector unitario normal a la superficie (hacia fuera) y ds es el elemento diferencial de superficie. Este teorema nos proporciona una segunda definición de la divergencia de un vector:

$$\nabla\cdot\vec{v} \equiv \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\int_{S(V)} d\vec{s}\cdot\vec{v}\,, \tag{2.78}$$

donde el volumen V está definido en el entorno del punto en que se calcula $\nabla\cdot\vec{v}$. Esta definición será muy útil cuando interpretemos físicamente la divergencia de ciertos campos vectoriales.

Del teorema de Gauss se pueden deducir las siguientes relaciones:

$$\int_S d\vec{s}\phi = \int_V dV\nabla\phi\,, \tag{2.79}$$

$$\int_S d\vec{s}\,\vec{v} = \int_V dV\nabla\vec{v}\,, \tag{2.80}$$

$$\int_S d\vec{s}\,\overline{\overline{T}} = \int_V dV\nabla\overline{\overline{T}}\,, \tag{2.81}$$

$$\int_S d\vec{s}\wedge\vec{v} = \int_V dV\nabla\wedge\vec{v}\,, \tag{2.82}$$

etc. En general, estas expresiones se pueden resumir en:

$$\int_S d\vec{s} \ldots = \int_V dV \nabla \ldots . \tag{2.83}$$

Un caso particular bastante importante es el denominado (primer) Teorema de Green:

$$\int_V dV[\psi\nabla^2\phi - \phi\nabla^2\psi] = \int_V dV \nabla \cdot [\psi\nabla\phi - \phi\nabla\psi]$$

$$= \int_S d\vec{s} \cdot [\psi\nabla\phi - \phi\nabla\psi] = \int_S ds \left[\psi\frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right], \tag{2.84}$$

donde $\partial/\partial n$ es la derivada en la dirección normal a la superficie.

Un segundo grupo de teoremas integrales de uso común en la Mecánica de Fluidos está encabezado por el Teorema de Stokes, que nos dice que la circulación de un vector $\vec{v}$ a lo largo de una línea cerrada Γ es igual a la integral del rotacional de $\vec{v}$ sobre una superficie S que se apoya en Γ:

$$\int_\Gamma d\vec{l} \cdot \vec{v} = \int_S d\vec{s} \cdot (\nabla \wedge \vec{v}), \tag{2.85}$$

donde $d\vec{l}$ es el diferencial de longitud siguiendo la dirección de la curva. Consecuencia de este teorema son:

$$\int_\Gamma d\vec{l}\phi = \int_S d\vec{s} \wedge \nabla\phi \quad , \tag{2.86}$$

$$\int_\Gamma d\vec{l}\,\vec{v} = \int_S d\vec{s} \wedge \nabla\vec{v}, \tag{2.87}$$

$$\int_\Gamma d\vec{l}\,\overline{\overline{T}} = \int_S d\vec{s} \wedge \nabla\overline{\overline{T}}, \tag{2.88}$$

$$\int_\Gamma d\vec{l} \wedge \vec{v} = \int_S (d\vec{s} \wedge \nabla) \wedge \vec{v}, \tag{2.89}$$

etc. En general,

$$\int_\Gamma d\vec{l} \ldots = \int_S (d\vec{s} \wedge \nabla) \ldots . \tag{2.90}$$

Obsérvese que $d\vec{s} \cdot \nabla \wedge \vec{v} = (d\vec{s} \wedge \nabla) \cdot \vec{v}$, por lo que el teorema original de Stokes (2.85) se puede escribir también en la notación general (2.90).

Por último, un tercer grupo de teoremas integrales, los Teoremas de Transporte de Reynolds, que constituyen una generalización al espacio tridimensional de la fórmula de Leibnitz

$$\frac{d}{dt}\int_{x=a(t)}^{x=b(t)} f(x,t)dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}dx + \frac{db}{dt}f(x=b,t) - \frac{da}{dt}f(x=a,t) \tag{2.91}$$

será considerado con más detalles en el capítulo 5.

Referencias y bibliografía complementaria.[1]

- R. ARIS, 1989. Capítulos 2 y 3.
- D.E. BOURNE y P.C. KENDALL, 1992.
- E. BUTKOV, 1968. Capítulos 1 y 16.
- L.M. MILNE-THOMSON, 1996. Capítulo II.
- M. RAHMAN y I. MULOLANI, 2008.
- L.A. SEGEL, 1987. Parte A.

[1] Ver *Bibliografía* al final.

TEMA II:
Cinemática del movimiento fluido

CAPÍTULO 3

Descripción del campo fluido

3.1. Descripción Lagrangiana y Euleriana

Esta lección y la siguiente están dedicadas a definir una serie de conceptos y presentar algunos resultados necesarios para la descripción del movimiento, o cinemática, de los fluidos.

Hay dos formas de describir el movimiento de un fluido. La primera, llamada **descripción Lagrangiana** (o de Lagrange), se basa en seguir la evolución de cada partícula fluida individual a lo largo del tiempo. Así, dada una partícula fluida que en un cierto instante t_0 $(= 0)$ estaba en un punto $\vec{x}_0$, se define la trayectoria como la posición de esa partícula fluida en instantes posteriores $t > t_0$:

$$\vec{x} = \vec{x}(\vec{x}_0, t)\,. \tag{3.1}$$

La velocidad y aceleración de esa partícula fluida en cualquier instante t se definen mediante

$$\vec{v}(\vec{x}_0, t) = \frac{\partial \vec{x}}{\partial t}\,, \quad \vec{a}(\vec{x}_0, t) = \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial t^2}\,. \tag{3.2}$$

El movimiento del fluido queda especificado si se conocen todas las trayectorias, es decir, $\vec{x}(\vec{x}_0, t)$ para todo $\vec{x}_0$. Como se ve, la descripción Lagrangiana utiliza conceptos propios de la mecánica de partículas para describrir un medio continuo, por lo que no es aconsejable en la mayoría de las situaciones debido a la complejidad de las ecuaciones a que da lugar.

La otra descripción, más acorde con una teoría de medios continuos, es la **descripción Euleriana** (o de Euler), en la cual la magnitud fundamental es el campo vectorial de la velocidad local del fluido $\vec{v}(\vec{x}, t)$. Esta descripción de Euler es la que normalmente se usa en la Mecánica de Fluidos y es la que se utilizará a lo largo del curso. A partir del campo de velocidad definiremos a continuación algunos conceptos cinemáticos como aceleración, trayectorias, etc.

Una de las ventajas de la descripción Euleriana es que en ella determinados movimientos fluidos *pueden* ser descritos en forma estacionaria si se elige apropiadamente el sistema coordenado de referencia, mientras que la descripción Lagrangiana es intrínsecamente no estacionaria en cualquier sistema de referencia. De esta manera, en ciertos movimientos fluidos una de las variables independientes, el tiempo, desaparece, simplificando la formulación si se utiliza la descripción Euleriana, mientras que en la descripción Lagrangiana el tiempo siempre está presente explícitamente.

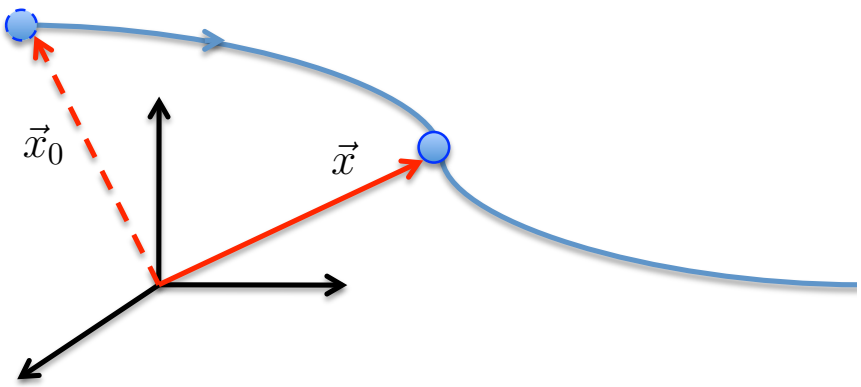


Figura 3.1: Trayectoria.

3.2. Trayectorias

Una trayectoria es la línea descrita por una partícula fluida en su movimiento. Matemáticamente, en función del campo de velocidad $\vec{v}(\vec{x},t)$, se define

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x},t)\,, \quad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0\,, \tag{3.3}$$

que proporciona la trayectoria

$$\vec{x} = \vec{x}(t;\vec{x}_0,t_0)\,. \tag{3.4}$$

Eliminando el tiempo t en la expresión anterior, se obtiene una curva *fija* en el espacio que se suele denominar **senda** de la partícula fluida que inicialmente ($t = t_0$) estaba en $\vec{x}_0$ (normalmente se toma $t_0 = 0$ ya que no añade nada a la definición anterior).

Las partículas fluidas que inicialmente estaban en una cierta línea $\vec{x}_0(\lambda)$, donde λ es un parámetro, seguirán formando una línea en un instante cualquiera t [si el campo $\vec{v}(\vec{x},t)$ es continuo] que se denomina **línea fluida**. De forma análoga, las partículas que inicialmente estaban en una superficie $\vec{x}(\alpha,\beta)$, formarán una **superficie fluida**. Para obtener matemáticamente la ecuación de esta superficie en el tiempo no hay más que eliminar los parámetros α y β en la ecuación $\vec{x} = \vec{x}[t;\vec{x}_0(\alpha,\beta)]$. Si la superficie inicial es cerrada, la superficie fluida permanecerá cerrada, y el volumen contenido en ella se denomina **volumen fluido**.

3.3. Líneas de corriente

La línea de corriente que pasa por un determinado punto $\vec{x}_0$ en un instante t se define como la línea que en ese instante es paralela a $\vec{v}(\vec{x},t)$ en todos sus puntos. Es decir,

$$\frac{d\vec{x}}{d\lambda} = \vec{v}(\vec{x},t)\,, \quad \vec{x}(\lambda = 0) = \vec{x}_0\,. \tag{3.5}$$

El parámetro λ en $\vec{x} = \vec{x}(\lambda;\vec{x}_0,t)$ define la línea de corriente deseada. Obviamente, si el movimiento es estacionario, $\vec{v} = \vec{v}(\vec{x})$, la línea de corriente que pasa por un punto $\vec{x}_0$ coincide

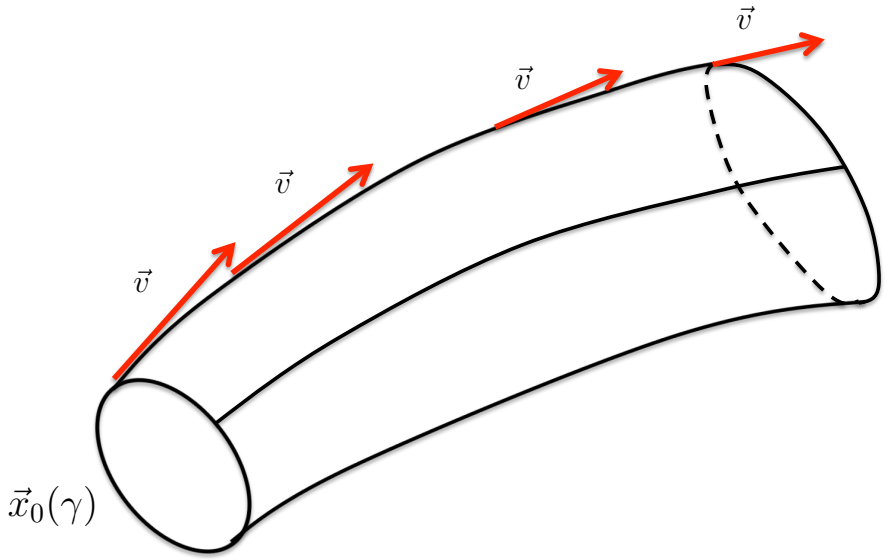


Figura 3.2: Tubo de corriente.

con la senda de todas las partículas fluidas que pasan por ese punto. Si el movimiento es no estacionario, diferentes partículas fluidas que en tiempos distintos pasan por $\vec{x}_0$ describen distintas trayectorias; como $\vec{v}$ varía, en general, en todos los puntos con el tiempo, ninguna de las sendas tiene por qué coincidir con la línea de corriente que pasa por ese punto (que por supuesto, también depende del tiempo).

La diferencia entre senda y línea de corriente que pasa por un punto en un movimiento no estacionario se apreciará mejor con el ejemplo descrito en el ejercicio del final de esta lección y en la práctica con material multimedia 'kinematics'. Desde un punto de vista experimental, las líneas de corriente instantáneas se obtienen con la técnica denominada PIV (de las siglas de su denominación en inglés 'Particle Image Velocimetry'), descrita en el material multimedia mencionado.

Otra forma de describir matemáticamente las líneas de corriente es [en coordenadas cartesianas (x_1, x_2, x_3)]:

$$\frac{dx_1}{v_1(\vec{x},t)} = \frac{dx_2}{v_2(\vec{x},t)} = \frac{dx_3}{v_3(\vec{x},t)}\,, \tag{3.6}$$

en la cual no aparece el parámetro λ. Estas dos ecuaciones diferenciales proporcionan dos superficies cuya intersección es la línea de corriente.

Una **superficie de corriente** es aquella formada por las líneas de corriente que se apoyan en una cierta curva $\vec{x}_0(\gamma)$, donde γ es un parámetro. Si la curva $\vec{x}_0(\gamma)$ es cerrada, tenemos lo que se llama un **tubo de corriente**, el cual no puede ser atravesado por el fluido (ya que ello implicaría que un mismo punto tiene al menos dos velocidades distintas). Las líneas de corriente no pueden intersectar unas con otras, salvo en los puntos donde la velocidad es nula. Por ello la localización de los puntos de velocidad cero, llamados **puntos de remanso**, es tan importante para describrir el movimiento de un fluido.

3.4. Traza

Es la línea formada por todas las partículas fluidas que en un instante cualquiera pasaron por un punto $\vec{x}_0$. Matemáticamente:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x}, t)\,, \quad \vec{x}(t = \tau) = \vec{x}_0 \quad ; \tag{3.7}$$

eliminando τ en $\vec{x} = \vec{x}(\tau; \vec{x}_0, t)$ se obtiene la traza que pasa por $\vec{x}_0$, que, obviamente, depende del tiempo. Si el movimiento es estacionario, senda, línea de corriente y traza por un punto dado coinciden. Físicamente la traza por un cierto punto se puede visualizar inyectando tinta u otro colorante en dicho punto: las distintas partículas fluidas que van pasando por ese punto se impregnan de tinta y van describiendo una línea (que en general dependerá del tiempo) que es la traza. Si el movimiento no es estacionario, esta traza no tiene por qué coincidir con ninguna de las trayectorias de las partículas fluidas que pasan por ese punto, ni con ninguna de las líneas de corriente que en cada instante pasan por ese punto (ver Fig. 3.3, ejercicio al final de esta lección y material multimedia). Ésta representa la principal dificultad que entraña la interpretación de la visualización de un movimiento fluido no estacionario.

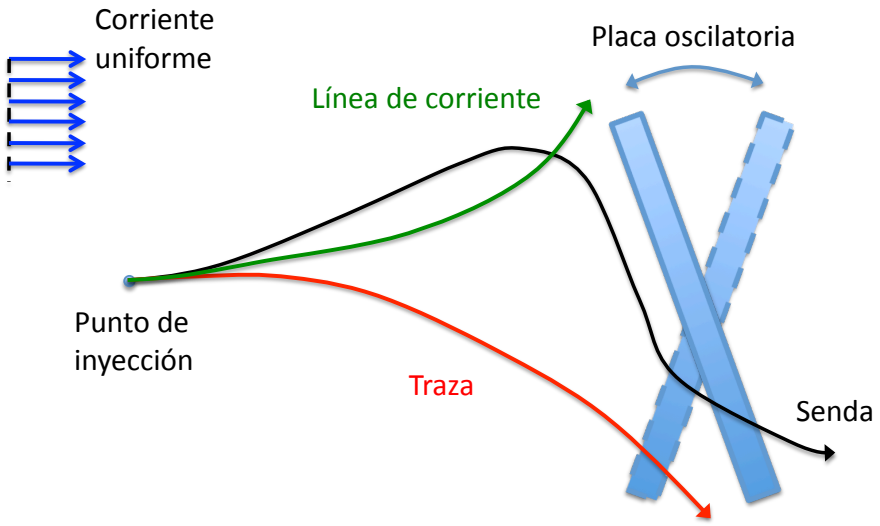


Figura 3.3: Esquema de las diferencias entre traza, línea de corriente y senda en un instante t de un movimiento no estacionario originado por la oscilación de una placa en una corriente uniforme.

3.5. Derivada sustancial. Aceleración

Una magnitud fluida en un punto $\vec{x}$ fijo en el espacio (en un sistema de referencia dado) varía con el tiempo no solo porque el movimiento del fluido sea no estacionario, $\vec{v} = \vec{v}(\vec{x}, t)$, sino también porque distintas partículas fluidas pasan por el punto $\vec{x}$ en diferentes tiempos. Por ello, cuando se desea calcular la variación con respecto al tiempo de una magnitud fluida (escrita según la descripción Euleriana) en un punto $\vec{x}$ y en un instante t, pero para un observador que se mueve con el fluido *(observador Lagrangiano),* lo que obtenemos no es

simplemente $\partial/\partial t$, sino algo más *complejo* que se denomina derivada sustancial. Este es el *precio* que hay que pagar por utilizar la descripción Euleriana y hacer uso de ecuaciones de conservación (de masa, cantidad de movimiento y energía; ver lección 5) que, como veremos, se cumplen siguiendo las partículas fluidas.

Sea $\phi(\vec{x}, t)$ una magnitud fluida escalar cualquiera (por ejemplo, la densidad, la temperatura, etc.). La variación de ϕ para un observador que se mueve con una partícula fluida es

$$\delta\phi = \phi(\vec{x} + \delta\vec{x}, t + \delta t) - \phi(\vec{x}, t) = \delta\vec{x} \cdot \nabla\phi + \frac{\partial\phi}{\partial t}\delta t + O(|\delta\vec{x}|^2, \delta t^2)\,. \tag{3.8}$$

Cuando $\delta t \to 0$, se tiene

$$\frac{\delta\phi}{\delta t} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\delta\vec{x}}{\delta t} \cdot \nabla\phi\,. \tag{3.9}$$

Luego, la derivada sustancial, también llamada material, de ϕ, se define:

$$\frac{D\phi}{Dt} \equiv \frac{\partial\phi}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\phi \quad \left(\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla\right)\,. \tag{3.10}$$

El primer término representa la derivada local y tiene en cuenta la no estacionariedad del campo fluido; el segundo término es la derivada convectiva y representa la variación de ϕ debido al movimiento del fluido en el entorno del punto considerado.

Una derivada convectiva que se utilizará muy a menudo es la de la velocidad, la cual representa la **aceleración** siguiendo la partícula fluida (es decir, la aceleración en la descripción Euleriana pero para un observador Lagrangiano):

$$\vec{a} \equiv \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}\,. \tag{3.11}$$

El primer término es la aceleración local y el segundo la aceleración convectiva, que también se puede escribir como $(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = \nabla(v^2/2) - \vec{v} \wedge (\nabla \wedge \vec{v})$ [ver ecuación (2.62)]. Obsérvese que, en general, $(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} \neq \vec{v} \cdot (\nabla\vec{v})$ [ver ecuación (2.36)]; en coordenadas cartesianas esos dos vectores sí son iguales.

En el material audiovisual se verá de forma gráfica la interpretación física de la derivada sustancial, tanto aplicada a una magnitud escalar como a una magnitud vectorial.

3.6. Circulación. Vorticidad. Flujos irrotacionales. Potencial de velocidad

La circulación a lo largo de una línea L se define

$$\Gamma \equiv \int_L \vec{v} \cdot d\vec{l}\,. \tag{3.12}$$

Si la curva L es cerrada, el teorema de Stokes nos dice que la circulación es igual al flujo de $\nabla \wedge \vec{v}$ sobre cualquier superficie S que se apoye en L:

$$\Gamma = \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_S d\vec{s} \cdot (\nabla \wedge \vec{v})\,, \tag{3.13}$$

donde $d\vec{s} = \vec{n}ds$. El vector

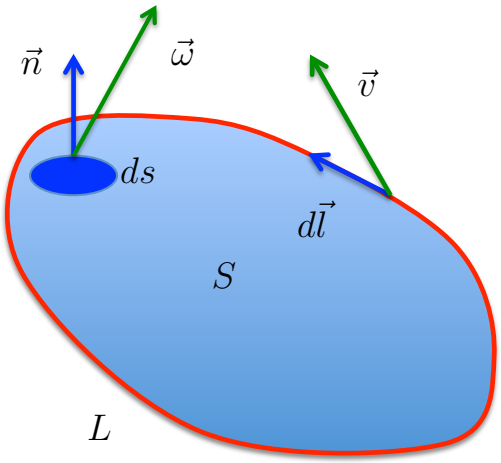


Figura 3.4

$$\vec{\omega} \equiv \nabla \wedge \vec{v} \tag{3.14}$$

se denomina **vorticidad**. Como se verá en la próxima lección, $\vec{\omega}$ es una medida de la rotación local del flujo. Un flujo se denomina **irrotacional** (más estrictamente, un campo de velocidad $\vec{v}$ es irrotacional) si $\vec{\omega}$ es cero. Claramente, si un flujo deriva de un potencial, es decir, si existe una función escalar ϕ tal que

$$\vec{v} = \nabla\phi\,, \tag{3.15}$$

el flujo es irrotacional ya que $\nabla \wedge \nabla\phi \equiv 0$ para cualquier función escalar ϕ. La función ϕ en (3.15) se suele denominar **potencial de velocidad**, y un flujo definido de acuerdo con esa ecuación se denomina potencial. El inverso también es cierto: si un flujo es irrotacional, es también potencial. Esto sigue directamente del teorema de Stokes: si $\nabla \wedge \vec{v} = 0$ en todo el campo fluido,

$$\oint_L \vec{v} \cdot d\vec{l} = 0 \tag{3.16}$$

para cualquier curva cerrada L; esto implica que la integral de $\vec{v}$ entre dos puntos cualesquiera del espacio no depende del camino que elijamos para llegar de un punto a otro, por lo que podemos definir la función

$$\phi(\vec{x}) \equiv \int_0^P \vec{v} \cdot d\vec{l} \tag{3.17}$$

donde P es un punto genérico de vector posición $\vec{x}$, siendo la integral independiente del camino elegido para llegar desde el origen de coordenadas al punto P. Por otra parte,

$$\phi(\vec{x}_1) - \phi(\vec{x}_2) = \int_0^{P_1} \vec{v} \cdot d\vec{l} - \int_0^{P_2} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_{P_2}^{P_1} \vec{v} \cdot d\vec{l}\,. \tag{3.18}$$

En particular, si elegimos un elemento diferencial a lo largo del eje x,

$$\phi(x+dx,y,z)-\phi(x,y,z)=\int_x^{x+dx} v_x(\xi,y,z)d\xi = dx\, v_x(x+\theta dx,y,z)\;, \tag{3.19}$$

siendo $0\leq\theta\leq 1$. En el límite $dx\to 0$,

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=v_x(x,y,z)\,. \tag{3.20}$$

Análogamente se demostraría para los componentes y,z. Obsérvese que el potencial ϕ queda fijado salvo una constante aditiva, que es irrelevante para el campo de velocidad.

En definitiva, tenemos que un **flujo irrotacional** o **potencial** se puede caracterizar por cualquiera de las tres propiedades equivalentes siguientes:

(a) $\nabla\wedge\vec{v}\equiv 0$;

(b) $\oint_L \vec{v}\cdot d\vec{l}\equiv 0$ para cualquier curva cerrada L, y

(c) $\vec{v}\equiv\nabla\phi$.

Téngase en cuenta que la equivalencia entre (a) y (b) está sujeta a las premisas del teorema de Stokes. Así, en el supuesto de que el campo $\vec{v}$ sea continuo y con derivadas continuas, (b) siempre implica (a), pero para que (a) implique (b) la curva cerrada L tiene que ser simplemente conexa. Más adelante se verá un importante teorema relacionado con los movimientos irrotacionales (Teorema de la Circulación de Kelvin) que dice, *a grosso modo,* que si un flujo ideal (no viscoso) es inicialmente irrotacional, permanece indefinidamente irrotacional. De esta manera el concepto matemático de flujo irrotacional está relacionado con el concepto físico de flujo ideal.

3.7. Flujos solenoidales o incompresibles. Función de corriente

Otro tipo de flujos son los llamados **solenoidales** (estrictamente, campo de velocidad $\vec{v}$ solenoidal), que verifican:

$$\nabla\cdot\vec{v}=0\,. \tag{3.21}$$

Si $\vec{v}$ se puede escribir como

$$\vec{v}=\nabla\wedge\vec{\psi}\,, \tag{3.22}$$

donde $\vec{\psi}$ es un campo vectorial (que se suele denominar **potencial vector**), está claro que $\vec{v}$ es solenoidal, de acuerdo con la identidad $\nabla\cdot(\nabla\wedge\vec{\psi})\equiv 0$. Análogamente a los flujos irrotacionales, el inverso también es cierto: si $\nabla\cdot\vec{v}=0$, existe un vector $\vec{\psi}$ tal que $\vec{v}=\nabla\wedge\vec{\psi}$, cumpliéndose, además, que $\vec{\psi}$ es también solenoidal, $\nabla\cdot\vec{\psi}=0$ (la demostración no se dará aquí para no desviar más la atención sobre aspectos puramente matemáticos; el alumno interesado puede consultar, por ejemplo, Aris, 1989, sección 3.43).

Por el Teorema de Gauss (2.77), un movimiento solenoidal también verifica que el flujo a través de cualquier superficie cerrada es nulo,

$$\int_S \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_V \nabla \cdot \vec{v} dV = 0\,. \tag{3.23}$$

Así, tenemos las tres siguientes propiedades para caracterizar un campo de velocidad solenoidal:

(a) $\nabla \cdot \vec{v} = 0$;

(b) $\vec{v} \equiv \nabla \wedge \vec{\psi}, \nabla \cdot \vec{\psi} = 0$, y

(c) $\int_S \vec{v} \cdot d\vec{s} = 0$, para cualquier superficie cerrada S.

Conviene recordar aquí que todo campo vectorial $\vec{v}$ se puede descomponer en la forma (representación de Helmholtz):

$$\vec{v} = \nabla\phi + \nabla \wedge \vec{\psi}\,, \quad \nabla \cdot \vec{\psi} = 0\,, \tag{3.24}$$

es decir, una parte irrotacional y otra solenoidal (para su demostración ver, por ejemplo, Sommerfeld, 1950, sección 20). Sin embargo, esta representación, tan usada en Electromagnetismo, es poco usada en Mecánica de Fluidos.

Se verá en las lecciones siguientes que un campo de velocidad solenoidal, $\nabla \cdot \vec{v} = 0$, corresponde a un movimiento incompresible. Es decir, a un movimiento en el que el volumen de las partículas fluidas no cambia y, por tanto, la densidad ρ permanece constante. Aunque la mayoría de los movimientos de líquidos, y una gran parte de los de gases (ver sección 9.2), pueden considerarse incompresibles, el potencial vector, en contraste con el potencial de velocidad ϕ, no se suele emplear en la Mecánica de Fluidos, ya que desde un punto de vista matemático se reemplaza un vector ($\vec{v}$) por otro ($\vec{\psi}$). Solo en movimientos solenoidales (o incompresibles) bidimensionales tiene utilidad, pues en este caso el potencial vector tiene una sola componente perpendicular al plano del movimiento, $\vec{\psi} \equiv \psi\vec{n}$, donde $\vec{n}$ es el vector unitario normal a la superficie del movimiento, y ψ es la llamada **función de corriente.** Esta función de corriente sí que es de gran utilidad en la descripción de los movimientos incompresibles bidimensionales, pues aparte de reducir la descripción del movimiento fluido de dos componentes de la velocidad a una sola función escalar, proporciona las líneas de corriente (de aquí su nombre).

Por ejemplo, en un movimiento que en coordenadas cartesianas se desarrolla en el plano (x, y), $\vec{v} = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y$, la función de corriente vendría dada por

$$\vec{v} = \nabla \wedge \psi\vec{e}_z\,, \tag{3.25}$$

es decir,

$$v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}\,, \quad v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}\,, \tag{3.26}$$

que cumple identicamente la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \tag{3.27}$$

en virtud de la igualdad de las derivadas cruzadas. Las curvas ψ = constante representan líneas de corriente:

$$d\psi \equiv \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy = -v_y dx + v_x dy\,,$$

$$d\psi = 0\,, \quad \frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}\,. \tag{3.28}$$

Otros flujos incompresibles y bidimensionales no planos también admiten función de corriente, ya que lo único que se necesita es que el potencial vector tenga una sola componente en algún sistema ortogonal de coordenadas. Sin embargo, lo más conveniente para hallar la función de corriente es escribir la ecuación de continuidad $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ en las coordenadas correspondientes y *construir* la función de corriente que satisfaga idénticamente esa ecuación teniendo en cuenta la igualdad de las derivadas cruzadas. Por ejemplo, el flujo incompresible y axilsimétrico con sólo dos componentes de la velocidad, v_r y v_θ, tiene por ecuación de continuidad en coordenadas cilíndricas (r, θ, z)

$$\frac{1}{r}\frac{\partial r v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0\,. \tag{3.29}$$

Claramente, si definimos ψ mediante

$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\,, \quad v_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r}\,, \tag{3.30}$$

la ecuación (3.29) se satisface idénticamente. La elección de la función de corriente en este caso no es única. Otros ejemplos en coordenadas cilíndricas y esféricas se verán en los ejercicios y en las lecciones siguientes.

3.8. Ejercicio de trayectorias, líneas de corrientes y trazas

El campo de velocidad de un movimiento plano viene dado, en coordenadas cilíndricas (r, θ), por

$$\vec{v} = \frac{A}{r}\vec{e}_r + \frac{B(1+at)}{r}\vec{e}_\theta\,, \tag{3.31}$$

donde A, B y a son constantes. Hallar la trayectoria, senda, línea de corriente y traza que pasan por el punto $(r_0, 0)$.

Solución.

Ecuaciones de las trayectorias:

$$\frac{dr}{dt} = v_r = \frac{A}{r}\,, \quad r\frac{d\theta}{dt} = v_\theta = \frac{B(1+at)}{r}\,. \tag{3.32}$$

La integración de la primera de estas ecuaciones, con la condición inicial $r(t=0) = r_0$, proporciona

$$r^2 = r_0^2 + 2At\,. \tag{3.33}$$

Sustituyendo esta función $r(t)$ en la segunda ecuación de (3.32),

$$\frac{d\theta}{dt} = B\frac{1+at}{r_0^2+2At}\,, \tag{3.34}$$

e integrando con la condición inicial $\theta(t=0)=0$, proporciona la segunda coordenada de las trayectorias que pasan por ese punto:

$$\theta = \frac{B}{2A}\left[at + \left(1-\frac{ar_0^2}{2A}\right)\ln\left(1+\frac{2A}{r_0^2}\,t\right)\right]\,. \tag{3.35}$$

La senda que pasa $(r_0,0)$ se obtiene, por ejemplo, despejando t de (3.33) y sustituyéndolo en (3.35):

$$\theta = \frac{B}{(2A)^2}\left[a\left(r^2-r_0^2\right)+2\left(2A-ar_0^2\right)\ln\frac{r}{r_0}\right]\,. \tag{3.36}$$

En la Figura 3.5 está dibujada esta curva para $A=B=r_0=1$ y dos valores de a, $a=1$ y $a=0$. Por cierto, para dibujarlas es preferible en este caso utilizar el tiempo como un parámetro, es decir, las expresiones de la trayectoria (3.33) y (3.35).

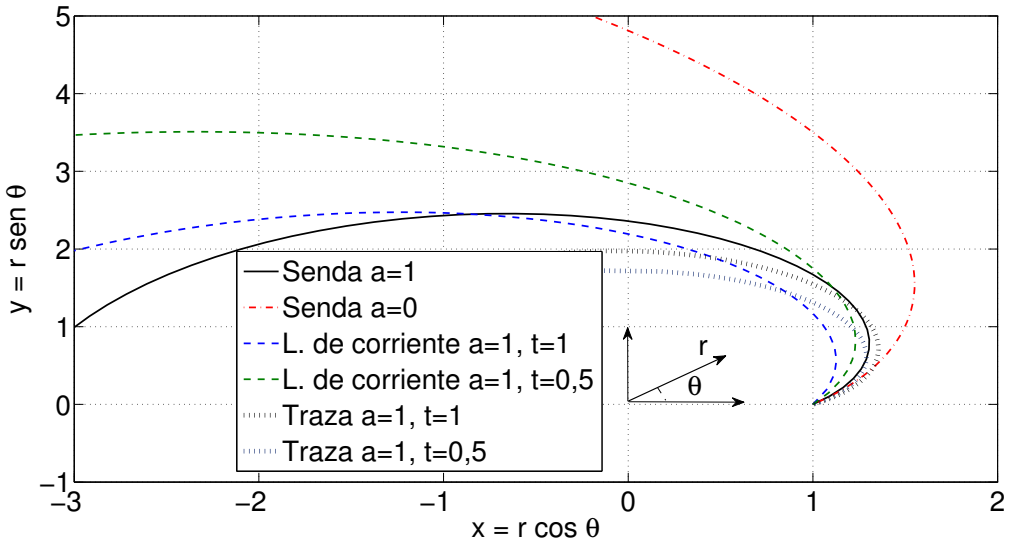


Figura 3.5: Sendas, líneas de corriente y trazas que pasan por el punto $(r=r_0=1,\theta=0)$ para $A=B=1$ y distintos valores de a y t.

Para hallar las líneas de corriente podemos hacer uso de un parámetro λ,

$$\frac{dr}{d\lambda} = v_r = \frac{A}{r}\,, \quad r\frac{d\theta}{d\lambda} = v_\theta = \frac{B(1+at)}{r}\,, \tag{3.37}$$

cuya integración con las condiciones de contorno $r(\lambda=0)=r_0, \theta(\lambda=0)=0$ proporciona

$$r^2 = r_0^2+2A\lambda\,, \quad \theta = \frac{B(1+at)}{2A}\ln\left(1+\frac{2A}{r_0^2}\,\lambda\right)\,. \tag{3.38}$$

En este caso, sin embrago, las líneas de corriente se pueden obtener fácilmente prescindiendo del parámetro λ:

$$\frac{dr}{v_r} = \frac{rd\theta}{v_\theta} \quad \rightarrow \quad \frac{rdr}{A} = \frac{r^2 d\theta}{B(1+at)}\,, \tag{3.39}$$

que integrada con la condición $r(\theta = 0) = r_0$ proporciona

$$r = r_0 \exp\left[\frac{A\theta}{B(1+at)}\right]\,. \tag{3.40}$$

Por supuesto, esta misma expresión se obtendría eliminando λ entre r y θ en (3.38). Como se puede ver, las líneas de corriente que pasan por un punto dependen del tiempo y no coinciden con la senda (3.36) para ningún instante (ver Fig. 3.5), excepto si $a = 0$, en cuyo caso el movimiento sería estacionario y ambas curvas vendrían dadas por

$$r = r_0 e^{\frac{A}{B}\theta}\,. \tag{3.41}$$

Las líneas de corriente también se podrían haber obtenido hallando previamente la función de corriente ψ, que se obtendría de las ecuaciones

$$v_r = \frac{A}{r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\,, \quad v_\theta = \frac{B(1+at)}{r} = -\frac{\partial \psi}{\partial r}\,. \tag{3.42}$$

Integrando la primera se tiene que $\psi(r,\theta) = A\theta + f(r)$, donde f es una función arbitaria de r. Sustituyendo esta expresión en la segunda ecuación se obtiene una ecuación diferencial ordinaria para f:

$$\frac{df}{dr} = -\frac{B(1+at)}{r}\,,$$

que integrada da $f = -B(1+at)\ln r +$ constante. Como la constante no aporta nada a la función de corriente (téngase en cuenta que la magnitud física es la velocidad, que se obtiene derivando la función de corriente y, por tanto, una constante aditiva no modifica el campo de velocidad), la función de corriente se escribiría

$$\psi(r,\theta;t) = A\theta - B(1+at)\ln r\,. \tag{3.43}$$

Las curvas $\psi =$ constante proporcionarían las líneas de corriente. De la expresión anterior claramente se obtiene (3.40) como la línea de corriente que pasa por el punto $(r_0, 0)$ en un instante t.

Por último, las trazas que pasan por $(r_0, 0)$ se pueden obtener en función del parámetro τ mediante las ecuaciones y condiciones iniciales

$$\frac{dr}{dt} = v_r = \frac{A}{r}\,, \quad r\frac{d\theta}{dt} = v_\theta = \frac{B(1+at)}{r}\,, \quad r(t=\tau) = r_0 \;\;, \theta(t=\tau) = 0\,. \tag{3.44}$$

$$r^2 = r_0^2 + 2A(t-\tau)\,, \quad \theta = \frac{B}{2A}\left[a(t-\tau) + \left(1 - \frac{ar_0^2}{2A}\right)\ln\frac{1+\frac{2A}{r_0^2}\,t}{1+\frac{2A}{r_0^2}\,\tau}\right]\,. \tag{3.45}$$

Eliminando τ se obtendría la forma explícita en coordenadas cilíndricas de las trazas para los distintos instantes de tiempo t. Para dibujarlas, sin embargo, en este ejemplo es preferible

utilizar el parámetro τ (ver Fig.3.5 para $t = 0{,}5$ y $t = 1$). Ninguna de las trazas que pasan por el punto $(r_0, 0)$ para los distintos instantes de tiempo coinciden entre sí, ni con las líneas de corriente ni con la senda que pasan por el mismo punto. Excepto, de nuevo, cuando $a = 1$, en cuyo caso el movimiento es estacionario.

Referencias.

- R. ARIS, 1989. Capítulo 3.
- G.K. BATCHELOR, 1967. Capítulo 2.
- G.M HOMSY, 2008.
- S.M. RICHARDSON, 1989. Capítulo 2.
- A. SOMMERFELD, 1950. Capítulos 1 y 4.

Material audiovisual sugerido:

Eulerian and Lagrangian Descriptions in Fluid Mechanics. John J. Lumley.

CAPÍTULO 4

Análisis del movimiento en el entorno de un punto

4.1. Significado del tensor gradiente de velocidad $\nabla\vec{v}$

Se apuntó al comienzo de este curso que los fluidos no presentan resistencia a la deformación (como ocurre en los sólidos elásticos), sino a la velocidad de deformación. Es por ello esencial describir con precisión la velocidad de un punto en relación a la velocidad de un punto cercano. En esta descripción juega un papel relevante el tensor gradiente de velocidad, $\nabla\vec{v}$, que pasamos a analizar.

Sean $\vec{v}$ y $\vec{v}+\delta\vec{v}$ las velocidades en dos puntos cercanos uno de otro, P y Q, con vectores de posición $\vec{x}$ y $\vec{x}+\delta\vec{x}$. La diferencia de velocidades entre los dos puntos es:

$$\delta\vec{v} = \delta\vec{x}\cdot\nabla\vec{v} + O(|\delta\vec{x}|^2)\,, \tag{4.1}$$

donde $\nabla\vec{v}$ está evaluado en el punto $P(\vec{x})$. Si $\delta\vec{x} = \delta l\vec{e}_l$, donde $\vec{e}_l$ es el vector unitario en la dirección $\vec{PQ}$, en el límite $\delta l \to 0$ se tiene

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial l} = \vec{e}_l\cdot\nabla\vec{v}\,, \tag{4.2}$$

de donde la variación de $\vec{v}$ por unidad de longitud en P en la dirección de $\vec{PQ}$ es la proyección del tensor $\nabla\vec{v}$ en la dirección $\vec{PQ}$. En particular, $\partial\vec{v}/\partial x$, $\partial\vec{v}/\partial y$, $\partial\vec{v}/\partial z$ son las variaciones de $\vec{v}$ por unidad de longitud en el punto $\vec{x}$ en las direcciones coordenadas (cartesianas) $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, y $\vec{e}_z$, respectivamente. De esta forma, conocido el gradiente de la velocidad en tres direcciones mutuamente perpendiculares, es decir, conocido el tensor $\nabla\vec{v}$, la variación de la velocidad por unidad de longitud en cualquier dirección $\vec{e}_l$ viene dada por la proyección de $\nabla\vec{v}$ en esa dirección.

4.2. Movimiento relativo de un elemento de volumen de forma arbitraria

El movimiento de cualquier elemento de volumen de un fluido se puede descomponer en tres componentes: una traslación a la velocidad de su centro de masa, una rotación como sólido rígido y una deformación, que a su vez se puede descomponer en dos partes, una deformación sin cambio de volumen y una dilatación o contracción. En esta sección se van a

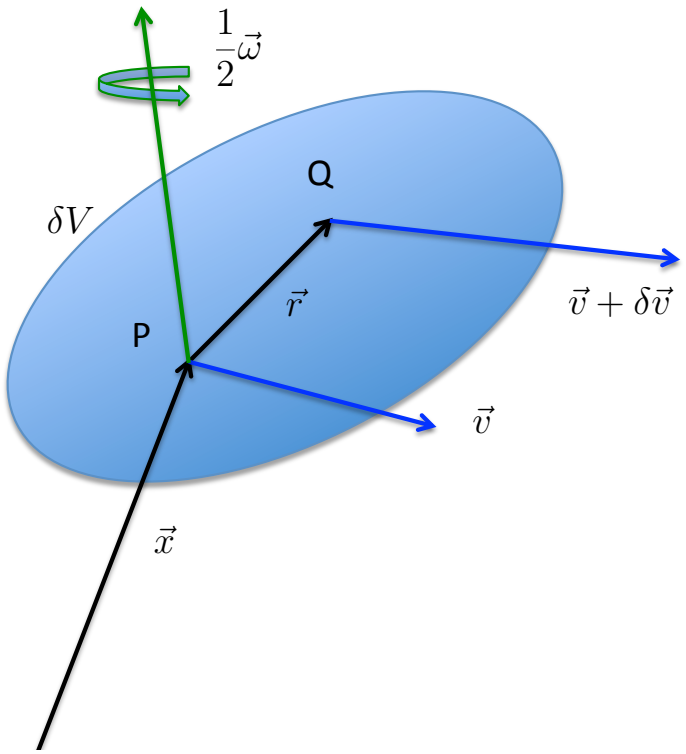


Figura 4.1: Movimiento en el entorno de un punto.

caracterizar matemáticamente estas cuatro componentes del movimiento en términos de $\nabla\vec{v}$ evaluado en un punto de referencia del elemento diferencial de volumen.

Sea P un punto (partícula fluida) con vector posición $\vec{x}$ en el interior de un cierto volumen δV pequeño y Q un punto cercano, también dentro de δV, de coordenadas $\vec{x}+\delta\vec{x}$; por simplicidad escribiremos $\vec{r}\equiv\delta\vec{x}$, siendo $|\vec{r}|$ pequeño. Si la velocidad de P en el instante t es $\vec{v}$, la del punto Q será $\vec{v}+\delta\vec{v}$, donde

$$\delta\vec{v}=\vec{r}\cdot\nabla\vec{v}+O(|\vec{r}|^2) \tag{4.3}$$

es la velocidad relativa de Q respecto a P en el instante t. Por consiguiente, si δV es pequeño, es suficiente con evaluar $\nabla\vec{v}$ para conocer, con errores del orden de $(\delta V)^{2/3}$ (es decir, del orden de r^2), la velocidad relativa de cualquier punto del volumen δV en relación a la velocidad de P. La expresión anterior se suele escribir en la forma

$$\delta\vec{v}=\vec{r}\cdot\overline{\overline{\xi}}+\vec{r}\cdot\overline{\overline{\gamma}}\,, \tag{4.4}$$

donde

$$\overline{\overline{\xi}}=\frac{1}{2}[\nabla\vec{v}-(\nabla\vec{v})^T]\,,\overline{\overline{\gamma}}=\frac{1}{2}[\nabla\vec{v}+(\nabla\vec{v})^T]\,, \tag{4.5}$$

son las partes antisimétricas y simétricas del tensor $\nabla\vec{v}$, respectivamente [ver (2.21); $(\nabla\vec{v})^T$ denota el tensor transpuesto de $\nabla\vec{v}$]. De hecho, la descomposición anterior es equivalente a la representación de Helmholtz de $\vec{v}$ [ecuación (3.24)]:

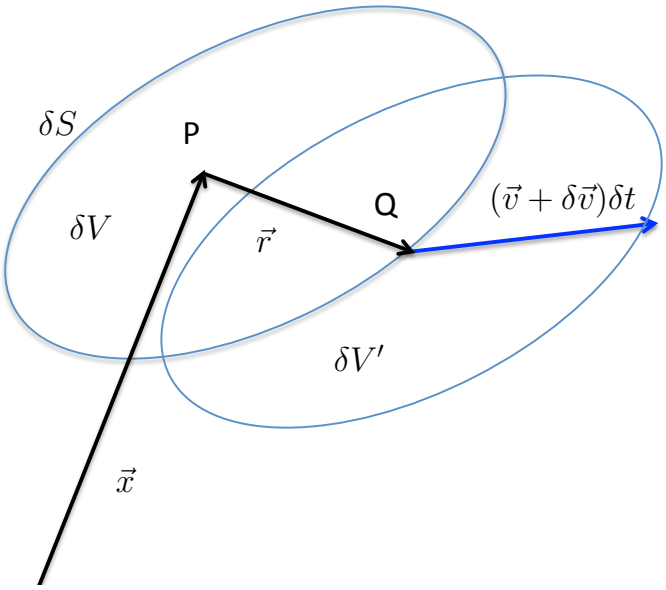


Figura 4.2: Cambio unitario de volumen.

$$\nabla\vec{v} = \nabla(\nabla \wedge \vec{\psi} + \nabla\phi)\,, \tag{4.6}$$

siendo el primer término un tensor antisimétrico (de traza nula, $\nabla \cdot \nabla \wedge \vec{\psi} = 0$) y el segundo un tensor simétrico. Sin embargo, el usar ϕ y $\vec{\psi}$ en vez de $\vec{v}$ no introduce ninguna ventaja.

El tensor antisimétrico $\overline{\overline{\xi}}$ tiene, por supuesto, traza nula ($\xi_{ii} = 0$) y verifica $\xi_{ij} = -\xi_{ji}$. El término $\vec{r} \cdot \overline{\overline{\xi}}$ se puede escribir como

$$\vec{r} \cdot \overline{\overline{\xi}} = \frac{1}{2}\vec{r} \cdot [\nabla\vec{v} - (\nabla\vec{v})^T] = \frac{1}{2}[(\vec{r} \cdot \nabla)\vec{v} - (\nabla\vec{v}) \cdot \vec{r}] = \frac{1}{2}(\nabla \wedge \vec{v}) \wedge \vec{r} = \frac{1}{2}\vec{\omega} \wedge \vec{r}, \tag{4.7}$$

donde $\vec{\omega}$ es la vorticidad. Por tanto, $\vec{r} \cdot \overline{\overline{\xi}}$ representa una rotación de $\vec{PQ}$ alrededor de P con velocidad angular $\vec{\omega}/2 = (\nabla \wedge \vec{v})/2$. Como el punto Q se ha elegido arbitrariamente en δV, el primer término de (4.4), $\vec{r} \cdot \overline{\overline{\xi}}$, representa una **rotación como sólido rígido** del volumen δV alrededor de P con velocidad angular $\vec{\omega}/2$.

Examinemos ahora el significado del segundo término de (4.4), $\vec{r} \cdot \overline{\overline{\gamma}}$. En primer lugar vamos a demostrar que la traza de $\nabla\vec{v}$, que coincide con la traza de $\overline{\overline{\gamma}}$ al ser nula la traza de $\overline{\overline{\xi}}$ [traza$(\nabla\vec{v})$ = traza $(\overline{\overline{\gamma}}) = \nabla \cdot \vec{v}$], representa un cambio unitario de volumen. En efecto, el cambio unitario de δV debido al momento del fluido se puede escribir como

$$\frac{1}{\delta V}\frac{d\delta V}{dt} = \frac{1}{\delta V}\lim_{\delta t \to 0}\frac{\delta V' - \delta V}{\delta t}\,, \tag{4.8}$$

donde $\delta V'$ es el volumen en que se transforma δV después de un tiempo δt. Ahora bien,

$$\delta V' - \delta V = \int_{\delta S} d\vec{s} \cdot (\vec{v} + \delta\vec{v})\delta t\,, \tag{4.9}$$

donde $\vec{v}+\delta\vec{v}$ es la velocidad de los puntos (partículas fluidas) que se encuentran en la superficie δS que engloba a δV. Como $\vec{v}$ es la velocidad del punto $P(\vec{x})$, constante pues sobre δS, el primer término de la integral es cero al ser δS una superficie cerrada. Por otra parte, sustituyendo $\delta\vec{v}=\vec{r}\cdot\nabla\vec{v}$, donde $\nabla\vec{v}$ está evaluado en $\vec{x}$ (y por tanto constante en la integral), y aplicando el teorema de Gauss, se tiene

$$\delta V'-\delta V=\int_{\delta V} dV(\vec{r})\nabla_r\cdot[\vec{r}\cdot\nabla\vec{v}(\vec{x})]\delta t\,, \tag{4.10}$$

donde la primera divergencia es con respecto a la variable $\vec{r}$, cuyo origen es el punto P, estando extendida la integral a todos los puntos $\vec{r}$ de δV. Como $\nabla_r\cdot[\vec{r}\cdot\nabla\vec{v}]=\overline{\overline{I}}:\nabla\vec{v}=\nabla\cdot\vec{v}$, donde $\overline{\overline{I}}$ es el tensor unidad, y como $\nabla\cdot\vec{v}$ es constante en δV, se llega a

$$\delta V'-\delta V=\delta V\delta t\nabla\cdot\vec{v}\,, \tag{4.11}$$

de donde

$$\frac{1}{\delta V}\frac{d\delta V}{dt}=\nabla\cdot\vec{v}\,, \tag{4.12}$$

Así, pues, la traza de $\overline{\overline{\gamma}}$ (y por tanto de $\nabla\vec{v}$, o lo que es lo mismo, la divergencia del vector velocidad) representa la **velocidad de cambio de volumen por unidad de volumen** en el entorno del punto $\vec{x}$ cuya velocidad es $\vec{v}$ en un instante dado. Por esta razón se suele descomponer el tensor $\overline{\overline{\gamma}}$ en dos, uno con traza nula y otro diagonal:

$$\overline{\overline{\gamma}}\equiv\overline{\overline{\gamma}}'+\overline{\overline{\gamma}}''\equiv[\overline{\overline{\gamma}}-\frac{1}{3}(\nabla\cdot\vec{v})\overline{\overline{I}}]+\frac{1}{3}(\nabla\cdot\vec{v})\overline{\overline{I}}\,, \tag{4.13}$$

La componente de $\delta\vec{v}$ proveniente de $\overline{\overline{\gamma}}''$, es decir, $\vec{r}\cdot\overline{\overline{\gamma}}''=(\nabla\cdot\vec{v})\vec{r}/3$, representa un alargamiento (o contracción) del segmento $\vec{r}\equiv\vec{PQ}$ a un *ritmo* $(\nabla\cdot\vec{v})/3$ por unidad de longitud, que se traduce en una velocidad de dilatación volumétrica unitaria $\nabla\cdot\vec{v}$, como acabamos de ver. Por último, el significado de la parte sin traza y simétrica del tensor de velocidades, $\overline{\overline{\gamma}}'$, es más fácil visualizarlo en un sistema de coordenadas en el que este tensor tenga la forma

$$\overline{\overline{\gamma}}'=\begin{pmatrix}0 & a & b\\ a & 0 & c\\ b & c & 0\end{pmatrix}\,, \tag{4.14}$$

donde a, b y c son constantes. Obsérvese que el hecho de que $\overline{\overline{\gamma'}}$ no tenga traza no significa que los elementos de su diagonal sean nulos, sino que la suma es cero (recuérdese que la traza de un tensor permanece invariable al cambiar de sistema de coordenadas). Por otra parte, siempre existe un sistema coordenado en el que $\overline{\overline{\gamma}}'$ tiene la forma (4.14). (Para demostrarlo basta tomar los ejes principales de $\overline{\overline{\gamma}}'$ y comprobar que en estos ejes la ecuación $\vec{r}\cdot\overline{\overline{\gamma}}'\cdot\vec{r}=0$ proporciona un cono sobre el que es posible construir tres vectores ortogonales al ser la traza de $\overline{\overline{\gamma}}'$ nula.) Si tomamos un cubo unitario en este nuevo sistema coordenado con uno de sus vértices en el origen, es decir, un cubo definido por los tres vectores coordenados $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$, al cabo de un diferencial de tiempo δt este cubo se transforma, por acción del movimiento del fluido asociado a $\overline{\overline{\gamma}}'$, en un paralelepípedo definido por $(\vec{e}_1\cdot\overline{\overline{\gamma}}'\delta t,\vec{e}_2\cdot\overline{\overline{\gamma}}'\delta t,\vec{e}_3\cdot\overline{\overline{\gamma}}'\delta t)$, que tiene el mismo volumen inicial al ser la traza de $\overline{\overline{\gamma}}'$ nula. Así, $\vec{r}\cdot\overline{\overline{\gamma'}}$ produce una distorsión de δV sin cambiar su volumen. Por ello, $\overline{\overline{\gamma}}'$ se denomina **tensor de velocidad de deformación**.

Resumiendo, el movimiento de un volumen fluido (de forma arbitraria) que contiene una partícula fluida P se puede considerar como la superposición de un movimiento de traslación con P (a velocidad $\vec{v}$), una rotación como sólido rígido alrededor de P con una velocidad angular igual a la mitad de la vorticidad $\vec{\omega}$ evaluada en P, una expansión uniforme en todas las direcciones a partir de P con una velocidad media igual a $(\nabla \cdot \vec{v})/3$ (evaluada en P), y una distorsión que se puede describir como un movimiento puramente de *cortadura* en tres direcciones mutuamente perpendiculares. Expresado en forma matemática, los puntos $\vec{x} + \vec{r}$ del volumen δV tienen las siguientes cuatro velocidades superpuestas:

$$\vec{v} + \vec{r} \cdot \nabla \vec{v} = \vec{v} + \frac{1}{2}(\nabla \wedge \vec{v}) \wedge \vec{r} + \frac{1}{3}(\nabla \cdot \vec{v})\vec{r} + [\frac{1}{2}(\nabla \vec{v} + \nabla \vec{v}^T) - \frac{1}{3}\nabla \cdot \vec{v}\overline{\overline{I}}] \cdot \vec{r}, \tag{4.15}$$

donde $\vec{v}$ está evaluado en el punto $\vec{x}$.

4.3. Ejemplo: Deformación de una superficie esférica

Para ilustrar lo anterior consideramos el caso en que δV es el volumen contenido en una pequeña esfera de radio ϵ centrada en $\vec{x}$. Inicialmente los puntos de la superficie esférica están definidos, en relación a su centro, por $\vec{r} = \epsilon \vec{n}$, donde $\vec{n}$ es la normal a la esfera. Después de un tiempo δt la esfera se transforma en una superficie que viene dada, en relación al punto $\vec{x} + \vec{v}\delta t$ (es decir, no tenemos en cuenta el movimiento puramente translacional) por:

$$\vec{r} = \epsilon \vec{n} + \epsilon \vec{n} \cdot \nabla \vec{v}\, \delta t = \epsilon \vec{n} + \epsilon \vec{n} \cdot \overline{\overline{\gamma}}\, \delta t\,, \tag{4.16}$$

donde, obviamente, el movimiento rotacional dado por el tensor $\overline{\overline{\xi}}$ no contribuye. Con errores del orden δt^2, la expresión anterior se puede escribir como

$$\vec{r} \simeq \epsilon \vec{n} + \overline{\overline{\gamma}} \cdot \vec{r}\, \delta t \quad ; \tag{4.17}$$

multiplicando escalarmente por $\vec{r}$,

$$r^2 - \vec{r} \cdot \overline{\overline{\gamma}} \cdot \vec{r}\, \delta t = \epsilon \vec{n} \cdot \vec{r} = \epsilon^2 + \vec{r} \cdot \overline{\overline{\gamma}} \cdot \vec{r}\, \delta t + O(\delta t^2)\,, \tag{4.18}$$

es decir,

$$r^2 - 2\vec{r} \cdot \overline{\overline{\gamma}} \cdot \vec{r} \delta t = \epsilon^2 + O(\delta t^2)\,, \tag{4.19}$$

Luego, si δt es pequeño, la superficie esférica se transforma en un elipsoide cuyos ejes son, como veremos a continuación, los autovectores o direcciones principales del tensor $\overline{\overline{\gamma}}$. En efecto, en coordenadas cartesianas, el elipsoide tiene por ecuación

$$x_i x_j A_{ij} = \epsilon^2\,, \tag{4.20}$$

donde $A_{ij} = A_{ji} = \delta_{ij} - 2\gamma_{ij}\delta t$, siendo δ_{ij} la delta de Kronecker. Los ejes del elipsoide se pueden obtener imponiendo que el vector normal en un punto de la superficie, es decir,

$$\frac{\partial}{\partial x_k} A_{ij} x_i x_j = A_{ij} x_j \delta_{ik} + A_{ij} x_i \delta_{jk} = 2A_{kj} x_j\,, \tag{4.21}$$

sea paralelo al vector posición de ese punto:

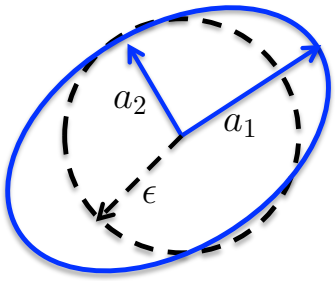


Figura 4.3: Deformación de una esfera de radio ϵ.

$$A_{kj}x_j \equiv (\delta_{kj} - 2\gamma_{kj}\delta t)x_j = \lambda x_k = \lambda\delta_{kj}x_j\,,$$

$$[(1-\lambda)\delta_{kj} - 2\gamma_{kj}\delta t]x_j = 0\,,$$

$$\left[\overline{\overline{\gamma}} - \frac{1-\lambda}{2\delta t}\overline{\overline{I}}\right]\cdot\vec{r} = 0\,, \tag{4.22}$$

que es la ecuación de los autovectores de $\overline{\overline{\gamma}}$. Para hallar el volumen del elipsoide tomamos los ejes principales, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, dados por la solución unitaria de (4.22). En estos ejes $\overline{\overline{\gamma}}$ es diagonal con elementos k_1, k_2, k_3, que son los autovalores de $\overline{\overline{\gamma}}$, los cuales son reales al ser $\overline{\overline{\gamma}}$ simétrico. Los tres ejes del elipsoide, $\vec{a}_i$, $i = 1, 2, 3$, vienen dados por

$$\vec{a}_i = \epsilon\vec{e}_i + \epsilon\vec{e}_i\cdot\overline{\overline{\gamma}}\delta t + O(\delta t^2) \simeq \epsilon\vec{e}_i(1+k_i\delta t)\,, \quad i = 1,2,3\,, \tag{4.23}$$

Por tanto, el volumen del elipsoide es:

$$\begin{aligned} V' &= \frac{4}{3}\pi a_1 a_2 a_3 = \frac{4}{3}\pi\epsilon^3(1+k_1\delta t)(1+k_2\delta t)(1+k_3\delta t) \\ &= \frac{4}{3}\pi\epsilon^3 + \frac{4}{3}\pi\epsilon^3(k_1+k_2+k_3)\delta t + O(\delta t^2)\,. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Como la traza de un tensor no varia al cambiar de coordenadas, $k_1+k_2+k_3 = \nabla\cdot\vec{v}$; llamando $V = 4\pi\epsilon^3/3$ al volumen de la esfera inicial, se tiene

$$\frac{1}{V}\frac{V'-V}{\delta t} = \nabla\cdot\vec{v}\,, \tag{4.25}$$

como ya demostramos de forma general.

Referencias.

- G.K. BATCHELOR, 1967. Capítulo 2.

- G.M HOMSY, 2008.
- S.M. RICHARDSON, 1989. Capítulo 2.

Material audiovisual sugerido:

Deformation of continuous media. John J. Lumley.

Prácticas y ejercicios de cinemática

Práctica 'multimedia'

Los contenidos teóricos y de problemas de cinemática se complementarán en grupos reducidos con el material audiovisual contenido en 'KINEMATICS', de 'MULTIMEDIA FLUID MECHANICS DVD-ROM', publicado por Cambridge University Press (2007, 2^a edición).

Problemas propuestos de cinemática

La mayoría de los ejercicios que se enuncian a continuación serán resueltos en clases de problemas. El resto se recomiendan como ejercicios para realizar en casa. Algunos de ellos están resueltos en FERNANDEZ FERIA, DEL PINO PEÑAS y ORTEGA CASANOVA (2010).

1. Considérese el campo de velocidad bidimensional

$$v_x = \frac{x}{1+t}\,, \quad v_y = \frac{y}{1+2t}\,.$$

   Calcular la senda, línea de corriente y traza que pasan por un punto genérico (x_0, y_0). Comparar dichas curvas en un instante genérico t y en el instante inicial $t = 0$.

2. Consideren el movimiento plano cuya velocidad viene dada por:

$$v_x(x,y,t) = -\frac{Ay}{2\nu t^2}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4\nu t}\right)\,,$$

$$v_y(x,y,t) = \frac{Ax}{2\nu t^2}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4\nu t}\right)\,,$$

   según los ejes x e y, respectivamente, donde A y ν son constantes. Comprueben que se trata de un movimiento incompresible y calculen:

   a) Líneas de corriente. Demuestren que aunque el movimiento es no estacionario, las líneas de corriente no varían con el tiempo y, en consecuencia, coinciden con las sendas.

b) Trayectorias de las partículas fluidas.

c) Considerando un nuevo sistema de referencia cuyo origen coincida con el anterior y se mueva respecto a él con una velocidad angular constante, calculen las trayectorias en los nuevos ejes.

3. Sea el campo de velocidad bidimensional dado por

$$v_x = x, \quad v_y = -y.$$

a) Compruebe que corresponde a un movimiento incompresible, halle la función de corriente y dibuje algunas líneas de corriente.

b) Compruebe que corresponde a un movimiento irrotacional, halle la función potencial y dibuje algunas líneas equipotenciales.

4. Considere un movimiento plano $\vec{v} = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y$ irrotacional ($\nabla \wedge \vec{v} = 0$) e incompresible ($\nabla \cdot \vec{v} = 0$). Demuestre que tanto la función de corriente como la función potencial de velocidad satisfacen la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0\,, \quad \nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0\,.$$

En este tipo de movimientos se suele definir el **potencial complejo** $f(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$, siendo $z = x + iy$ la variable compleja. Demuestre que la función $f(z)$ es una función analítica (o diferenciable u holomórfica) en la variable compleja z y que, por tanto, su parte real e imaginaria, ϕ y ψ, satisfacen las relaciones de Cauchy-Riemann. ¿Cómo se calcularía el campo de velocidad (v_x, v_y) en términos de $f(z)$?

Compruebe estos resultados con el ejemplo del ejercicio anterior. Comente la relación entre las líneas de corriente y las equipotenciales a la luz de estos resultados.

5. La función de corriente del movimiento de un fluido incompresible sobre una esquina de ángulo α viene dada, en coordenadas cilíndricas, por (ver figura 4.4):

$$\psi = Ar^{\pi/\alpha}\mathrm{sen}\frac{\pi\theta}{\alpha}\,,$$

donde A es una constante. Se pide:

a) Comprobar que dicha función de corriente *puede* corresponder a un movimiento bidimensional, potencial e incompresible.

b) Campo de velocidad.

c) Función potencial de velocidad.

d) Potencial complejo en términos de la variable compleja z.

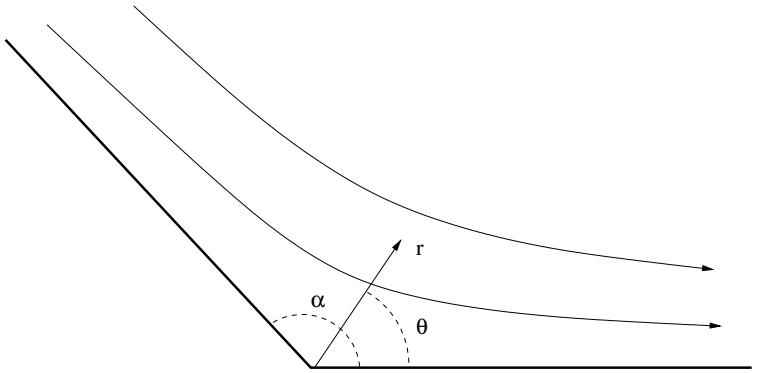


Figura 4.4

6. Un movimiento bidimensional viene dado por el siguiente campo de velocidad en coordenadas cartesianas (x, y):

$$\vec{v} = u\vec{e}_x + v\vec{e}_y\,, \quad u = -\omega y + bt\,, \quad v = \omega x\,,$$

donde ω y b son constantes. Se pide:

   a) Trayectoria de la partícula fluida que en el instante $t = 0$ pasa por el origen de coordenadas. Haga un esbozo de la senda. ¿Se atreve a darle nombre a esa curva?

   b) Líneas de corriente que pasan por el origen.

   c) Trazas que salen del origen.

7. Considérese un **vórtice de Rankine,** cuya velocidad puramente circunferencial, $\vec{v} = u(r)\vec{e}_\theta$, viene dada en coordenadas cilíndricas y en forma adimensional por:

$$u = \begin{cases} r\,, & r \leq 1 \\ \\ \frac{1}{r}\,, & r > 1 \end{cases}\,.$$

   Obviamente, las trayectorias son circunferencias centradas en el origen $r = 0$. Se pide:

   a) Escriba esas trayectorias para una partícula fluida que inicialmente se encuentra en $(r = r_0, \theta = 0)$ y calcule el tiempo que tarda la partícula fluida en dar una vuelta alrededor del origen en los casos $r_0 < 1$ y $r_0 > 1$.

   b) ¿Cuánto vale la velocidad angular de giro como sólido rígido de las partículas fluidas en los dos casos del apartado anterior? Comente las diferencias entre estos dos casos.

8. El movimiento de un líquido entre dos placas planas, paralelas e infinitas, producido por el movimiento relativo de una de ellas respecto a la otra con velocidad V según el eje x viene dado por el campo de velocidades $u/V = y/h$, donde u es la velocidad en la dirección del eje x, y es la distancia perpendicular a las placas medida a partir de la placa fija y h es la distancia entre las placas. Calcular:

a) Líneas de corriente.

b) Divergencia del vector velocidad.

c) Vector vorticidad.

d) Tensor de velocidad de deformación y velocidad de dilatación cúbica.

e) Direcciones principales de deformación y velocidades de dilatación en esas direcciones.

f) Dibuje la superficie fluida en que se transforma un cuadrado de lado δl, orientado paralelamente a los ejes x e y, al cabo de un tiempo δt. Indicar cómo contribuyen la vorticidad y la velocidad de deformación a la forma final de la superficie fluida.

TEMA III:
Ecuaciones que gobiernan el movimiento de los fluidos

CAPÍTULO 5

Ecuaciones generales que gobiernan el movimiento de los fluidos

En esta lección se enunciarán los principios físicos generales que sustentan las ecuaciones que gobiernan el movimiento de los fluidos, que se escribirán en forma integral general. Los detalles que *cierran* estas ecuaciones se verán en las lecciones siguientes, donde se considerarán por separado las ecuaciones de conservación de masa, cantidad de movimiento y energía, tanto en forma integral como diferencial.

Previamente se necesitan definir algunas propiedades físicas de las integrales de superficie y de volumen que se van a utilizar y demostrar un teorema general relacionado con estas integrales.

5.1. Flujo convectivo a través de una superficie

Sea S una superficie y ϕ una magnitud fluida por unidad de volumen (es decir, una *densidad,* tal como la densidad másica, ρ, la densidad de cantidad de movimiento $\rho\vec{v}$, etc.). Para evaluar la *cantidad* de la magnitud ϕ que atraviesa S debido al movimiento del fluido, sabemos que en un tiempo δt alcanzan el elemento de superficie $\delta s\,\vec{n}$ de S todas las partículas fluidas contenidas en el volumen $\vec{v}\cdot\vec{n}\delta t\,\delta s$ (ver figura 5.1), estando la velocidad del fluido $\vec{v}$ evaluada en δs (primera aproximación cuando $\delta t \to 0$). Por tanto, por unidad de tiempo, la cantidad de la magnitud ϕ que atraviesa la superficie δs debido a la velocidad del fluido (flujo convectivo) es $\phi\vec{v}\cdot\vec{n}\,\delta s$. A través de toda la superficie S el flujo convectivo total de ϕ es:

$$\int_S \phi\vec{v}\cdot\vec{n}ds \equiv \int_S \phi\vec{v}\cdot d\vec{s}\,. \tag{5.1}$$

Si ϕ es un escalar (por ejemplo, la densidad másica ρ), la densidad $\phi\vec{v}$ se suele denominar vector de flujo de ϕ ($\rho\vec{v}$ sería el flujo másico). Si ϕ es un vector (por ejemplo, la densidad de cantidad de movimiento $\rho\vec{v}$), $\phi\vec{v}$ es un tensor de flujo ($\rho\vec{v}\vec{v}$ es el tensor flujo de cantidad de movimiento).

Cuando la superficie S es cerrada y $\phi\vec{v}$ es continua, podemos aplicar el teorema de Gauss y obtener

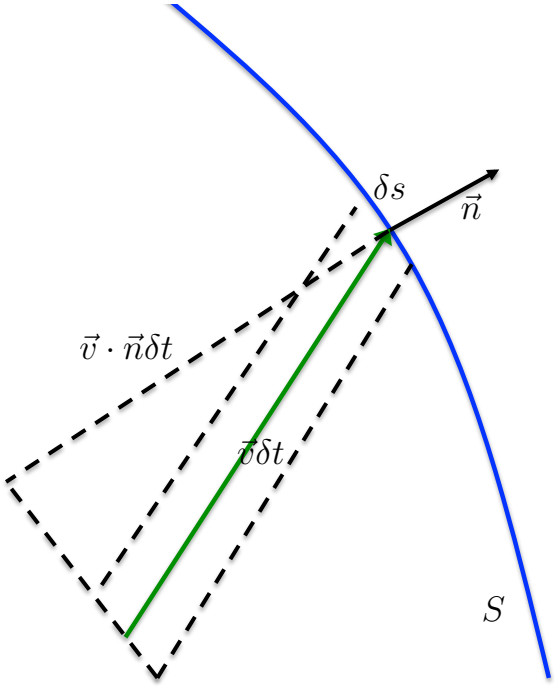


Figura 5.1: Flujo convectivo a través de una superficie.

$$\int_S \phi\vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_V \nabla\cdot(\phi\vec{v})dV\,. \tag{5.2}$$

Así, $\nabla\cdot(\phi\vec{v})$ representa el flujo convectivo de la cantidad ϕ por unidad de volumen. En particular, ya vimos que $\nabla\cdot\vec{v}$ es la velocidad de dilatación cúbica unitaria, es decir, el flujo convectivo de *volumen* por unidad de volumen. Análogamente, $\nabla\cdot\rho\vec{v}$ sería el flujo convectivo de masa por unidad de volumen, $\nabla\cdot\rho\vec{v}\vec{v}$ el flujo convectivo de cantidad de movimiento por unidad de volumen, etc.

5.2. Teorema de Transporte de Reynolds

Las ecuaciones de la Mecánica de Fluidos provienen de aplicar los principios de conservación de la masa, cantidad de movimiento y energía a volúmenes fluidos. Como estos volúmenes se mueven con el fluido, es conveniente expresar de forma adecuada la variación de las magnitudes fluidas en el interior de un volumen fluido a lo largo de su movimiento. Esto es lo que nos proporciona el Teorema de Transporte de Reynolds, que se puede considerar como una extensión a tres dimensiones de la fórmula de Leibnitz (2.91).

Sea $V_f(t)$ un volumen fluido, y ϕ una magnitud por unidad de volumen como las consideradas en la sección anterior. La cantidad total de ϕ en V_f varía en el tiempo por dos razones: porque varía ϕ dentro de V_f si el movimiento no es estacionario, y porque puede haber flujo convectivo de ϕ a través de la superficie fluida $S_f(t)$ que encierra al volumen fluido. Matemáticamente, se tiene:

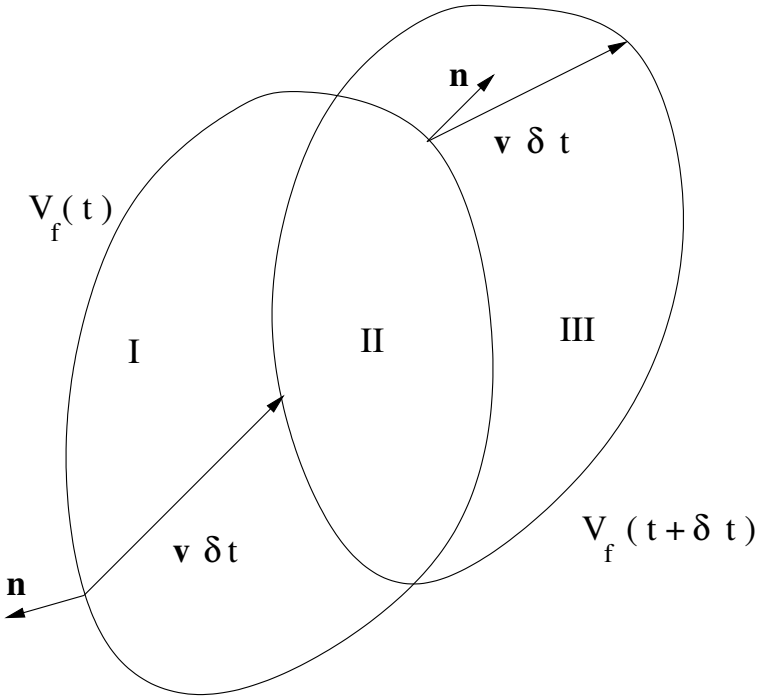


Figura 5.2: Teorema de Transporte de Reynolds.

$$\frac{d}{dt}\int_{V_f(t)} \phi dV = \lim_{\delta t\to 0} \frac{(\Phi_{II}+\Phi_{III})_{t+\delta t} - (\Phi_I + \Phi_{II})_t}{\delta t}$$

$$= \lim_{\delta t\to 0} \frac{(\Phi_I+\Phi_{II})_{t+\delta t} - (\Phi_I + \Phi_{II})_t}{\delta t} + \lim_{\delta t\to 0} \frac{(\Phi_{III})_{t+\delta t} - (\Phi_I)_{t+\delta t}}{\delta t}\,, \tag{5.3}$$

donde Φ representa la cantidad total de ϕ ($\Phi \equiv \int \phi dV$) en alguno de los volúmenes I, II ó III (ver figura 5.2). El primer término de la última expresión es la variación de ϕ en V_f suponiendo que V_f está *anclado* en el tiempo t, mientras que el segundo término se puede expresar como el flujo de ϕ a través de S_f en el instante t; es decir,

$$\frac{d}{dt}\int_{V_f(t)} \phi dV = \int_{V_f} \frac{\partial \phi}{\partial t} dV + \lim_{\delta t\to 0} \frac{1}{\delta t}\left[\int_{S_1} \phi \vec{v}\cdot\vec{n} ds \delta t \,+\, \int_{S_2} \phi \vec{v}\cdot\vec{n} ds \delta t\right]$$

$$= \int_{V_f} \frac{\partial \phi}{\partial t} dV + \int_{S_f} \phi \vec{v}\cdot\vec{n} ds\,, \tag{5.4}$$

donde $S_1 + S_2 = S_f$ en el límite $\delta t \to 0$. Este es el Teorema de Transporte de Reynolds aplicado a un volumen fluido, y nos dice que la velocidad de variación de ϕ en un volumen fluido $V_f(t)$ es igual a la velocidad de variación de ϕ dentro de V_f evaluado en el instante t, más el flujo convectivo de ϕ a través de la superficie S_f, evaluado también en el tiempo t.

Este teorema es también muy útil cuando se aplica a volúmenes que no son volúmenes fluidos. Si $V_c(t)$ es un **volumen de control** arbitrario cuya superficie $S_c(t)$ se mueve con una velocidad $\vec{v}_c(\vec{x}, t)$, que no tiene por qué coincidir con la del fluido (muchas veces nos interesa que $\vec{v}_c$ sea nula, es decir, utilizar un volumen de control fijo en el espacio), aplicando el teorema anterior tenemos:

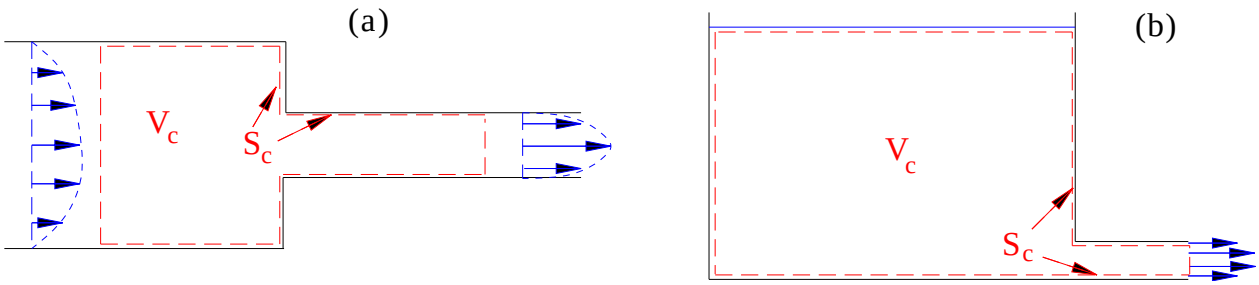


Figura 5.3: Ejemplos de volumen de control estacionario (a), para el flujo en un conducto con cambio brusco de sección, y no estacionario (b), para estudiar la descarga de un depósito. Obsérvese que ninguno de los dos es un volumen fluido.

$$\frac{d}{dt}\int_{V_c(t)} \phi dV = \int_{V_c} \frac{\partial \phi}{\partial t} dV + \int_{S_c} \phi \vec{v}_c \cdot \vec{n} ds \,, \tag{5.5}$$

ya que en la deducción anterior lo que cuenta es la velocidad de la superficie, coincida o no con la del fluido. Si en el instante t el volumen de control coincide con un cierto volumen fluido, $V_c(t) = V_f(t)$ [por supuesto, $V_c(t+\delta t)$ no tiene por qué coincidir con $V_f(t+\delta t)$], se tiene:

$$\frac{d}{dt}\int_{V_f(t)} \phi dV = \int_{V_c} \frac{\partial \phi}{\partial t} dV + \int_{S_c} \phi \vec{v} \cdot \vec{n} ds = \frac{d}{dt}\int_{V_c(t)} \phi dV + \int_{S_c} \phi (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} ds \,. \tag{5.6}$$

Esta última forma del teorema nos permitirá aplicar las leyes de conservación [tomando ϕ igual a ρ, $\rho\vec{v}$ o $\rho(e + v^2/2)$] a volúmenes de control arbitrarios, ya que expresa las variaciones de ϕ en volúmenes fluidos que en cada instante coincide con el volumen de control elegido. Así, podremos utilizar **formas integrales de las ecuaciones de conservación** aplicadas a volúmenes arbitrarios. Si $\vec{v}_c = \vec{v}$, se recupera, por supuesto, la ecuación (5.4). Por otra parte, si el volumen de control es fijo, $\vec{v}_c = 0$, se tiene

$$\frac{d}{dt}\int_{V_f(t)} \phi dV = \frac{d}{dt}\int_{V_c} \phi dV + \int_{S_c} \phi \vec{v} \cdot \vec{n} ds \,. \tag{5.7}$$

5.3. *Formulación integral de las ecuaciones de la Mecánica de Fluidos*

En esta sección se enunciarán los principios físicos de los que derivan las principales ecuaciones que describen el movimiento de los fluidos aplicados a un volumen fluido arbitrario V_f, es decir, a un volumen arbitrario que se mueve con el fluido. En un instante t, cada partícula fluida contenida en este volumen, situada en un determinado punto $\vec{x}$ (ver Fig. 5.4), tendrá una densidad $\rho(\vec{x}, t)$, una velocidad $\vec{v}(\vec{x}, t)$ y una energía interna $e(\vec{x}, t)$ (entre otras propiedades macroscópicas, pero son éstas las que nos interesan para formular los principios físicos).

5.3.1. *Conservación de la masa*

El principio físico de conservación de la masa nos dice que la masa contenida en V_f no varía con el tiempo:

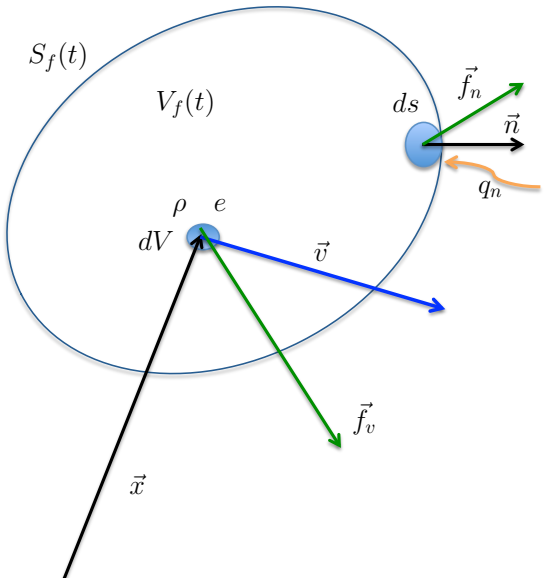


Figura 5.4: Volumen fluido arbitrario en el que se aplican los principios de conservación.

$$\frac{d}{dt}\int_{V_f(t)} \rho dV = 0\,. \tag{5.8}$$

En la lección siguiente se verá que la aplicación del Teorema de Transporte de Reynolds a esta ecuación, junto con el Teorema de Gauss, permitirá escribir la ecuación de conservación de la masa en forma diferencial, también llamada ecuación de continuidad. Por supuesto, el Teorema de Transporte de Reynolds también permitirá escribir esta ecuación en cualquier volumen de control $V_c(t)$.

5.3.2. *Ecuación de cantidad de movimiento*

La ecuación principal que describe la dinámica de los fluidos deriva del principio físico enunciado por Newton (Segunda Ley de Newton) que establece que la variación de la cantidad de movimiento de un objeto se debe a las fuerzas que actúan sobre él. Aplicado a un volumen fluido V_f, teniendo en cuenta que $\rho(\vec{x},t)\vec{v}(\vec{x},t)$ es la cantidad de movimiento por unidad de volumen de una partícula fluida situada en $\vec{x}$ en el instante t, se escribe:

$$\frac{d}{dt}\int_{V_f(t)} \rho\vec{v}dV = \int_{V_f(t)} \vec{f}_v dV + \int_{S_f(t)} \vec{f}_n ds\,, \tag{5.9}$$

donde $\vec{f}_v(\vec{x},t)$ es la fuerza por unidad de volumen que actúa sobre la partícula fluida situada en $\vec{x}$ en el instante t y $\vec{f}_n$ es la fuerza por unidad de superficie que actúa sobre el elemento de superficie ds de la superficie fluida S_f, que encierra al volumen V_f, orientado según la dirección $\vec{n}$ (ver Fig. 5.4). En la lección 7 se caracterizarán con detalle las fuerzas $\vec{f}_v$ y $\vec{f}_n$ y se obtendrá la ecuación de cantidad de movimiento en forma diferencial en sus distintas versiones.

5.3.3. *Ecuación de la energía*

El Primer Principio de la Termodinámica nos dice que la variación de la energía de un sistema se debe al trabajo de las fuerzas que actúan sobre él y al 'calor' intercambiado con el exterior y generado por el sistema. Teniendo en cuenta que la energía total por unidad de volumen de una partícula fluida situada en el punto $\vec{x}$ en un instante t es $\rho(\vec{x},t)\left[e(\vec{x},t)+\frac{1}{2}v^2(\vec{x},t)\right]$, donde e es su energía interna específica (por unidad de masa) y $\frac{1}{2}v^2 \equiv \frac{1}{2}\vec{v}\cdot\vec{v}$ su energía cinética o mecánica por unidad de masa, este principio físico aplicado a un volumen fluido V_f se escribe:

$$\frac{d}{dt}\int_{V_f(t)}\rho(e+\frac{1}{2}v^2)dV=\int_{V_f}\vec{f_v}\cdot\vec{v}dV+\int_{S_f}\vec{f_n}\cdot\vec{v}ds+\int_{S_f}q_n ds+\int_{V_f}Q_r dV\,, \qquad (5.10)$$

donde la función escalar q_n es el flujo de calor por unidad de superficie en el elemento ds de la superficie fluida S_f y $Q_r(\vec{x},t)$ representa el calor generado en la partícula fluida situada en $\vec{x}$ por unidad de volumen y por unidad de tiempo. En la lección 8 se caracterizará con detalle q_n y se comentará sobre los diferentes orígenes y formas del campo escalar Q_r. Así mismo, se derivarán la distintas formas diferenciales de la ecuación de la energía tras la aplicación a (5.10) del Teorema de Transporte de Reynolds y del Teorema de Gauss y la introducción de otras magnitudes termodinámicas relacionadas con la energía interna.

CAPÍTULO 6

Ecuación de conservación de la masa

Como se vio en la lección anterior, el principio de conservación de la masa aplicado a un volumen fluido cualquiera, $V_f(t)$, se escribe

$$\frac{d}{dt}\int_{V_f(t)} \rho dV = 0\,. \tag{6.1}$$

Esta ecuación puede ser referida a cualquier volumen de control $V_c(t)$ mediante la aplicación del Teorema de Transporte de Reynolds en la forma (5.6) con $\phi = \rho$:

$$\frac{d}{dt}\int_{V_c(t)} \rho dV + \int_{S_c(t)} \rho(\vec{v} - \vec{v}_c)\cdot \vec{n} ds = 0\,. \tag{6.2}$$

Físicamente esta ecuación expresa que la variación total de la masa contenida en $V_c(t)$, más el flujo convectivo *neto* de masa a través de la superficie $S_c(t)$ es igual a cero.

6.1. Ecuación de continuidad

Para obtener la ecuación de conservación de la masa en forma diferencial se aplica el Teorema de Transporte de Reynolds al volumen fluido $V_f(t)$ en (6.1) y posteriormente se transforma la integral sobre la superficie fluida cerrada S_f en una integral sobre V_f mediante el uso del teorema de Gauss (2.77), obteniéndose

$$\int_{V_f} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{V_f} \nabla\cdot(\rho\vec{v}) dV = 0\,. \tag{6.3}$$

Como V_f es un volumen arbitrario, el integrando tiene que ser nulo, proporcionando la ecuación diferencial

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot\rho\vec{v} = 0\,, \tag{6.4}$$

que se suele denominar **ecuación de continuidad** o ecuación diferencial de conservación de la masa. El primer término representa la variación temporal de la masa por unidad de volumen, mientras que el segundo es el flujo convectivo de masa por unidad de volumen (recuérdese el significado físico de la divergencia).

6.2. *Flujos incompresibles y compresibles. Caudal y gasto másico*

Los **líquidos** son, como ya sabemos, prácticamente incompresibles, es decir, su densidad es, a efectos prácticos, constante. Por tanto, la ecuación de continuidad de un líquido toma la forma simple

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0\,, \tag{6.5}$$

o, en forma integral,

$$\int_{S_c} (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} ds = 0\,; \tag{6.6}$$

es decir, el flujo neto de masa a través de cualquier superficie cerrada S_c es nulo.

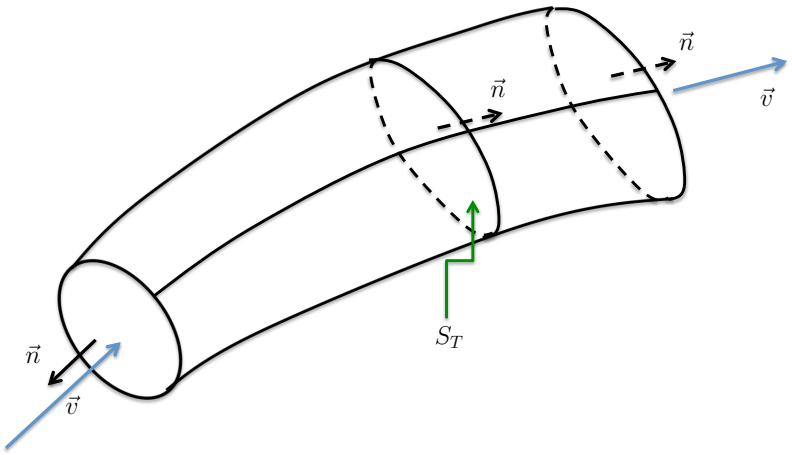


Figura 6.1: Conservación del caudal de un flujo incompresible o del gasto másico de un flujo compresible y estacionario a lo largo de un tubo de corriente.

Si S_c es un tubo de corriente, como el representado en la Fig. 6.1, el **caudal** que circula por su interior es el mismo en todas las secciones transversales; es decir, $Q \equiv \int_{S_T} \vec{v} \cdot \vec{n} ds$, donde S_T es cualquier sección transversal del tubo de corriente, es invariante a lo largo del mismo. Esto es consecuencia de (6.6) y de que el fluido no puede atravesar la superficie *lateral* del tubo de corriente por estar constituido por líneas de corriente.

La ecuación de continuidad también se simplifica para los flujos compresibles de gases ($\rho \neq constante$) si el movimiento es estacionario:

$$\nabla \cdot \rho\vec{v} = 0\,. \tag{6.7}$$

En forma integral,

$$\int_{S_c} \rho(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} ds = 0\,, \tag{6.8}$$

también expresa que el flujo neto de masa a través de cualquier superficie cerrada es cero. Consecuencia de lo anterior es que el **gasto másico** que circula por el interior de un tubo

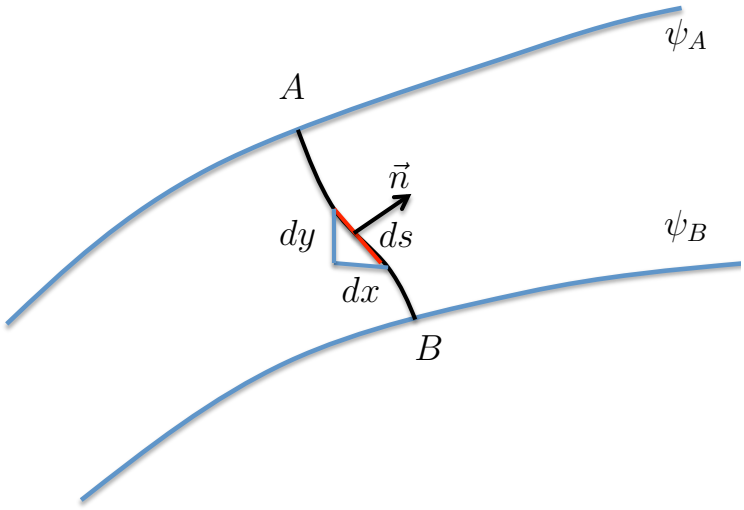


Figura 6.2: Caudal entre dos líneas de corriente.

de corriente, $G \equiv \int_{S_T} \rho\vec{v}\cdot\vec{n}ds$, permanece constante a lo largo de él. Obsérvese que el gasto másico tiene dimensiones de masa por unidad de tiempo (kg/s en el SI), mientras que las dimensiones del caudal son de volumen por unidad de tiempo (m^3/s en el SI).

La ecuación (6.5) también nos dice que el campo de velocidad de un líquido (de un flujo incompresible) es solenoidal, existiendo una función potencial vector $\vec{\psi}$ tal que

$$\vec{v} = \nabla \wedge \vec{\psi}\,, \quad \nabla\cdot\vec{\psi} = 0\,. \tag{6.9}$$

Como ya se vio en la sección 3.7, esta representación del campo de velocidad tiene ventajas sustanciales solo en los movimientos bidimensionales, en los que $\vec{\psi}$ tiene una sola componente perpendicular al movimiento, $\vec{\psi} = \psi\vec{n}$, donde la función de corriente ψ proporciona las líneas de corriente. Otra propiedad interesante de la función ψ es que el caudal (bidimensional) entre dos líneas de corriente viene dado por la diferencia entre los valores de ψ en esas líneas de corriente. En efecto, utilizando coordenadas cartesianas,

$$v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}\,, \quad v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}\,, \tag{6.10}$$

y teniendo en cuenta que

$$d\psi \equiv \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy = -v_y dx + v_x dy\,,$$

si dos líneas de corriente A y B vienen dadas por $\psi = \psi_A$ y $\psi = \psi_B$, el caudal entre ellas es (ver figura 6.2):

$$Q = \int_A^B \vec{v}\cdot\vec{n}ds = \int_A^B (v_x dy - v_y dx) = \int_A^B d\psi = \psi_B - \psi_A\,, \tag{6.11}$$

donde se ha hecho uso de $\vec{n}ds = (dy, -dx)^T$.

En el flujo estacionario de un gas, la densidad de cantidad de movimiento, $\rho\vec{v}$, es también solenoidal (6.7), por lo que se puede definir un potencial vector:

$$\rho\vec{v} = \nabla \wedge \vec{\psi}\,. \tag{6.12}$$

Si el movimiento es además bidimensional, de forma similar al caso incompresible se puede definir una función de corriente que, en coordenadas cartesianas sería

$$\rho v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}\,, \quad \rho v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}\,, \tag{6.13}$$

de forma que

$$d\psi \equiv \frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy = -\rho v_y dx + \rho v_x dy\,,$$

y el gasto másico (bidimensional) entre dos líneas de corriente viene dado por la diferencia entre los valores de ψ en esas líneas de corriente:

$$G = \int_A^B \rho\vec{v}\cdot\vec{n}ds = \int_A^B \rho(v_x dy - v_y dx) = \int_A^B d\psi = \psi_B - \psi_A\,. \tag{6.14}$$

Referencias.

- G. K. BATCHELOR, 1967. Capítulo 3.
- D. E. ROSNER, 1986. Capítulos 2 y 3.

CAPÍTULO 7

Ecuación de cantidad de movimiento

7.1. Fuerzas de volumen y fuerzas de superficie

Ya se comentó en la sección 5.3 que las fuerzas que actúan sobre un cierto volumen de fluido se clasifican en dos tipos: fuerzas de volumen y fuerzas de superficie. Las **fuerzas de volumen** son aquellas de *largo alcance* que actúan sobre cada elemento de volumen del fluido. Por ejemplo, las asociadas a campos de fuerza externos al fluido como el campo gravitatorio terrestre. Si designamos por $\vec{f_v}$ la fuerza por unidad de volumen, la correspondiente al campo gravitatorio sería:

$$\vec{f_v} = \rho\vec{g}\,, \tag{7.1}$$

donde ρ es la densidad del fluido y $\vec{g}$ es la aceleración de la gravedad, que se suele suponer constante para todas las partículas fluidas si las dimensiones de la masa fluida en cuestión es muy pequeña comparada con el tamaño de la tierra. Así, la fuerza gravitatoria total sobre un cierto volumen V de fluido sería:

$$\vec{F_v} = \int_V \rho\vec{g}dV \simeq \vec{g}\int_V \rho dV\,. \tag{7.2}$$

La fuerza gravitatoria es en realidad una **fuerza másica,** siendo $\vec{g}$ la correspondiente fuerza por unidad de masa, que en general designaremos por $\vec{f_m}$. El producto de $\vec{f_m}$ por la densidad del fluido proporciona la fuerza por unidad de volumen correspondiente. Otra fuerza másica que aparecerá en muchos problemas prácticos es la asociada al sistema de referencia, si éste no es inercial:

$$\vec{f_m} = -\vec{a}_0 - \frac{d\vec{\Omega}}{dt}\wedge\vec{x} - \vec{\Omega}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\vec{x}) - 2\vec{\Omega}\wedge\vec{v}\,, \tag{7.3}$$

donde $\vec{a}_0$ y $\vec{\Omega}$ son la aceleración y la velocidad angular del sistema de coordenadas, respectivamente, en relación a algún sistema de referencia inercial (Fig. 7.1). Por último, otras fuerzas volumétricas son las electromagnéticas, que aparecen cuando el fluido está cargado eléctricamente o cuando por él circula alguna corriente eléctrica; la correspondiente fuerza por unidad de volumen es:

$$\vec{f_v} = \rho_e\vec{E} + \vec{J}\wedge\vec{B}\,, \tag{7.4}$$

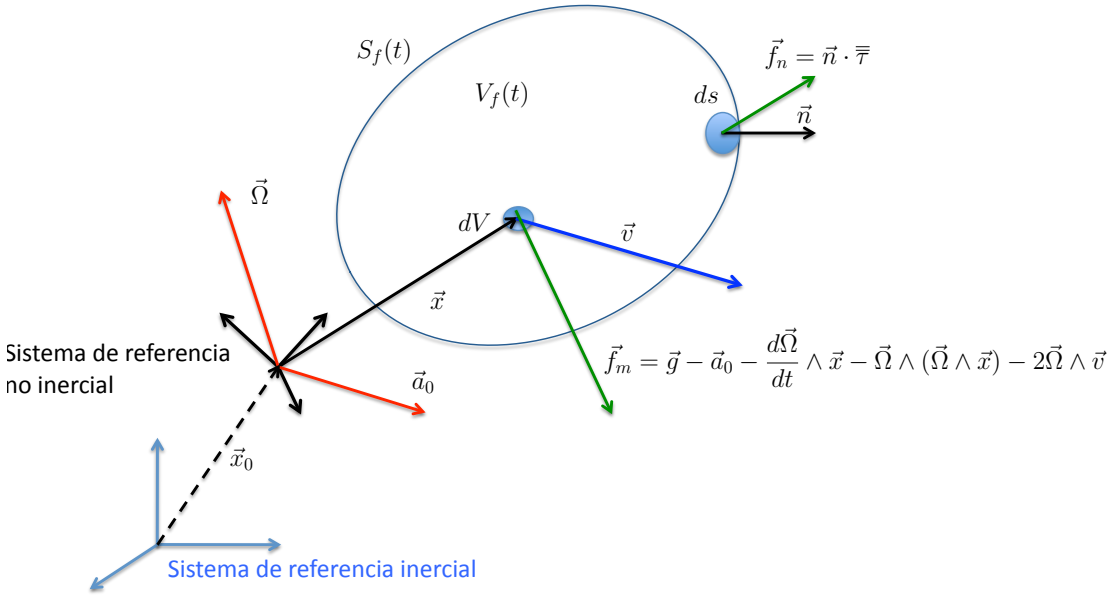


Figura 7.1: Volumen fluido en un sistema de referencia no inercial.

donde ρ_e es la densidad de carga, $\vec{E}$ es el campo eléctrico, $\vec{J}$ la densidad de corriente y $\vec{B}$ el campo magnético. Esta fuerza (denominada de Lorentz) no se considerará en este curso ya que el estudio de la dinámica de los fluidos donde esta fuerza es importante corresponde a ramas especializadas de la Física de los Fluidos como la Física de Plasmas (gases ionizados), la Magnetohidrodinámica (MHD), etc., que no se estudiarán aquí.[1]

Las fuerzas de volumen (másicas y electromagnéticas) son el tipo habitual de fuerzas *puntuales* que aparecen en la dinámica clásica de partículas, pero ahora promediadas sobre un gran número de moléculas de acuerdo con la hipótesis de medio continuo. En la Mecánica de Fluidos (y en general en la Mecánica de Medios Continuos) aparecen otro tipo adicional de fuerzas asociadas a la interacción de unas moléculas con otras. Estas fuerzas son de origen molecular y se deben al intercambio de cantidad de movimiento por colisiones de las moléculas de una partícula fluida con las moléculas de las partículas fluidas vecinas. Son, por tanto, fuerzas de muy corto alcance, apreciables sólo en distancias del orden de la longitud media que recorre una molécula típica entre colisiones *(camino libre medio),* y por ello se denominan **fuerzas de superficie.** Así, dada una superficie S en el interior de un fluido, por acción de las colisiones moleculares el fluido circundante ejercerá una fuerza sobre cada punto de la superficie que, por unidad de superficie (esfuerzo), denotaremos por $\vec{f}_n(\vec{x},t)$ (ver Fig. 7.1), siendo esta fuerza función, además de la posición del punto y del tiempo, de la orientación $\vec{n}$ de la superficie en ese punto. Para describir por tanto el estado de fuerzas superficiales de un determinado fluido hay que especificar una doble infinitud de esfuerzos: para los infinitos puntos del fluido hay que dar el esfuerzo en las infinitas orientaciones de todas las superficies

[1] Además de la fuerza de Lorentz (7.4), en medios dieléctricos no uniformes aparecen otras como la fuerza dieléctrica y la fuerza de electrostricción. El alumno interesado en los fenómenos electromagnéticos en la dinámica de los fluidos puede consultar, por ejemplo, el texto clásico de Landau y Lifshitz *Electrodynamics of Continuous Media* (Pergamon, Nueva York, 1984), del que existe traducción castellana en la editorial Reverté. Para un texto más ingenieril sobre estos fenómenos se puede consultar *Engineering Magnetohydrodynamics,* de G. W. Sutton y A. Sherman (Dover, Nueva York, 2006).

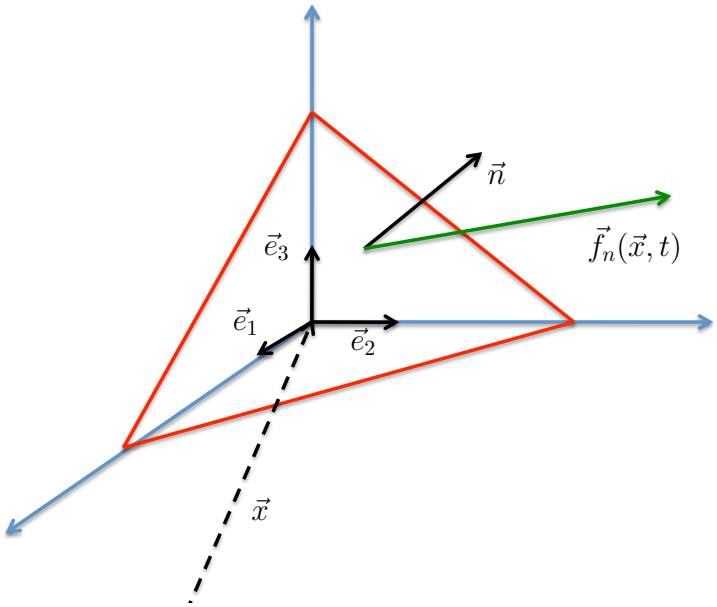


Figura 7.2: Fuerzas sobre un elemento de volumen.

que pasan por ese punto. Sin embargo, veremos a continuación que, en virtud de los teoremas de conservación de la cantidad de movimiento y del momento cinético, en realidad solo es necesario conocer seis cantidades escalares (un tensor simétrico) por cada punto del fluido para especificar todas las fuerzas de superficie.

7.2. Tensor de esfuerzos

Sea $\vec{f}_n(\vec{x},t)ds$ la fuerza ejercida en el instante t por acción de la interacción molecular sobre el elemento de superficie $ds\vec{n}$ que pasa por el punto $\vec{x}$; es decir, $\vec{f}_n(\vec{x},t)$ es el esfuerzo (fuerza por unidad de superficie) ejercido sobre una superficie de orientación $\vec{n}$, en $\vec{x}$ y t. Vamos a demostrar que el esfuerzo $\vec{f}_n(\vec{x},t)$ está completamente determinado si se conocen en el punto $\vec{x}$ y en el instante t los esfuerzos en tres planos mutuamente perpendiculares. Para ello consideramos un elemento de volumen tetraédrico formado por los tres planos coordenados que pasan por $\vec{x}$ y un plano inclinado orientado según la normal hacia fuera $\vec{n}$ (ver figura 7.2). Si consideramos este elemento de volumen como un volumen fluido y aplicamos la segunda ley de Newton, obtenemos:

$$\frac{d(\rho\vec{v})}{dt}dV = \vec{f}_n dA - \vec{f}_1 dA_1 - \vec{f}_2 dA_2 - \vec{f}_3 dA_3 + \vec{f}_v dV\,, \tag{7.5}$$

donde dV es el volumen del elemento; dA, dA_1, dA_2 y dA_3 son las áreas de las caras del tetraedro, y $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ y $\vec{f}_3$ son los esfuerzos sobre $\vec{e}_1 dA_1, \vec{e}_2 dA_2$ y $\vec{e}_3 dA_3$, respectivamente (obsérvese que $\vec{n}$ está dirigido hacia fuera del tetraedro, mientras que $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ y $\vec{e}_3$ apuntan hacia el interior en cada una de sus respectivas caras, por ello la diferencia de signos en los distintos términos de la expresión anterior). Si dividimos por dA y hacemos $dA \to 0$, los

términos correspondientes a las fuerzas volumétricas y a la *aceleración* desaparecen, puesto que $dV/dA \to 0$ si $dA \to 0$. Teniendo en cuenta que

$$dA_i = dA\vec{n} \cdot \vec{e}_i \,, \quad i = 1, 2, 3 \,, \tag{7.6}$$

la expresión (7.5) queda

$$\vec{f_n} = n_1\vec{f_1} + n_2\vec{f_2} + n_3\vec{f_3} \,, \tag{7.7}$$

donde $n_i \equiv \vec{n} \cdot \vec{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ es la componente i de $\vec{n}$ en el sistema coordenado $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Queda, pues, demostrado que $\vec{f_n}(\vec{x}, t)$ está determinado si $\vec{f_1}(\vec{x}, t), \vec{f_2}(\vec{x}, t)$ y $\vec{f_3}(\vec{x}, t)$ son conocidos.

Para escribir la expresión anterior en notación tensorial se suele definir

$$\overline{\overline{\tau}} \equiv \vec{e}_1\vec{f_1} + \vec{e}_2\vec{f_2} + \vec{e}_3\vec{f_3} \,, \tag{7.8}$$

de forma que la ecuación (7.7) queda

$$\vec{f_n} = \vec{n} \cdot \overline{\overline{\tau}} \,. \tag{7.9}$$

El tensor $\overline{\overline{\tau}}(\vec{x}, t)$ se denomina **tensor de esfuerzos.** Si los componentes de los vectores $\vec{f_1}, \vec{f_2}$ y $\vec{f_3}$ se designan por $(\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{13}), (\tau_{21}, \tau_{22}, \tau_{23})$ y $(\tau_{31}, \tau_{32}, \tau_{33})$, es decir,

$$\overline{\overline{\tau}} = \tau_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} \,, \tag{7.10}$$

τ_{ij} representa la componente j del esfuerzo que actúa sobre la dirección coordenada $\vec{e}_i$ en el punto $\vec{x}$ en el instante t. Obsérvese que el desarrollo anterior es válido para cualquier sistema coordenado ortogonal, no necesariamente cartesiano.

Resumiendo, para conocer el esfuerzo ejercido sobre una superficie de orientación $\vec{n}$ cualquiera que pasa por un punto $\vec{x}$, basta conocer el tensor de esfuerzos en ese punto. Son por tanto nueve el número de cantidades que se necesitan conocer por cada punto para definir su estado de esfuerzos (¡en vez de infinito!).

En realidad son necesarias solo seis cantidades escalares, pues el tensor de esfuerzos es **simétrico:**

$$\overline{\overline{\tau}} = \overline{\overline{\tau}}^T \quad \text{o} \quad \tau_{ij} = \tau_{ji} \,. \tag{7.11}$$

Esta propiedad del tensor de esfuerzos deriva del principio físico de la conservación del momento cinético aplicado a un elemento de volumen diferencial.[2] De esta manera, el principio de cantidad de movimiento (o Segunda Ley de Newton) aplicado a un volumen fluido infinitesimal proporciona la reducción de la caracterización de las fuerzas de superficie al conocimiento de un tensor de esfuerzos en cada punto, y el principio de conservación del momento cinético aplicado a un volumen fluido infinitesimal reduce este tensor a uno simétrico. De hecho, en algunos textos de Mecánica de los Medios Continuos se toma como principio físico la propia simetría del tensor de esfuerzos en lugar de la conservación del momento cinético.

[2]Para una demostración ver, por ejemplo, Fernández Feria (2005).

7.3. Ecuación de cantidad de movimiento

Una vez que se han caracterizado las fuerzas de superficie y las fuerzas másicas ya se puede expresar de forma adecuada el principio de cantidad de movimiento aplicado a un volumen fluido $V_f(t)$ enunciado en la sección 5.3.2:

$$\frac{d}{dt}\int_{V_f(t)} \rho\vec{v}dV = \int_{S_f(t)} \vec{n}\cdot\overline{\overline{\tau}}ds + \int_{V_f(t)} \rho\vec{f}_m dV\,, \tag{7.12}$$

donde $\vec{f}_m$ son las fuerzas másicas por unidad de masa (aceleración de la gravedad y aceleración del sistema de referencia; suponemos que no existen fuerzas electromagnéticas). Aplicando el Teorema de Transporte de Reynolds, se tiene

$$\int_{V_f} \frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{v})dV + \int_{S_f} \rho\vec{v}\vec{v}\cdot\vec{n}ds - \int_{S_f} \vec{n}\cdot\overline{\overline{\tau}}ds = \int_{V_f} \rho\vec{f}_m dV\,, \tag{7.13}$$

que expresa que la variación de la cantidad de movimiento contenida en V_f más el flujo convectivo a través de la superficie que lo engloba es igual a las fuerzas de superficie más las fuerzas másicas que actuan sobre el volumen fluido.

La ecuación anterior se ha escrito de forma que sea patente un segundo significado físico del tensor de esfuerzos. Por una parte, acabamos de ver que el tensor de esfuerzos representa la acción de las fuerzas de superficie por unidad de superficie. Pero, por otra, también se puede interpretar como el *flujo molecular* de cantidad de movimiento que, como sabemos, constituye el origen microscópico de las fuerzas de superficie. Así, el flujo de cantidad de movimiento a través de una superficie S_f consta de dos términos, un flujo convectivo asociado a la velocidad *media* del fluido, y un flujo molecular debido al intercambio de cantidad de movimiento por colisiones de las moléculas a un lado y otro de S_f. El flujo total de cantidad de movimiento por unidad de superficie es pues el tensor

$$\rho\vec{v}\vec{v} - \overline{\overline{\tau}}\,. \tag{7.14}$$

Por tanto, la ecuación (7.13) se puede interpretar de un modo más *natural* como: la variación de la cantidad de movimiento contenida en V_f más el flujo *total* de cantidad de movimiento a través de la superficie que lo contiene es igual a la acción de las fuerzas másicas que actúan sobre él.

Otra ecuación que, sobre todo, se usa en forma integral es la ecuación de **conservación del momento cinético** o momento de la cantidad de movimiento:

$$\frac{d}{dt}\int_{V_f(t)} \rho\vec{v}\wedge\vec{x}dV = \int_{S_f(t)} (\vec{n}\cdot\overline{\overline{\tau}})\wedge\vec{x}ds + \int_{V_f(t)} \rho\vec{f}_m\wedge\vec{x}dV \tag{7.15}$$

o

$$\int_{V_f} \frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{v}\wedge\vec{x})dV + \int_{S_f} \rho(\vec{v}\wedge\vec{x})\vec{v}\cdot\vec{n}ds = \int_{S_f(t)} (\vec{n}\cdot\overline{\overline{\tau}})\wedge\vec{x}ds + \int_{V_f(t)} \rho\vec{f}_m\wedge\vec{x}dV\,. \tag{7.16}$$

Aplicadas a un volumen de control arbitrario $V_c(t)$ cuya superficie se mueve a una velocidad $\vec{v}_c$, las ecuaciones integrales de cantidad de movimiento y de momento cinético, (7.12) y (7.15), se escriben:

$$\frac{d}{dt}\int_{V_c(t)} \rho\vec{v}dV + \int_{S_c} \rho\vec{v}(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot\vec{n}ds = \int_{S_c} \vec{n}\cdot\overline{\overline{\tau}}ds + \int_{V_c} \rho\vec{f}_m dV\,, \tag{7.17}$$

$$\frac{d}{dt}\int_{V_c(t)} \rho\vec{v}\wedge\vec{x}dV + \int_{S_c} \rho(\vec{v}\wedge\vec{x})(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot\vec{n}ds = \int_{S_c} (\vec{n}\cdot\overline{\overline{\tau}})\wedge\vec{x}ds + \int_{V_c} \rho\vec{f}_m\wedge\vec{x}dV\,. \tag{7.18}$$

La **forma diferencial de la ecuación de cantidad de movimiento** se obtiene, análogamente a como se hizo con la ecuación de continuidad, aplicando el Teorema de Gauss al segundo término de (7.13) e igualando el integrando a cero, puesto que V_f es arbitrario:

$$\frac{\partial\rho\vec{v}}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{v}\vec{v}) = \nabla\cdot\overline{\overline{\tau}} + \rho\vec{f}_m\,. \tag{7.19}$$

El significado físico de los distintos términos es, respectivamente: variación local de cantidad de movimiento por unidad de volumen; flujo convectivo de cantidad de movimiento por unidad de volumen; fuerzas de superficie por unidad de volumen o, cambiado de signo, flujo molecular (o difusivo) de cantidad de movimiento por unidad de volumen, y fuerzas másicas por unidad de volumen. Esta ecuación fue originalmente derivada por Cauchy en 1822, usando ideas previas de Euler sobre la mecánica de los medios contínuos. Cauchy introdujo el concepto de tensor de esfuerzos y demostró su simetría, llegando a una ecuación similar a (7.19). Así escrita, esta ecuación es general para cualquier medio contínuo.

Para que la ecuación (7.19) pueda ser utilizada es necesario obtener alguna expresión del tensor de esfuerzos $\overline{\overline{\tau}}$ en términos de magnitudes conocidas e incógnitas del problema ($\rho, \vec{v}$, etc.), es decir, una relación constitutiva para $\overline{\overline{\tau}}$. La relación constitutiva que damos a continuación caracteriza a los llamados fluidos Newtonianos y fue formulada por Stokes a mediados del siglo XIX.

7.4. Fluidos Newtonianos. Ley de Stokes

Independientemente de la ley constitutiva para $\overline{\overline{\tau}}$, es conveniente primero separar la parte del tensor de esfuerzos correspondiente a un fluido en reposo de la parte *dinámica* del tensor. Si un fluido está en reposo, la fuerza de superficie en cualquier punto $\vec{x}$ y en cualquier superficie orientada según $\vec{n}$, $\vec{f}_n(\vec{x},t)$, tiene que ser normal a la superficie, puesto que en caso contrario la componente tangencial a la superficie de $\vec{f}_n$, o componente de *cizalla,* crearía un movimiento tangencial o de *cortadura.* Es decir, en un fluido en reposo se tiene

$$\vec{f}_n(\vec{x},t) = -p(\vec{x},t)\vec{n}\,, \tag{7.20}$$

donde p es la **presión** del fluido en el punto $\vec{x}$ en el instante t, o fuerza por unidad de superficie normal a la superficie y dirigida en sentido opuesto a $\vec{n}$ (contra la superficie). Esta presión, llamada hidrostática, coincide con la presión definida en la Termodinámica si el fluido está en reposo. Cuando el fluido está en movimiento ambas presiones coinciden si se cumple la hipótesis de equilibrio termodinámico local. Como la Mecánica de Fluidos hace uso de esta hipótesis (ver lección siguiente), a partir de ahora no se hará distinción entre ambas presiones, hidrostática y termodinámica, y se utilizará por tanto la *misma* presión en las ecuaciones de estado del fluido (termodinámica) y en las ecuaciones del movimiento.

De acuerdo con (7.20) y (7.9), en un fluido en reposo se tiene

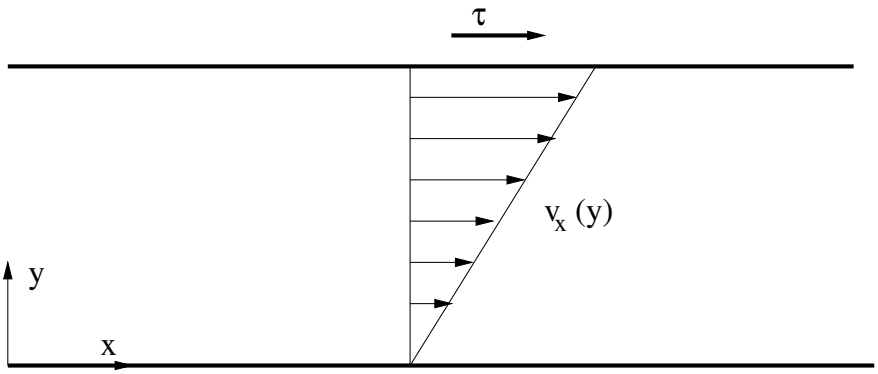


Figura 7.3: Movimiento entre dos placas originado por un esfuerzo tangencial.

$$\overline{\overline{\tau}} = -p\overline{\overline{I}} \quad \text{o} \quad \tau_{ij} = -p\delta_{ij}\,. \tag{7.21}$$

Para un fluido que no está en reposo se suele descomponer $\overline{\overline{\tau}}$ en dos partes,

$$\overline{\overline{\tau}} \equiv -p\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\tau}}'\,, \tag{7.22}$$

donde, por definición, $\overline{\overline{\tau}}'$ es la desviación del tensor de esfuerzos con respecto a la presión, también llamado, por razones que ahora veremos, **tensor de esfuerzos viscosos.**

Experimentalmente se ha observado que muchos fluidos obedecen a una ley lineal entre $\overline{\overline{\tau}}'$ y el tensor de velocidades de deformación. Originalmente, Newton postuló que, para un determinado tipo de flujo que él consideró, existe una ley lineal entre el esfuerzo tangencial aplicado a una superficie de un fluido y el gradiente de velocidades normal a la superficie. Por ejemplo, si sobre el fluido contenido entre dos placas planas paralelas se aplica un esfuerzo $\tau(\equiv \tau'_{xy})$ a través de una de las placas (ver figura 7.3), se produce un movimiento cuyo gradiente de velocidades normal a la placa viene dado por

$$\tau = \mu\frac{\partial v_x}{\partial y}\,, \tag{7.23}$$

donde μ es una propiedad del fluido (que depende principalmente de la temperatura) denominada **viscosidad.** Esta ley lineal entre esfuerzos y gradientes de velocidades se puede generalizar desde un punto de vista fenomenológico en la forma:

$$\overline{\overline{\tau}}' = \overline{\overline{\overline{\overline{A}}}} : \nabla\vec{v}\,, \tag{7.24}$$

siendo $\overline{\overline{\overline{\overline{A}}}}$ un tensor de cuarto orden que, en general, depende de la posición y el tiempo, pero no de la velocidad. La expresión anterior constituye la relación lineal más general entre los dos tensores de segundo orden $\overline{\overline{\tau}}'$ y $\nabla\vec{v}$. Esta relación debe ser una propiedad constitutiva del fluido y, por tanto, no debe depender del sistema de coordenadas elegido. Como la parte antisimétrica de $\nabla\vec{v}$, es decir el tensor $\overline{\overline{\xi}}$, representa un giro como sólido rígido alrededor de cada punto con velocidad angular $\vec{\omega}/2$, si se elige un sistema coordenado que en cada punto gire con esa velocidad, $\overline{\overline{\xi}}$ es nulo, por lo que $\overline{\overline{\tau}}'$ no puede depender de él [si no hay movimiento, el único esfuerzo que puede haber es el asociado a la presión, ecuación (7.21)]. Por tanto, $\overline{\overline{\tau}}'$ depende sólo del tensor de velocidades de deformación $\overline{\overline{\gamma}}$, siendo la relación lineal más general

$$\overline{\overline{\tau}}' = \overline{\overline{\overline{A}}} : \overline{\overline{\gamma}}\,, \tag{7.25}$$

o, en coordenadas cartesianas,

$$\tau'_{ij} = A_{ijkl}\gamma_{kl} = A_{ijkl}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_l} + \frac{\partial v_l}{\partial x_k}\right) . \tag{7.26}$$

Otra forma de llegar a (7.25) de (7.24) es simplemente apelando a la simetría de $\overline{\overline{\tau}}'$: como $\overline{\overline{\tau}}'$ es un tensor simétrico, sólo puede depender linealmente de la parte simétrica de $\nabla\vec{v}$, es decir, de $\overline{\overline{\gamma}}$.

La ley anterior fue deducida (aunque en una forma más simplificada que veremos más adelante) por Stokes en 1845, generalizando la idea que Newton formuló 150 años antes. Los fluidos que satisfacen esa ley constitutiva se denominan Newtonianos. Experimentalmente se encuentra que una gran mayoría de los fluidos, tanto líquidos como gases, en casi todas las condiciones de interés, obedecen una ley de ese tipo, aunque sólo sea aproximadamente. Teóricamente se demuestra (a través de la Teoría Cinética de Gases)[3] que bajo la hipótesis de equilibrio termodinámico local (ver lección siguiente) los gases satisfacen la Ley de Stokes. Existen, sin embargo, fluidos, especialmente líquidos constituidos por grandes moléculas, en los que $\overline{\overline{\tau}}'$ no depende linealmente de $\overline{\overline{\gamma}}$, o depende además de otras magnitudes fluidas. Estos fluidos no-Newtonianos tienen bastante interés en algunas aplicaciones, sobre todo en la industria química (plásticos, pinturas, etc.), pero no serán considerados en este curso introductorio a la Mecánica de Fluidos.

La Ley de Stokes (7.25) se puede simplificar considerablemente si el fluido es isotrópico, como ocurre en la mayoría de las situaciones de interés. De hecho, en su derivación original, Stokes hizo tres hipótesis, dos de las cuales ya han sido utilizadas en la derivación de (7.25): relación lineal entre $\overline{\overline{\tau}}'$ y $\overline{\overline{\gamma}}$, e hipótesis de que si no hay movimiento $\overline{\overline{\tau}}'$ es nulo (es decir, si no hay movimiento $\overline{\overline{\tau}} = -p\overline{\overline{I}}$). La tercera hipótesis de Stokes fue que la relación entre $\overline{\overline{\tau}}'$ y $\overline{\overline{\gamma}}$ es isotrópica en cualquier sistema coordenado. Esta condición, junto con las anteriores, simplifica enormemente la relación (7.25). Para empezar, como (7.25) es lineal, los tensores $\overline{\overline{\tau}}'$ y $\overline{\overline{\gamma}}$ pueden ser diagonalizados simultáneamente con la misma transformación. Esto hace que esa relación se pueda escribir como $\vec{\tau}' = \overline{\overline{B}}\cdot\vec{\gamma}$, donde $\vec{\tau}' \equiv (\tau'_1, \tau'_2, \tau'_3)$ y $\vec{\gamma} \equiv (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, siendo τ'_i y γ_i, $i = 1, 2, 3$, los autovalores de $\overline{\overline{\tau}}'$ y $\overline{\overline{\gamma}}$, respectivamente. Es decir, las 81 constantes de $\overline{\overline{\overline{A}}}$ se han reducido a las nueve de $\overline{\overline{B}}$. Por otro lado, si el sistema es isotrópico, un giro de coordenadas no debe cambiar la relación entre $\vec{\tau}'$ y $\vec{\gamma}$. Como un giro permite permutar los autovalores de ambos tensores, cada autovalor τ'_i sólo puede depender del correspondiente γ_i y de la traza $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$, que es invariante frente a las rotaciones:

$$\tau'_i = 2\mu\gamma_i + \lambda(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)\,, \quad i = 1, 2, 3\,, \tag{7.27}$$

donde μ y λ son constantes. En forma tensorial, se tiene

$$\overline{\overline{\tau}}' = 2\mu\overline{\overline{\gamma}} + \lambda\nabla\cdot\vec{v}\overline{\overline{I}}\,. \tag{7.28}$$

[3]El alumno interesado puede consultar, por ejemplo, S. CHAPMAN y T.G. COWLING, 1970, *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases* (Cambridge University Press, New York; 3^a edición).

Así, las 81 constantes del tensor original A_{ijkl} se han reducido a sólo dos. Esta relación se suele escribir utilizando la descomposición del tensor $\overline{\overline{\gamma}}$ dada en la sección 4.2, $\overline{\overline{\gamma}} = \overline{\overline{\gamma}}' + \overline{\overline{\gamma}}''$, siendo $\overline{\overline{\gamma}}'$ la parte sin traza y $\overline{\overline{\gamma}}''$ diagonal, de forma que $\overline{\overline{\gamma}}''$ contiene todo el movimiento asociado al cambio de volumen y $\overline{\overline{\gamma}}'$ está asociado a la deformación *pura,* sin cambio de volumen:

$$\overline{\overline{\tau}}' = 2\mu\overline{\overline{\gamma}}' + \mu_v \nabla \cdot \vec{v}\overline{\overline{I}} = 2\mu \left[\frac{1}{2}(\nabla\vec{v} + \nabla\vec{v}^T) - \frac{1}{3}\nabla \cdot \vec{v}\overline{\overline{I}}\right] + \mu_v \nabla \cdot \vec{v}\overline{\overline{I}}\,, \tag{7.29}$$

donde, por comparación con (7.32),

$$\mu_v = \lambda + \frac{2}{3}\mu\,. \tag{7.30}$$

El coeficiente μ se suele denominar **coeficiente de viscosidad** o simplemente viscosidad, y está asociado a la capacidad de deformación *pura* del fluido bajo la acción de un esfuerzo cortante o de cizalla. El coeficiente μ_v, denominado **coeficiente volumétrico de viscosidad,** está asociado a la deformación volumétrica provocada por esfuerzos normales. Así, el esfuerzo normal medio de un fluido Newtoniano es

$$\frac{1}{3}\text{traza}(\overline{\overline{\tau}}) = \frac{1}{3}\text{traza}(-p\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\tau}}') = -p + \mu_v \nabla \cdot \vec{v}\,; \tag{7.31}$$

es decir, no todo el esfuerzo normal está asociado con la presión, sino que parte de él está asociado al movimiento del fluido tendente a cambiar su volumen. La Teoría Cinética de Gases demuestra que para gases monoatómicos, es decir, gases cuyas moléculas no tienen estructura interna, μ_v es idénticamente nulo, siendo distinto de cero para gases cuyas moléculas pueden almacenar algún tipo de energía distinta de la cinética o translacional. En otras palabras, μ_v está relacionado con la capacidad de almacenar energía no cinética por las moléculas de un fluido bajo la acción de esfuerzos normales, mientras que la presión está relacionada con la energía cinética de las moléculas. En los líquidos el coeficiente μ_v es irrelevante, puesto que al ser incompresibles $\nabla \cdot \vec{v} = 0$. Es decir, para los **líquidos** se tiene

$$\overline{\overline{\tau}}' = 2\mu\overline{\overline{\gamma}} = \mu(\nabla\vec{v} + \nabla\vec{v}^T)\,, \tag{7.32}$$

que es la relación originariamente debida a Stokes.

Los coeficientes μ y μ_v dependen del estado termodinámico del fluido, muy especialmente de la temperatura (para los gases se demuestra a partir de la Teoría Cinética que son independientes de la presión). En general, la viscosidad de los líquidos disminuye al aumentar la temperatura, ocurriendo lo contrario para los gases.

7.5. Ecuación de Navier-Stokes

La ecuación resultante de introducir la ley de Stokes en la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento (7.19) se suele denominar ecuación de Navier-Stokes:[4]

$$\frac{\partial\rho\vec{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{v}\vec{v}) = -\nabla p + \nabla \cdot [\mu(\nabla\vec{v} + \nabla\vec{v}^T)] + \nabla[(\mu_v - \frac{2}{3}\mu)\nabla \cdot \vec{v}] + \rho\vec{f}_m\,. \tag{7.33}$$

[4]Navier obtuvo la misma ecuación por un procedimiento distinto algo antes que Stokes, pero haciendo algunas hipótesis sobre las bases moleculares de los efectos viscosos que no son del todo correctas.

Utilizando la ecuación de continuidad (6.4), esta ecuación se puede escribir como

$$\rho\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p + \nabla\cdot[\mu(\nabla\vec{v} + \nabla\vec{v}^T)] + \nabla[(\mu_v - \frac{2}{3}\mu)\nabla\cdot\vec{v}] + \rho\vec{f}_m\,. \tag{7.34}$$

El término de fuerzas de superficie $\nabla\cdot\overline{\overline{\tau}}$ de la ecuación (7.19) ahora se ha desglosado en tres: uno que representa las fuerzas de presión por unidad de volumen, y otros dos que representan las fuerzas de viscosidad (relacionadas con μ y μ_v) por unidad de volumen. En el caso de los líquidos esta ecuación se reduce considerablemente debido a que al ser ρ = constante, $\nabla\cdot\vec{v} = 0$. Si, además, las variaciones de temperatura no son muy importantes y se puede suponer que el coeficiente de viscosidad es constante, la ecuación queda:

$$\rho\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p + \mu\nabla^2\vec{v} + \rho\vec{f}_m\,, \tag{7.35}$$

donde se ha hecho uso de $\nabla\cdot(\nabla\vec{v})^T = \nabla(\nabla\cdot\vec{v}) = 0$. En el caso en que las fuerzas másicas deriven de un potencial U, $\vec{f}_m = -\nabla U$, la ecuación anterior se puede escribir en la forma simple

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla\left(\frac{p}{\rho} + U\right) + \nu\nabla^2\vec{v}, \tag{7.36}$$

donde

$$\nu = \mu/\rho \tag{7.37}$$

es el **coeficiente de viscosidad cinemática.** Una particularidad importante de esta ecuación es que forma, junto con la ecuación de continuidad $\nabla\cdot\vec{v} = 0$, un sistema cerrado para las variables $\vec{v}$ y p. En el caso de los gases, aparte de que μ y μ_v puedan depender de la temperatura, la densidad ρ no es constante, con lo que hay que completar el sistema de ecuaciones anterior [continuidad (6.4) y cantidad de movimiento (7.34)] con la ecuación de conservación de la energía y las ecuaciones de estado, que se verán en la próxima lección (aparte de las ecuaciones constitutivas para μ, μ_v, etc.). Así, para un líquido con viscosidad constante el problema mecánico está desacoplado del térmico (aunque para resolver el problema térmico veremos que es necesario haber resuelto previamente el problema mecánico), mientras que para los gases los problemas mecánico y térmico están, en general, íntimamente ligados. Esto nos va a permitir resolver *ya* problemas de flujos incompresibles (de flujos de líquidos básicamente) sin necesidad de esperar a derivar la ecuación de la energía en la lección siguiente.

Referencias.

- D. J. ACHESON, 1990. Capítulo 6.
- R. ARIS, 1989. Capítulo 5.
- G. K. BATCHELOR, 1967. Capítulo 3.
- A. CHORIN y J.E. MARSDEN, 1993. Capítulo 1.
- R. FERNÁNDEZ FERIA, 2005. Capítulo 7.

CAPÍTULO 8

Ecuación de la energía

8.1. Vector flujo de calor. Ley de Fourier

Análogamente al transporte de masa y de cantidad de movimiento, la energía (calor) puede ser transportada mediante dos mecanismos: convectivamente por el movimiento del fluido y difusivamente por transporte molecular. El transporte molecular viene caracterizado por q_n en la ecuación (5.10), que de momento es desconocido, pero que sabemos depende, además de la posición y el tiempo, de la orientación de la superficie. Estamos, pues, ante una situación análoga a la de las fuerzas de superficie, en la que para caracterizar estas fuerzas (asimilables a un flujo molecular de cantidad de movimiento) en cada instante era necesario definir una doble infinitud de magnitudes vectoriales: para cada punto y para cada orientación de la superficie; la única diferencia es que ahora las magnitudes q_n son escalares. Similarmente a la definición del tensor de esfuerzos $\overline{\overline{\tau}}$, veremos a continuación que el flujo de calor q_n, para cada orientación del elemento de superficie $dA\vec{n}$ en $(\vec{x}, t)$, viene completamente especificado si se conoce un cierto vector $\vec{q}(\vec{x}, t)$, es decir, sólo tres cantidades escalares en cada punto. En efecto, sea un elemento de volumen tetraédrico que tiene como vértice el punto $\vec{x}$ y sus caras están formadas por tres planos ortogonales dirigidos según $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, y el elemento de superficie $dA\vec{n}$ (ver figura 8.1). Aplicando el principio de conservación de la energía (5.10) en un sistema de referencia donde $\vec{v}$ es localmente cero y despreciando términos volumétricos de orden $(dA)^{3/2}$ frente a dA, se tiene

$$O(dA)^{3/2} = q_1 dA_1 + q_2 dA_2 + q_3 dA_3 + q_n dA\,, \tag{8.1}$$

donde q_n, q_1, q_2 y q_3 son los valores medios del flujo de calor a través de las cuatro caras del tetraedro que, salvo errores de orden mayor, se pueden aproximar por los valores en el punto $\vec{x}$. Usando $dA_i = dA\vec{n} \cdot \vec{e}_i = dAn_i$, $i = 1, 2, 3$, dividiendo por dA y haciendo $dA \to 0$, se obtiene

$$-q_n = n_1 q_1 + n_2 q_2 + n_3 q_3\,. \tag{8.2}$$

Definiendo el vector $\vec{q}(\vec{x}, t)$,

$$\vec{q} \equiv q_1 \vec{e}_1 + q_2 \vec{e}_2 + q_3 \vec{e}_3\,, \tag{8.3}$$

llamado vector flujo de calor, la ecuación (8.2) se escribe simplemente

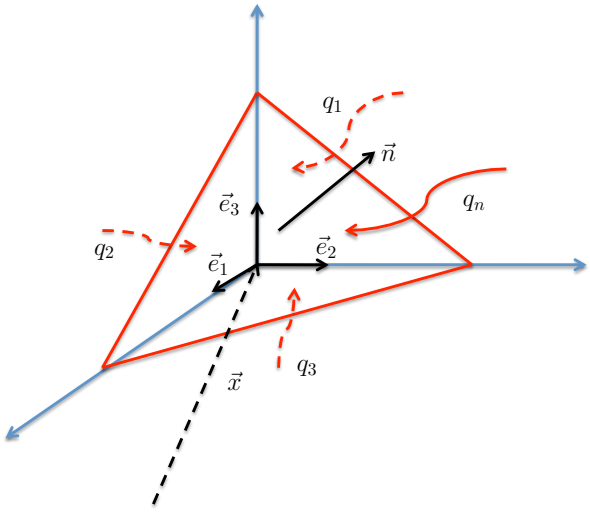


Figura 8.1: Vector flujo de calor.

$$q_n = -\vec{n} \cdot \vec{q}\,. \tag{8.4}$$

Los componentes q_1, q_2 y q_3 de $\vec{q}$ son pues los flujos de calor en $(\vec{x}, t)$ a través de la unidad de superficie orientadas en las direcciones coordenadas $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ y $\vec{e}_3$, respectivamente, y son tomados positivos cuando el flujo de calor tiene el sentido de esas direcciones. La ecuación (8.4) muestra que el flujo de calor a través de la unidad de área orientada hacia cualquier dirección $\vec{n}$ queda completamente determinado cuando el vector flujo de calor $\vec{q}$ se conoce en el punto considerado (o, de forma alternativa, cuando se conoce a través de tres direcciones mutuamente perpendiculares que pasan por dicho punto).

Fenomenológicamente se encuentra que en un fluido de composición homogénea existe una relación lineal entre el vector flujo de calor y el gradiente de temperatura:

$$\vec{q} = \overline{\overline{K}} \cdot \nabla T\,, \tag{8.5}$$

siendo $\overline{\overline{K}}$ el tensor de conductividad térmica. Para un medio isotrópico el tensor $\overline{\overline{K}}$ se reduce a una sola constante, $\overline{\overline{K}} = -K\overline{\overline{I}}$,

$$\vec{q} = -K\nabla T\,, \tag{8.6}$$

donde K es la **conductividad térmica,** que es una propiedad termodinámica (constitutiva) del fluido, función de la temperatura, y en menor grado de la presión. El signo menos se ha introducido para que K sea positivo, ya que el calor *fluye* hacia las temperaturas decrecientes. La relación anterior se llama **Ley de Fourier,** quien la formuló hacia 1822 en su famoso tratado *Théorie analytique de la chaleur* (en el cual también introdujo las famosas series trigonométricas que llevan su nombre, y que fueron el germen de la teoría de funciones ortogonales y su aplicación a la resolución de problemas de contorno). Esta ley se puede formular de una forma teórica rigurosa para los gases a través de la Teoría Cinética si se cumple la hipótesis de equilibrio termodinámico local (ver más adelante).

8.2. Ecuación de conservación de la energía

Introduciendo el vector flujo de calor (8.4) y el tensor de esfuerzos (7.9) en el principio de conservación de la energía (5.10) aplicado a un volumen fluido $V_f(t)$, se tiene

$$\frac{d}{dt}\int_{V_f(t)} \rho(e+\frac{1}{2}v^2)dV = \int_{V_f} \frac{\partial}{\partial t}[\rho(e+\frac{1}{2}v^2)]dV + \int_{S_f} \rho(e+\frac{1}{2}v^2)\vec{v}\cdot\vec{n}ds$$
$$= \int_{V_f} \rho\vec{f}_m\cdot\vec{v}dV + \int_{S_f} \vec{v}\cdot\overline{\overline{\tau}}\cdot\vec{n}ds - \int_{S_f}\vec{q}\cdot\vec{n}ds + \int_{V_f} Q_r dV\,, \tag{8.7}$$

donde e y $v^2/2$ son las energías interna y cinética, respectivamente, por unidad de masa, $\vec{f}_m$ son las fuerzas másicas por unidad de masa y Q_r es el calor aportado por unidad de tiempo y unidad de volumen al fluido (por radiación, reacción química, etc.). Esta ecuación nos dice que la velocidad de incremento de la energía total (cinética más interna) contenida en un volumen fluido es igual al trabajo por unidad de tiempo de las fuerzas (másicas y de superficie) que actúan sobre él, más el calor por unidad de tiempo transferidos a través de las paredes y el calor por unidad de tiempo generado (por reacción química, radiación, etc.) en el interior del volumen.

En la expresión anterior se ha aplicado el Teorema de Transporte de Reynolds al primer miembro, desglosándose en dos: la velocidad de incremento de las energías interna y cinética en el volumen V_f en el instante t y la velocidad a la que estas energías son transportadas fuera del volumen V_f a través de la superficie S_f por el movimiento del fluido (convección de energía). El principio de conservación de la energía se puede aplicar a un volumen de control arbitrario $V_c(t)$ sin más que sustituir el primer miembro de (8.7) por [ver ecuación (5.6)]

$$\frac{d}{dt}\int_{V_c(t)} \rho(e+\frac{1}{2}v^2)dV + \int_{S_c} \rho(e+\frac{1}{2}v^2)(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot\vec{n}ds\,, \tag{8.8}$$

y cambiando V_f y S_f por V_c y S_c, respectivamente, en los restantes términos. Esta ecuación *integral* de la energía, junto con las correspondientes de conservación de la masa y de cantidad de movimiento derivadas anteriormente, son muy útiles en Ingeniería, pues permiten resolver globalmente algunas magnitudes de interés en un determinado volumen de control V_c sin necesidad de conocer los campos de las diferentes magnitudes fluidas localmente en cada punto del fluido (ver ejercicios a continuación de esta lección).

Procederemos ahora a derivar la ecuación de la energía en forma diferencial en sus diferentes formulaciones.

8.3. Ecuación diferencial de las energías interna y mecánica

Aplicando el Teorema de Gauss a las integrales de superficie de la ecuación (8.7), e igualando el integrando a cero se obtiene la siguiente ecuación diferencial para la energía total:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(e+\frac{1}{2}v^2\right)\right] + \nabla\cdot\left[\rho\left(e+\frac{1}{2}v^2\right)\vec{v}\right] = \rho\frac{D}{Dt}\left(e+\frac{1}{2}v^2\right)$$
$$= \rho\vec{f}_m\cdot\vec{v} + \nabla\cdot(-p\vec{v}) + \nabla\cdot(\overline{\overline{\tau}}'\cdot\vec{v}) - \nabla\cdot\vec{q} + Q_r\,, \tag{8.9}$$

donde se ha desglosado $\overline{\overline{\tau}} = -p\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\tau}}'$. Por otro lado, $\vec{q}$ y $\overline{\overline{\tau}}'$ vienen dados por las leyes de Fourier (8.6) y Stokes (7.29), respectivamente. En la primera igualdad de la ecuación anterior se ha reescrito el primer miembro en forma compacta haciendo uso de la ecuación de continuidad (6.4). El significado físico de los distintos términos de esta ecuación son, respectivamente: variación local de la energía total por unidad de volumen; flujo convectivo de la energía total por unidad de volumen; trabajo de las fuerzas másicas por unidad de volumen y tiempo; trabajo de las fuerzas de presión por unidad de volumen y tiempo; trabajo de las fuerzas de viscosidad por unidad de volumen y tiempo; flujo difusivo o molecular de calor por unidad de volumen, y generación de calor por unidad de volumen debido a la radiación y a las reacciones químicas.

La ecuación anterior para la energía total se suele separar en dos partes, una para la evolución de la energía interna y otra para la energía mecánica. La forma más directa de realizar este desglosamiento es obtener por separado la ecuación de la energía mecánica multiplicando la ecuación de cantidad de movimiento (7.34) escalarmente por $\vec{v}$:

$$\rho \frac{D}{Dt}\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\vec{v}\cdot\nabla p + \vec{v}\cdot(\nabla\cdot\overline{\overline{\tau}}') + \vec{v}\cdot\rho\vec{f}_m\,. \tag{8.10}$$

El primer miembro de esta ecuación es la suma de la variación local y flujo convectivo de la energía mecánica (o cinética) por unidad de volumen, mientras que el segundo representa el trabajo *mecánico* asociado a las fuerzas de presión, a las fuerzas viscosas y a las fuerzas másicas, respectivamente, por unidad de volumen y tiempo. Obsérvese que todo el trabajo de las fuerzas másicas es mecánico, es decir, se transforma en energía mecánica, mientras que los trabajos de las fuerzas de presión y viscosidad sólo en parte se transforman en energía mecánica, contribuyendo el resto a la energía interna, como veremos a continuación. Por otra parte los términos asociados al flujo de calor y a la generación de calor en (8.9) no contribuyen, como era de esperar, a la energía mecánica. La ecuación de la energía interna se obtiene sin más que restar (8.10) de (8.9):

$$\rho\frac{De}{Dt} = -p\nabla\cdot\vec{v} + \overline{\overline{\tau}}' : \nabla\vec{v} - \nabla\cdot\vec{q} + Q_r\,, \tag{8.11}$$

donde se ha hecho uso de $\nabla\cdot p\vec{v} = p\nabla\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\nabla p$ y $\nabla\cdot(\overline{\overline{\tau}}'\cdot\vec{v}) = \vec{v}\cdot(\nabla\cdot\overline{\overline{\tau}}') + \overline{\overline{\tau}}' : \nabla\vec{v}$. Los dos primeros términos del segundo miembro representan, respectivamente, el trabajo de *compresión* de las fuerzas de presión por unidad de volumen y tiempo (que es nulo para los líquidos ideales al ser éstos incompresibles), y el trabajo de disipación de las fuerzas viscosas, o simplemente disipación viscosa, por unidad de volumen y tiempo. Este último término se suele designar por Φ (función de disipación viscosa de Rayleigh) y es siempre igual o mayor que cero. Para un fluido Newtoniano se tiene:

$$\begin{aligned}\Phi \equiv \overline{\overline{\tau}}' : \nabla\vec{v} &= [\mu(\nabla\vec{v} + \nabla\vec{v}^T) + (\mu_v - \frac{2}{3}\mu)\nabla\cdot\vec{v}\overline{\overline{I}}] : \nabla\vec{v} \\ &= \frac{\mu}{2}[\nabla\vec{v} + \nabla\vec{v}^T - \frac{2}{3}\nabla\cdot\vec{v}\overline{\overline{I}}] : [\nabla\vec{v} + \nabla\vec{v}^T - \frac{2}{3}\nabla\cdot\vec{v}\overline{\overline{I}}] + \mu_v(\nabla\cdot\vec{v})^2 \geq 0\,,\end{aligned} \tag{8.12}$$

debido a que $\mu > 0$ y a que para cualquier tensor simétrico de segundo orden $\overline{\overline{A}}$ verifica $\overline{\overline{A}} : \overline{\overline{A}} \equiv A_{ij}A_{ij} \geq 0$ [en (8.12) se ha hecho también uso de la simetría de $\overline{\overline{\tau}}'$]. La función Φ representa la velocidad a la cual se genera calor (que se transforma en energía interna del fluido) debido a la disipación viscosa del flujo, por unidad de volumen.

Además de la ecuación de la energía interna (8.11), existen otras formulaciones de la ecuación de la energía que tiene más interés desde un punto de vista práctico. Pero previamente a su derivación es necesario introducir (repasar) algunas nociones de Termodinánica.

8.4. Breve repaso de Termodinámica. Hipótesis de equilibrio termodinámico local

La Termodinámica Clásica es una ciencia que trata de los estados de equilibrio de una sustancia, es decir, de estados en los que las magnitudes mecánicas y térmicas son independientes de la posición y del tiempo. Incluso cuando en Termodinámica Clásica se habla de la evolución de las magnitudes de una determinada sustancia, como por ejemplo la primera ley de la termodinámica, que establece la equivalencia del trabajo mecánico y del calor y de sus transformaciones mutuas, esta evolución es entre estados de equilibrio (transformaciones reversibles) y, por tanto, irreales por lo infinitamente lentas. Los resultados termodinámicos son pues *globalmente* aplicables *únicamente* a fluidos en reposo cuando sus propiedades son uniformes e independientes del tiempo. La pregunta que inmediatamente surge es si es posible aplicar los resultados de la Termodinámica Clásica a fluidos que no sólo no son uniformes, sino que se mueven, cambiando sus propiedades de punto a punto y en el tiempo, incluso drásticamente. Veremos a continuación que, aunque no se puedan aplicar, en general, los resultados termodinámicos clásicos globalmente a un determinado sistema fluido, si se pueden aplicar *localmente,* es decir, a cada partícula fluida individual, ya que éstas, en la mayoría de los fluidos y en las condiciones que usualmente se encuentran en la práctica, se hallan en equilibrio termodinámico local (o puntual).

Considérese el caso de un gas. Si en el gas existen inhomogeneidades, por ejemplo, si inicialmente hay un gradiente de temperatura o un gradiente de velocidad, y no existe ningún factor externo que los mantenga, al cabo de un cierto tiempo más o menos largo el gas se equilibra (se uniformiza su temperatura y su velocidad) por colisiones moleculares que intercambian energía y cantidad de movimiento entre las moléculas, igualando las temperaturas y las velocidades entre las distintas partículas fluidas. Es decir, las colisiones producen unos *flujos* macroscópicos de calor (energía) y cantidad de movimiento que tienden a disipar los gradientes que los provocan. Estos procesos hacia un estado de equilibrio termodinámico global son esencialmente irreversibles, y leyes como el Primer Principio de la Termodinámica sólo nos relaciona entre sí los dos estados de equilibrio inicial y final, sin decir nada del proceso intermedio (sólo el Segundo Principio de la Termodinámica nos proporciona ciertas desigualdades que deben verificarse durante el proceso). Ahora bien, un sistema puede no estar en equilibrio termodinámico global (puede existir, por ejemplo, un gradiente térmico), pero sí en equilibrio termodinámico local si las partículas fluidas que definen cada punto contienen un número suficiente de moléculas como para que las colisiones entre ellas las equilibren, dentro de cada partícula fluida, mucho más rápidamente que los cambios que se puedan producir en las magnitudes macroscópicas (por ejemplo, la temperatura). La condición para que esto ocurra es que la longitud característica de variación macroscópica (en nuestro ejemplo, la longitud típica en la cual la temperatura cambie apreciablemente, es decir, $L \sim |\nabla \ln T|^{-1}$) sea mucho mayor que el *camino libre medio* entre colisiones, λ, para que de esta forma exista un tamaño intermedio, $(\delta V)^{1/3}$, que permita definir la partícula fluida en equilibrio termodinámico: $\lambda \ll (\delta V)^{1/3} \ll L$. En otras palabras, si $\lambda \ll L$,

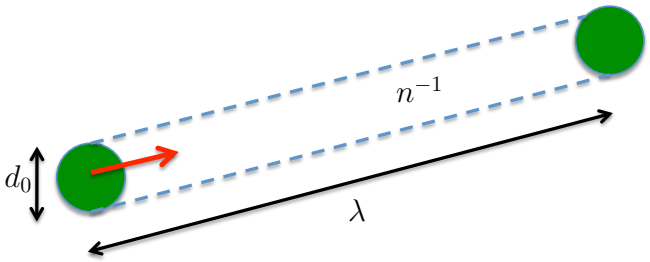


Figura 8.2: Camino libre medio entre colisiones.

una molécula experimenta un gran número de colisiones con sus vecinas antes de alcanzar regiones donde las magnitudes macroscópicas (temperatura en nuestro caso) cambien, de modo que gradualmente adapta su movimiento y energía al que existe localmente (se equilibra localmente), perdiendo *memoria* en las sucesivas colisiones de su situación primitiva.

En el caso de un gas, el orden de magnitud del camino libre medio λ se puede estimar suponiendo que las moléculas son esferas rígidas de tamaño efectivo d_0 (típicamente, $d_0 \sim 5\times 10^{-10}$ m); si el número de moléculas por unidad de volumen es n ($n \sim 2\times 10^{25}$ m^{-3} en condiciones normales), la distancia media que tiene que recorrer una molécula para *chocar* con otra es (ver figura 8.2)

$$\lambda \sim (d_0^2 n)^{-1} \sim 2\times 10^{-7}\mathrm{m} = 0{,}2\,\mu\mathrm{m}\,. \tag{8.13}$$

La condición $\lambda \ll L$ es pues más restrictiva que la correspondiente a la hipótesis de medio contínuo, $n^{-1/3} \ll L$, dada en la sección 1.2 ($n^{-1/3} \sim 4\times 10^{-9}$ m en condiciones normales). Sin embargo, salvo en casos muy extremos en que los gradientes son muy acusados (la longitud característica L muy pequeña, como por ejemplo en el movimiento de cuerpos a velocidades gigantescamente altas), o en el caso de que el gas esté muy enrarecido (n muy bajo, como por ejemplo en la parte alta de la atmósfera donde las moléculas están muy separadas unas de otras y las colisiones entre ellas son poco frecuentes), la condición de equilibrio termodinámico local, $\lambda \ll L$, se cumple en los movimientos de gases.

Se suele definir el llamado **número de Knudsen,**

$$Kn \equiv \frac{\lambda}{L}\,, \tag{8.14}$$

como la relación entre el camino libre medio molecular y el tamaño macroscópico característico. En términos de este número adimensional la condición de equilibrio termodinámico en gases se expresa $Kn \ll 1$. El argumento que acabamos de expresar utilizando longitudes características se puede también expresar en función de tiempos característicos: Si las magnitudes fluidas macroscópicas (por ejemplo la temperatura) fluctúan en el tiempo con una frecuencia característica cuyo orden de magnitud es $\omega = t_c^{-1}$, donde t_c es un tiempo característico de variación macroscópica ($t_c = |\partial \ln T/\partial t|^{-1}$), para que exista equilibrio termodinámico local la frecuencia entre colisiones moleculares, $\omega_c = \tau_c^{-1}$, tiene que ser mucho mayor que ω, para que así se den un gran número de colisiones antes de que las magnitudes macroscópicas cambien en el tiempo apreciablemente (en cada partícula fluida). Se tiene pues la condición adicional

$$\tau_c \ll t_c \qquad \text{o} \qquad Kn_t \equiv \frac{\tau_c}{t_c} \ll 1\,, \tag{8.15}$$

que se debe verificar simultáneamente con (8.14) para que exista equilibrio termodinámico local. Por supuesto, τ_c y λ están relacionados entre sí a través de la *velocidad media molecular,* c_T, que es función de la temperatura:

$$\lambda \sim c_T \tau_c\,, \quad c_T \sim \sqrt{kT/m}\,, \tag{8.16}$$

donde k es la constante de Boltzmann y m la masa de la molécula ($k \approx 1{,}381 \times 10^{-23}$ J/ K).

En los líquidos la interacción molecular es mucho más compleja que la simple colisión, por lo que la definición de camino libre medio o frecuencia de colisión no tiene mucho sentido. De todas formas, la hipótesis de equilibrio termodinámico local se suele verificar, siendo aún más escasas las situaciones en que no se cumple que en los gases.

La hipótesis de equilibrio termodinámico local redefine, como acabamos de ver, el *tamaño* $(\delta V)^{1/3}$ de las partículas fluidas. Pero si existe ese tamaño, las magnitudes fluidas, $\rho(\vec{x},t)$, $\vec{v}(\vec{x},t)$, $e(\vec{x},t)$, etc., definidas en cada *punto* fluido satisfacen, localmente, las relaciones de la Termodinámica Clásica. En lo que sigue supondremos que existe equilibrio termodinámico local y utilizaremos los importantes resultados de la Termodinámica para escribir otras formas de la ecuación de la energía y las ecuaciones de estado, siendo todas las relaciones locales (o puntuales). Como ya se ha comentado, la hipótesis de equilibrio termodinámico es un requisito indispensable, además, para la validez de las leyes constitutivas ya enunciadas como la ley de Stokes para el tensor de esfuerzos y la ley de Fourier para el flujo de calor.

La Termodinámica Clásica nos enseña que el estado de un fluido de composición homogénea en equilibrio termodinámico está definido si se conocen dos variables termodinámicas cualesquiera, por ejemplo, la presión y la densidad, (p,ρ), de forma que cualquier otra magnitud termodinámica es función de esas dos variables: $T = T(p,\rho), e = e(p,\rho)$, etc. Estas relaciones, que son las ecuaciones de estado del fluido en cuestión, se cumplen localmente si se verifica la hipótesis de equilibrio termodinámico local.

Se suelen distinguir dos tipos básicos de variables termodinámicas: las intensivas y las extensivas. Las **magnitudes extensivas** se pueden definir en un volumen finito y, generalmente, se expresan en función de su *densidad,* es decir, en función de la correspondiente magnitud por unidad de volumen. Magnitudes extensivas son la energía, la masa, etc. Por ejemplo, la energía interna de un volumen V de fluido sería:

$$E = \int_V \rho e dV\,, \tag{8.17}$$

donde e es la energía interna por unidad de masa, siendo ρe la energía interna por unidad de volumen. Las **magnitudes intensivas** no se pueden referir a un volumen finito, salvo que sea un fluido uniforme. Ejemplos son la temperatura, la presión, etc.; también, las magnitudes extensivas cuando se refieren a la unidad de volumen: ρ, ρe, etc. Como las ecuaciones de estado se refieren siempre a magnitudes intensivas (son relaciones de equilibrio local), no existen ecuaciones de estado para volúmenes finitos, salvo cuando las magnitudes fluidas sean uniformes en él.

Además de las variables termodinámicas que se han ido definiendo hasta ahora $(\rho, p, T, e, \vec{v})$, existen otras de interés que se utilizarán en lo que sigue. Entre ellas, las más

importantes son la entropía, s, y la entalpía, h. La **entropía** la podemos definir en forma diferencial a partir del Primer Principio de la Termodinámica,

$$Tds = de + pd(1/\rho)\,, \tag{8.18}$$

donde s es la entropía por unidad de masa (todas las magnitudes *energéticas* que utilizaremos, e, s, h, etc., serán por unidad de masa o específicas). La ecuación anterior expresa que el calor por unidad de masa transferido a una partícula fluida, que en virtud del equilibrio termodinámico local es igual al producto de la temperatura por el incremento de entropía, $dq = Tds$ (si no hubiera equilibrio, el Segundo Principio de la Termodinámica nos dice que $\delta q \leq Tds$, donde δq ya no es una diferencial exacta), se *invierte* en incrementar la energía interna por unidad de masa, de, y en producir un trabajo de expansión, $pd(1/\rho)$ (por unidad de masa).

La **entalpía** se define como

$$h = e + p/\rho\,, \tag{8.19}$$

de forma que, utilizando (8.18), se tiene

$$dh = Tds + \frac{1}{\rho}dp\,. \tag{8.20}$$

Por último, otras dos magnitudes termodinámicas que utilizaremos a menudo son los calores específicos a presión y volumen constantes, definidos, respectivamente, como

$$c_p \equiv T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p\,, \tag{8.21}$$

$$c_v \equiv T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_\rho = \left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_\rho\,. \tag{8.22}$$

El cociente entre ellos se suele designar por γ:

$$\gamma \equiv \frac{c_p}{c_v}\,. \tag{8.23}$$

8.5. Ecuaciones de la entalpía y de la entropía

En muchas situaciones conviene hacer uso de una ecuación para la entalpía h, o bien una ecuación para la entropía s, en lugar de la ecuación (8.11) para la energía interna e.

Sustituyendo (8.19) en (8.9), se obtiene la siguiente ecuación para la *entalpía total* $h+v^2/2$ (también llamada *entalpía de remanso*):

$$\rho\frac{D}{Dt}\left(h + \frac{1}{2}v^2\right) = \rho\vec{f}_m\cdot\vec{v} + \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla\cdot(\overline{\overline{\tau}}'\cdot\vec{v}) - \nabla\cdot\vec{q} + Q_r\,, \tag{8.24}$$

o, si las fuerzas másicas derivan de un potencial, $\vec{f}_m = -\nabla U$,

$$\rho\frac{D}{Dt}\left(h + \frac{1}{2}v^2 + U\right) = \rho\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla\cdot(\overline{\overline{\tau}}'\cdot\vec{v}) - \nabla\cdot\vec{q} + Q_r\,. \tag{8.25}$$

Esta ecuación nos proporciona una *primera integral* del movimiento en algunos tipos de flujos bastante comunes: aquellos que son estacionarios, en los que no hay aporte alguno de calor y el trabajo de las fuerzas viscosas puede despreciarse. Si se cumplen estos requisitos (además de que las fuerzas másicas deriven de un potencial), la ecuación anterior nos dice que la derivada sustancial de

$$h + \frac{v^2}{2} + U \tag{8.26}$$

es nula, es decir, esa magnitud permanece constante a lo largo del movimiento. Esta particularidad del uso de la entalpía será ampliamente utilizada cuando estudiemos los flujos ideales estacionarios, y proviene del hecho de que la entalpía *incorpora* a la energía interna el trabajo de las fuerzas de presión en forma de un flujo convectivo, por lo que si los únicos trabajos son los asociados a las fuerzas de presión y a las másicas, y éstas son estacionarias, la cantidad (8.26) se conserva.

Para obtener la ecuación que gobierna la evolución de la entropía en el movimiento de un fluido hacemos uso del Primer Principio de la Termodinámica expresado en (8.18) cuando existe equilibrio termodinámico local y la ecuación de la energía interna (8.11), llegándose a:

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = \Phi - \nabla \cdot \vec{q} + Q_r \, . \tag{8.27}$$

Esta ecuación nos dice que la entropía varía, como era de esperar, solamente por la acción de los efectos disipativos o moleculares, como son la disipación viscosa y los aportes de calor. Además, satisface el Segundo Principio de la Termodinámica ya que, de acuerdo con (8.27), el incremento de entropía a lo largo del movimiento es mayor o igual que cero (recuérdese que $\Phi \geq 0$) siempre que, por supuesto, aportemos calor al sistema: $-\nabla \cdot \vec{q} = \nabla \cdot (K \nabla T) \geq 0$, y Q_r sea positivo. De acuerdo con la ecuación anterior, la entropía es otra integral del movimiento para los flujos ideales (efectos viscosos despreciables), adibáticos ($\vec{q} = 0$) y sin ningún otro aporte de calor.

8.6. Ecuaciones de estado

Para que el conjunto de ecuaciones de continuidad, cantidad de movimiento y energía [ecuaciones (6.4), (7.34) y, por ejemplo, (8.11)] sea un conjunto cerrado, es necesario hacer uso de ecuaciones de estado que nos relacione la temperatura con la presión y la densidad, $T = T(p, \rho)$, y la energía interna con, por ejemplo, la temperatura y la presión, $e = e(T, p)$ (aparte están las ecuaciones constitutivas para $\overline{\overline{\tau}}'$ y $\vec{q}$ que ya han sido definidas). De esta forma tendremos un conjunto cerrado de ecuaciones para $\rho, \vec{v}$ y p (ó $\rho, \vec{v}$ y T).

Para un **líquido perfecto**, estas dos ecuaciones de estado son:

$$\rho = \text{constante} \, , \tag{8.28}$$

$$c_v = c_p \equiv c = \text{constante} \, , \tag{8.29}$$

es decir, la densidad y el calor específico son constantes (los calores específicos a presión y volumen constante son iguales al ser constante la densidad, $\gamma = c_p / c_v = 1$). La ecuación (8.22) nos proporciona

$$de = c dT \, , \quad e = cT + e_0 \, , \tag{8.30}$$

siendo e_0 la energía interna de referencia a $T = 0$, que se suele tomar cero; de esta ecuación y de (8.18), al ser constante la densidad, se tiene además

$$Tds = cdT\,, \quad s = c\ln(T/T_0) + s_0\,, \tag{8.31}$$

donde s_0 es la entropía a la temperatura de referencia T_0.

Los **gases perfectos** se definen como aquellos que satisfacen la ecuación de gas ideal,

$$\frac{p}{\rho} = R_g T\,, \tag{8.32}$$

donde

$$R_g = \frac{R}{M} \tag{8.33}$$

es la constante específica del gas en cuestión, cociente entre la *constante universal de los gases,* $R \simeq 8{,}314$ J K^{-1} mol^{-1} y la masa molecular M del gas, y verifican además que los calores específicos son constantes:

$$c_p = \text{constante}\,, \quad c_v = \text{constante}\,. \tag{8.34}$$

Estas relaciones nos proporcionan

$$e = c_v T + e_0\,, \tag{8.35}$$

$$h = e + p/\rho = c_v T + R_g T + e_0 = c_p T + e_0\,, \tag{8.36}$$

$$c_p - c_v = R_g\,, \tag{8.37}$$

siendo esta última expresión la llamada relación de Meyer. La Teoría Cinética de Gases demuestra[1] que $\gamma = c_p/c_v$ es igual a 5/3 para los gases monoatómicos y 7/5 para los gases diatómicos, lo cual coincide extraordinariamente bien con los resultados experimentales a temperaturas no muy altas. Finalmente, haciendo uso de (8.18) y (8.32), la entropía de un gas perfecto viene dada por

$$s - s_0 = c_v \ln\left(\frac{T/T_0}{(\rho/\rho_0)^{\gamma-1}}\right) = c_v \ln\left(\frac{p/p_0}{(\rho/\rho_0)^{\gamma}}\right)\,. \tag{8.38}$$

Es decir, la relación isentrópica que satisfacen los gases perfectos es

$$p/\rho^{\gamma} = \text{constante}\,. \tag{8.39}$$

Referencias.

- G. K. BATCHELOR, 1967. Capítulos 1 y 3.
- R.B. BIRD, W.E. STEWART y E. LIGHTFOOT, 1960. Capítulos 8, 10 y 18.
- L. ROSENHEAD (editor), 1988. Capítulo I: *Real and Ideal Fluids,* por M.J. Lighthill.
- D.E. ROSNER, 1986. Capítulos 2 y 5.

[1] Ver, por ejemplo, S. Chapman y T.G. Cowling, 1970, *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases* (Cambridge University Press, New York; 3^a edición).

Ejercicios de aplicación de las ecuaciones en forma integral

Problema resuelto

Un chorro de un líquido de densidad ρ sale de un conducto de diámetro D con una velocidad uniforme V respecto al conducto. El chorro incide normalmente sobre una placa plana que adquiere, como consecuencia, una velocidad U constante en relación al conducto ($U < V$).

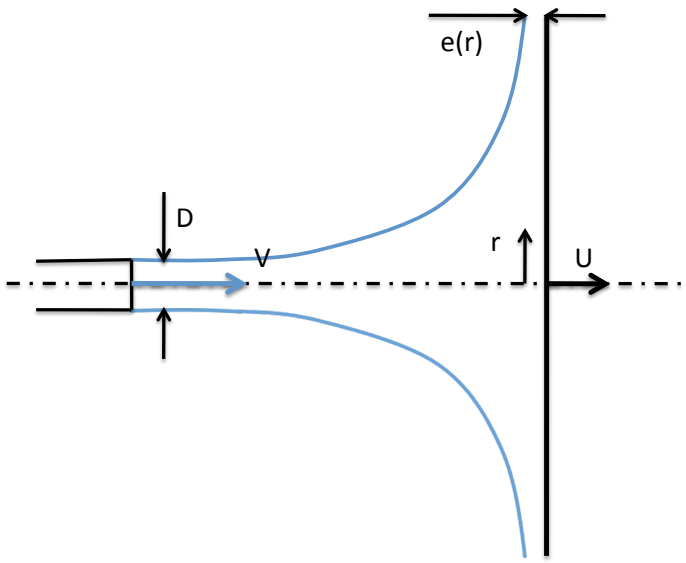


Figura 8.3

Aplicando las ecuaciones de conservación en forma integral, calcular el espesor $e(r)$ de la película líquida que se forma como consecuencia del impacto del chorro con la superficie (ver figura 8.3) para distancias grandes del punto de impacto, y la fuerza ejercida por el líquido sobre la placa.

Solución.

La forma más natural y sencilla de resolver este problema consiste en considerar un sistema de referencia que se mueve con la placa y un volumen de control estacionario en el mismo (ver figura 8.4). En este sistema de referencia, el líquido entra en la sección de entrada S_e (de área

$\pi D^2/4$), que se aleja a una velocidad U en relación a la boquilla del conducto y permanece a una distancia constante de la placa, a una velocidad $V-U$. La única otra sección de la superficie del volumen de control S_c que es atravesada por el fluido es la sección anular de salida S_s, de área $2\pi re(r)$, por la que el líquido sale a una cierta velocidad desconocida $u(r)$, que supondremos uniforme (despreciamos la fricción con la pared) y en la dirección radial (r suficientemente grande).

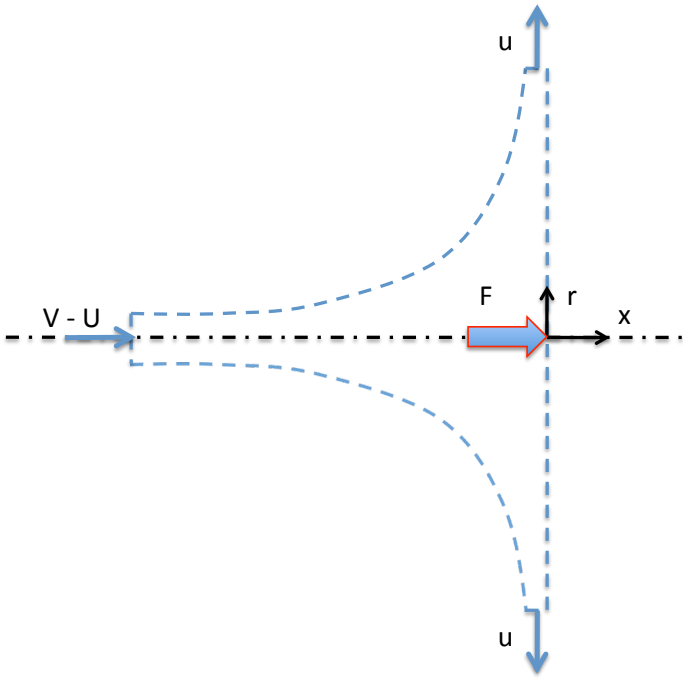


Figura 8.4

La ecuación de conservación de la masa en forma integral se escribe [ver ecuación (6.2)]

$$\frac{d}{dt}\int_{V_c(t)} \rho dV + \int_{S_c(t)} \rho(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot\vec{n}ds = 0\,. \tag{8.40}$$

Como el volumen de control es estacionario en el sistema de referencia elegido y ρ es constante, el primer término es nulo. Por otro lado, $\vec{v}_c = 0$ en toda la superficie del volumen de control, $S_c = S_e + S_l + S_s + S_p$, donde S_l es la superficie lateral de revolución del chorro y S_p la superficie en contacto con la placa. El segundo término es distinto de cero, como ya se ha comentado, sobre S_e y sobre S_s. Teniendo en cuenta que las velocidades en esas secciones se suponen uniformes y perpendiculares a las mismas, que en S_e el vector $\vec{n}$ tiene sentido opuesto a la velocidad, mientras que en S_s $\vec{n}$ va en el mismo sentido que u, y que ρ es constante, la integral de superficie quedaría

$$-(V-U)\frac{\pi D^2}{4} + u(r)2\pi re(r) = 0\,; \tag{8.41}$$

es decir, la ecuación de conservación de la masa nos da una relación para las incógnitas e y u,

$$e(r)u(r) = \frac{(V-U)D^2}{8r}\,, \tag{8.42}$$

válida para r lo suficientemente grande como para que la velocidad de salida u tenga una dirección prácticamente radial.

La ecuación de cantidad de movimiento se escribe [ver ecuación (7.17)]

$$\frac{d}{dt}\int_{V_c(t)} \rho\vec{v}dV + \int_{S_c} \rho\vec{v}(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot\vec{n}ds = -\int_{S_c}(p-p_a)\vec{n}ds + \int_{S_c}\vec{n}\cdot\overline{\overline{\tau}}'ds + \int_{V_c}\rho\vec{f}_m dV\,, \tag{8.43}$$

donde se ha desglosado el término de fuerzas de superficie en sus componentes de presión y de fuerzas viscosas y a la presión se le ha restado la presión atmosférica p_a teniendo en cuenta que $\int_{S_c} p_a\vec{n}ds = 0$ al ser p_a una constante y S_c una superficie cerrada. Esto último tiene una ventaja evidente puesto que $p = p_a$ en S_l, S_e y S_s (en estas dos últimas superficies de forma aproximada dado que los perfiles de velocidad a la entrada y a la salida se están suponiendo aproximadamente uniformes), de manera que la integral de presión es no nula solo en S_p, proporcionando la parte debida a la presión de la fuerza que el chorro ejerce sobre la placa (contra la presión atmosférica). De hecho, las fuerzas viscosas también son aproximadamente nulas en S_l (despreciamos la fricción del chorro con el aire al ser su viscosidad mucho menor que la de cualquier líquido) y en S_e y S_s (porque estamos suponiendo que no existen gradientes de velocidad en las secciones de entrada y salida al suponer que los perfiles de velocidad son uniformes en esas secciones). Así, la fuerza total que el chorro ejerce sobre la placa viene dada por la componente x de las integrales de presión y viscosas sobre S_p cambiada de signo (porque estas integrales, con su signo, representan las fuerzas que el exterior a la superficie S_c ejercen sobre el fluido dentro del volumen de control, que es igual, pero de signo opuesto, a la que el fluido dentro de V_c ejerce sobre el exterior, en este caso la placa):

$$F = -\left(-\int_{S_p}(p-p_a)\vec{n}ds + \int_{S_p}\vec{n}\cdot\overline{\overline{\tau}}'ds\right)\cdot\vec{e}_x\,. \tag{8.44}$$

Para ser más precisos, en este ejemplo F solo tiene componente de presión, pues las fuerzas viscosas sobre la placa no tienen componente en la dirección x. Pero la expresión anterior nos permitiría calcular la fuerza total (de presión y viscosa) sobre la placa en general, aunque no conozcamos el valor del tensor de esfuerzos viscosos (ni la presión) en cada punto sobre la placa.

El primer término de (8.43) es nulo al ser V_c y el fluido dentro de él estacionarios. El segundo término tiene componente x (recuérdese que la ecuación es vectorial y para calcular F solo necesitamos la componente x) no nula solo sobre la superficie de entrada S_e, y vale $-\rho(V-U)^2\pi D^2/4$. Por último, el término de fuerzas másicas no tiene componente x si suponemos que la gravedad es perpendicular al eje x (téngase en cuenta que la gravedad es la única fuerza másica pues la velocidad U es constante y el sistema de referencia es inercial). Teniendo en cuenta todo esto, la componente x de la ecuación (8.43) proporciona la fuerza sobre la placa:

$$F = \frac{\pi D^2}{4}\rho(V-U)^2\,, \tag{8.45}$$

que es positiva, como debe ser en el sistema de referencia elegido.

Por último, la ecuación de la energía en forma integral se escribe (ver sección 8.2)

$$\frac{d}{dt}\int_{V_c(t)} \rho\left(e+\frac{1}{2}v^2\right)dV + \int_{S_c} \rho(e+\frac{1}{2}v^2)(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot\vec{n}ds$$
$$= -\int_{S_c} p\vec{v}\cdot\vec{n}ds + \int_{S_c} \vec{v}\cdot\overline{\overline{\tau}}'\cdot\vec{n}ds + \int_{V_c}\rho\vec{f}_m\cdot\vec{v}dV - \int_{S_c}\vec{q}\cdot\vec{n}ds + \int_{V_c} Q_r dV\,. \qquad (8.46)$$

El primer término es nulo y $\vec{v}_c = 0$ en todo S_c. El segundo término es distinto de cero solo en S_e y S_s (flujo convectivo de energía total a la entrada y a la salida). El primer término del segundo miembro (trabajo de las fuerzas de presión) es también no nulo solo en S_e y S_s, pues sobre la placa $\vec{v} = 0$ y, sobre S_l, $\vec{v}\cdot\vec{n} = 0$. Los demás términos son nulos o muy pequeños: el trabajo de las fuerzas viscosas es aproximadamente nulo en S_e, S_s y S_l porque $\overline{\overline{\tau}}'$ es aproximadamente nulo en esas superficies, como se ha argumentado antes, y en S_p porque allí $\vec{v} = 0$; suponemos que no existe intercambio ni generación de calor apreciable y suponemos que el trabajo total de las fuerzas másicas es despreciable. Esta última hipótesis se puede justificar siempre que la dimensión del chorro en la dirección vertical sea pequeña. Si no se tuviera en cuenta, el chorro perdería su simetría de revolución por acción de la gravedad y ya no sería fácil resolver este problema por ecuaciones integrales (salvo por la fuerza en la dirección x (8.45), que es válida independientemente de esta hipótesis).

Por tanto, agrupando los términos no nulos del flujo convectivo de energía y del trabajo de las fuerzas de presión, teniendo en cuenta la definición de la entalpía (8.19), $\rho h = \rho e + p$, la ecuación de la energía queda

$$\int_{S_e+S_s} \rho\left(h+\frac{1}{2}v^2\right)\vec{v}\cdot\vec{n}ds = 0\,. \qquad (8.47)$$

Es decir, la entalpía total a la salida es igual a la entalpía total del chorro a la entrada [teniendo en cuenta la conservación de la masa (8.41)]:

$$h_e + \frac{1}{2}(V-U)^2 = h_s + \frac{1}{2}u^2\,. \qquad (8.48)$$

Como se han despreciado los flujos de calor, la temperatura permanece prácticamente constante y $h_e = h_s$, con lo que la ecuación integral de la energía nos dice simplemente que la energía cinética del chorro a la salida coincide con la energía cinética del chorro a la entrada. Por tanto, con las simplificaciones hechas, las velocidades de entrada y de salida en este sistema de referencia y configuración (r suficientemente grande) coinciden:

$$u = V - U\,. \qquad (8.49)$$

Sustituida esta ecuación en la conservación de la masa (8.42) nos da la forma del espesor $e(r)$ para r grande:

$$e(r) = \frac{D^2}{8r}\,. \qquad (8.50)$$

Se deja como ejercicio para el alumno obtener la fuerza F utilizando otras combinaciones de volumen de control y sistema de referencia. Por ejemplo, un sistema de referencia fijo en la boquilla del chorro y un volumen de control con volumen estacionario que se aleja a la velocidad U de la placa, o un volumen de control no estacionario con todo el volumen de líquido que va saliendo de la boquilla.

Problemas propuestos

La mayoría de los ejercicios que se enuncian a continuación serán resueltos en clases de problemas. El resto se recomiendan como ejercicios para realizar en casa. Algunos de ellos están resueltos en FERNANDEZ FERIA, DEL PINO PEÑAS y ORTEGA CASANOVA (2010).

1. Por un conducto en forma de codo (ver figura 8.5) y de sección constante A circula un gas. En la sección de entrada la presión del gas es a veces la atmosférica, ap_a, su temperatura es la ambiental, T_a, y su velocidad V_1. El gas descarga por la sección de salida a la presión ambiental, p_a. Suponiendo que la temperatura es constante a lo largo de todo el flujo e igual a la ambiental, que el gas es ideal y caloríficamente perfecto, que las propiedades fluidas son uniformes en las secciones de entrada y de salida, que las fuerzas másicas son despreciables y que no hay adición de calor ni por reacción química ni por radiación, calculen:

   (a) Velocidad del gas a la salida del conducto.

   (b) Calor que recibe el gas a través de las paredes del conducto por unidad de tiempo.

   (c) Fuerza en magnitud y dirección que el gas ejerce sobre el conducto.

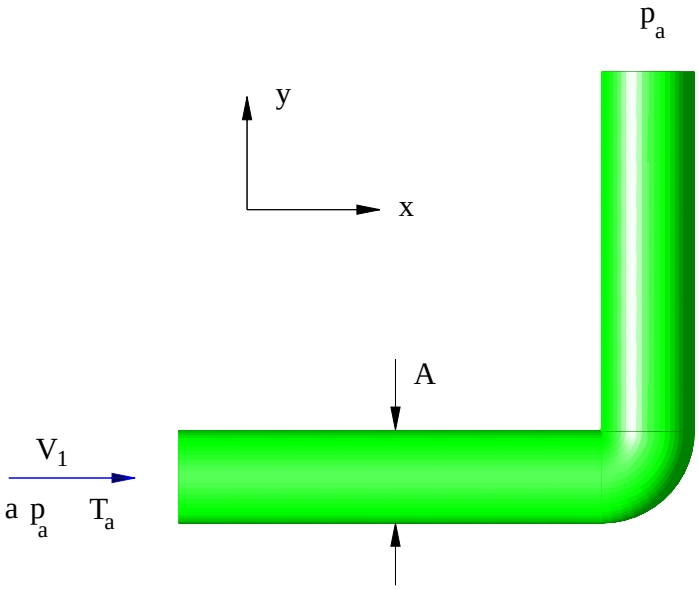


Figura 8.5

2. Se desea estimar la fuerza horizontal (dirección x en la figura 8.6) que se ejerce, por unidad de longitud transversal, sobre una presa que descarga un cierto caudal de agua. Para ello apliquen la ecuación de cantidad de movimiento en forma integral y supongan que suficientemente aguas abajo la velocidad del agua sólo tiene componente horizontal, es uniforme y vale V. Supongan también que $h \ll H$.

3. Por un canal de inclinación θ y sección rectangular de anchura b (dirección perpendicular al papel en la figura 8.7) circula un líquido de densidad ρ. En estado estacionario, la

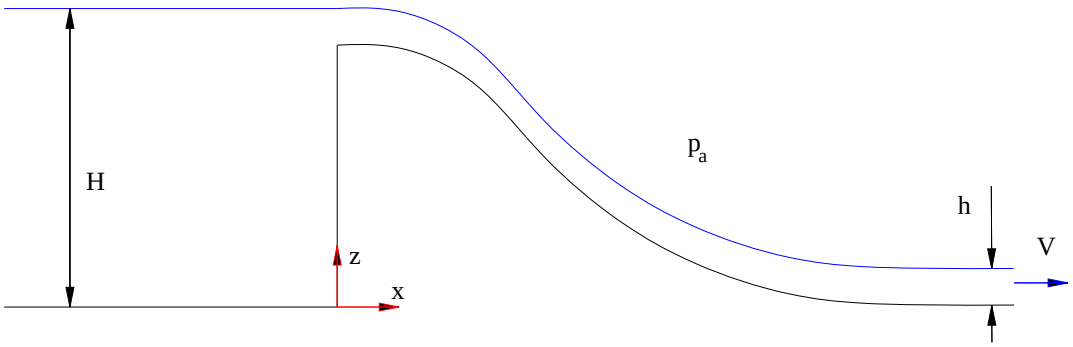


Figura 8.6

altura h del líquido medida perpendicularmente al fondo del canal permanece constante. Calcular mediante la aplicación de la ecuación de cantidad de movimiento en forma integral aplicada a un volumen de control de longitud Δx (ver figura 8.7) la velocidad media U, en el supuesto de que el movimiento medio es uniforme en cada sección (y, por supuesto, unidireccional), y suponiendo que el esfuerzo de fricción en las paredes del canal (tanto laterales como del fondo) vale $\tau_f = \frac{1}{8}\lambda\rho U^2$, donde el coeficiente de fricción λ es constante.

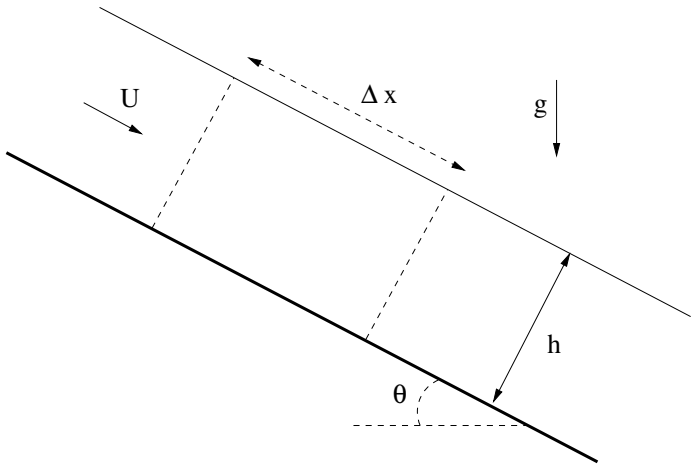


Figura 8.7

4. Un método habitual de determinar la resistencia aerodinámica de un objeto en movimiento es mediante la obtención experimental del perfil de velocidad de la estela que deja el objeto.

   Considérese que en un ensayo en un túnel aerodinámico se determina el perfil de velocidad $u(r)$ de la estela que deja tras de sí un proyectil estacionario sobre el que circula una corriente uniforme de aire de velocidad V y presión p_a aguas arriba; la medición de $u(r)$ se hace lo suficientemente aguas abajo del proyectil como para que $p \simeq p_a$. Suponiendo que en el movimiento el aire se pueda considerar como incompresible ($M_a^2 \ll 1$), escribir las ecuaciones de conservación de masa y de cantidad de movimiento en forma integral en un volumen de control adecuado (por ejemplo, el cilindro de radio R de la figura 8.8) y calcular la resistencia del proyectil en función de $u(r)$. Particularicen

el resultado para el caso en que el perfil de velocidad de la estela se pueda aproximar por $u(r) = V[1 - \epsilon \cos(\frac{\pi}{2}\frac{r}{R})]$, $\epsilon \ll 1$.

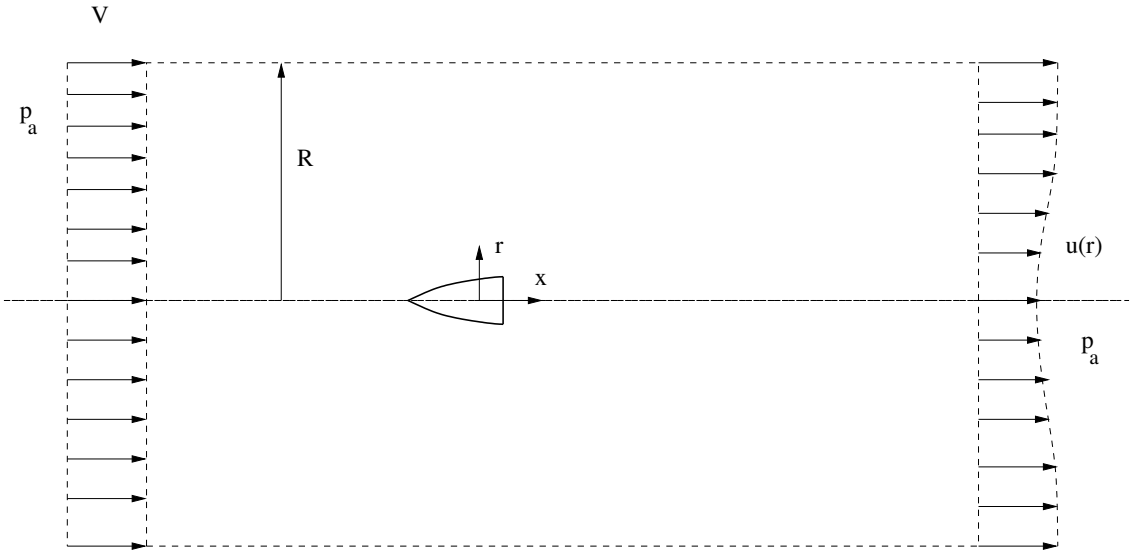


Figura 8.8

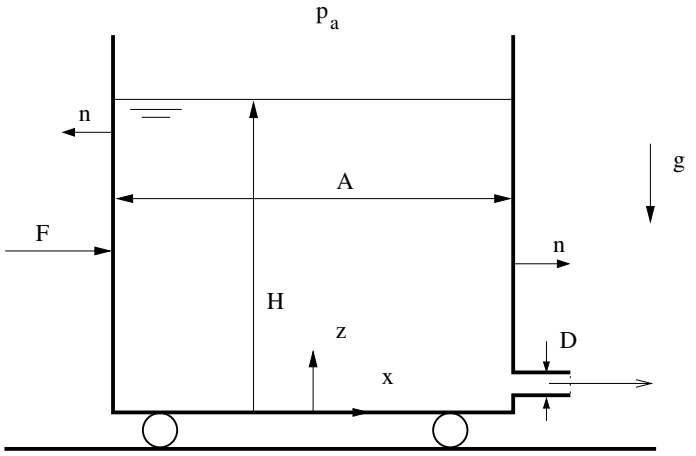


Figura 8.9

5. Un depósito de sección A que contiene un líquido de densidad ρ descarga a través de un pequeño conducto de diámetro D situado en la parte inferior del mismo. El depósito posee unas ruedas debajo de la tapa inferior. Se desea calcular la fuerza F que se tiene que ejercer (ver figura 8.9) para que el depósito no se desplace como consecuencia de la descarga. Para ello utilicen las ecuaciones en forma integral y supongan que el flujo es ideal. Calculen F en función del tiempo y de los datos del problema suponiendo que $H(t = 0) = H_0$.

6. Una turbina Pelton, como la que se esquematiza en la figura 8.10, consta en esencia de una rueda de radio R provista de álabes. Sobre los álabes incide un chorro de agua que hace girar la rueda con velocidad angular Ω constante. Utilizando las ecuaciones de conservación de la masa y cantidad de movimiento en forma integral, calculen:

(a) Reacciones en el eje de la rueda suponiendo que no hay pérdidas.

(b) Par y potencia desarrollada por la turbina.

(c) Velocidad de giro para la que se obtendría la potencia máxima y valor de ésta.

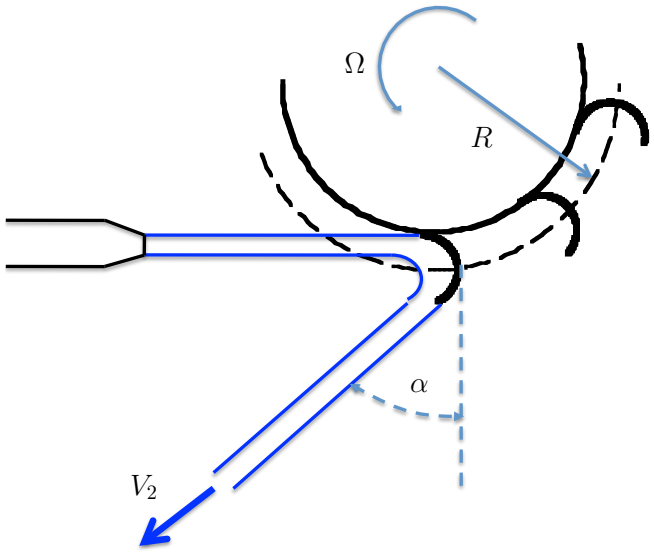


Figura 8.10

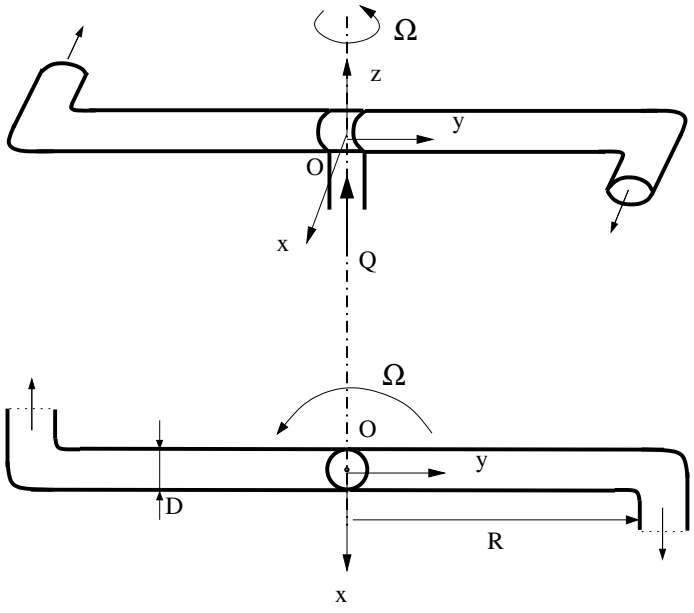


Figura 8.11

7. El aspersor de la figura 8.11 consta de dos brazos de longitud R y diámetro D que terminan en sendos codos de 90º cuya longitud es despreciable frente a R. Por el centro (punto O) entra un caudal Q constante de un líquido de densidad ρ y, como consecuencia,

el aspersor gira con una velocidad angular constante Ω. Suponiendo que debido a la fricción de los cojinetes existe un par resistente en O de valor Γ, calculen, mediante la aplicación de las ecuaciones de conservación de la masa y del *momento cinético* en forma integral, la velocidad angular de giro en función de Q, Γ, ρ y la geometría. ¿Cuál sería la velocidad angular máxima? Desprecien las fuerzas viscosas y las gravitatorias.

8. Una corriente bidimensional y uniforme de un gas (presión p_1, densidad ρ_1 y velocidad V_1 según el eje x) incide sobre una cascada de álabes que distan entre sí una distancia L, ejerciendo sobre cada uno de ellos una fuerza $\vec{F} = F_x\vec{e}_x + F_y\vec{e}_y$. Aplicando las ecuaciones de conservación en forma integral, calcular las condiciones aguas abajo de la cascada, p_2, ρ_2 y $\vec{V}_2$ cuando dicha corriente se ha uniformado. Supongan gas perfecto, movimiento estacionario, fuerzas másicas despreciables y álabes aislados térmicamente. (Utilizar el volumen de control estacionario de la figura 8.12, donde la superficie entre álabes es de simetría.)

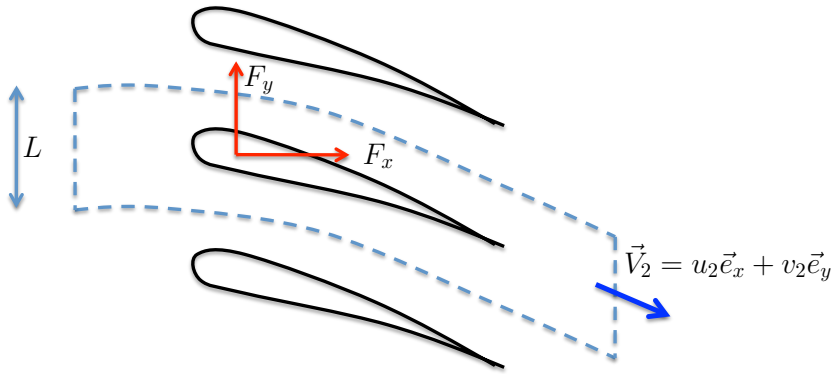


Figura 8.12

9. Se desea hallar la evolución de la temperatura en un termo eléctrico de volumen V cuando por él circula un caudal constante Q de agua (densidad ρ y coeficiente de capacidad calorífica c), a la que se le suministra un calor por unidad de tiempo constante q (figura 8.13). La temperatura a la entrada, T_1, también permanece constante.

   Escriban las ecuaciones de conservación de masa y energía en forma integral. Supongan que las magnitudes fluidas en la entrada y en la salida son uniformes, que el agua en el interior del termo tiene temperatura homogénea (T sólo depende del tiempo t) y velocidad despreciable. Simplifiquen las ecuaciones suponiendo que las secciones de entrada y de salida son iguales, $A_1 = A_2$, que $p_1 = p_2$ y que $T_2 = T$, y hallen $T(t)$ para el caso en el que $T(0) = T_0$. ¿Cuál es el valor estacionario de T?

10. La cámara de combustión de un cohete supersónico tiene a la salida una tobera convergente-divergente como se esquematiza en la figura 8.14, con área a la salida A_s. A la cámara entran un gasto G_c de combustible y un gasto G_o de oxígeno (ambos constantes) que reaccionan químicamente produciendo un calor total Q por unidad de tiempo. Como consecuencia se obtienen unos productos de combustión a una presión y temperatura elevadas que se aceleran en la tobera y salen de la misma a una velocidad supersónica V_s y a una presión p_s que, en general, no es igual a la presión atmosférica p_a.

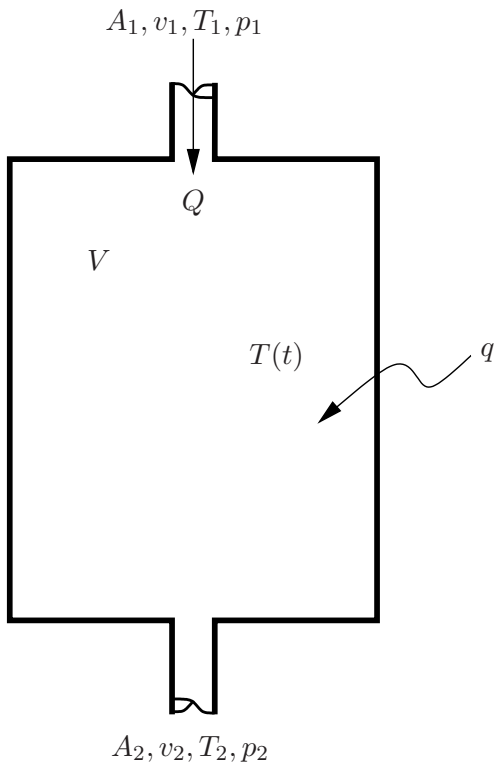


Figura 8.13

Se supone que los gases producto de la combustión se comportan como un gas perfecto de constante R_g y relación de calores específicos γ. Se pide:

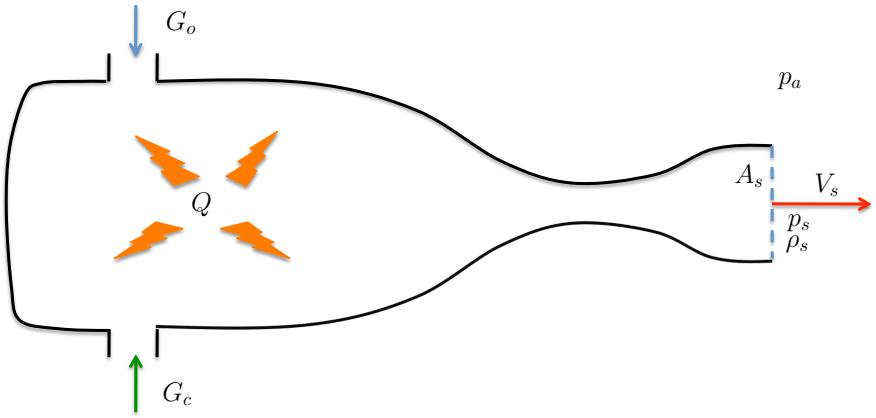


Figura 8.14

a) Aplicando las leyes de conservación de masa, cantidad de movimiento y energía en forma integral calculen el empuje del cohete en función de la presión a la salida p_s y de los datos del problema (Q, G_o, G_c, p_a, A_s y γ). Para ello hagan las siguientes aproximaciones: velocidad y temperatura de entrada de combustible y oxidante

despreciables frente a V_s y T_s, respectivamente; fuerzas másicas y de viscosidad despreciables; cámara aislada térmicamente, y magnitudes fluidas uniformes a la salida.

b) Simplifiquen la expresión anterior en los supuestos de que el número de Mach a la salida es muy grande $[M_s^2 = V_s^2/(\gamma p_s/\rho_s) \gg 1]$ y que la tobera funciona en las condiciones "de diseño", en las cuales $p_s = p_a$.

11. La potencia máxima que se puede extraer de un viento de velocidad V mediante una turbina eólica se puede calcular de las ecuaciones de conservación aplicadas a un volumen de control como el de la figura 8.15. Dicho volumen está delimitado por un tubo de corriente S_c y por dos planos perpendiculares a la corriente viento arriba y viento abajo de la turbina, de secciones A_1 y A_2, donde las velocidades son la del viento V y $V - v_1$, respectivamente, y las presiones atmosféricas. A través del rotor de la turbina, de sección transversal A, el aire pasa con una velocidad axial $V - v$ y la presión decrece desde p hasta p' (las magnitudes A_1, A_2, v_1, v, p y p' son en principio desconocidas).

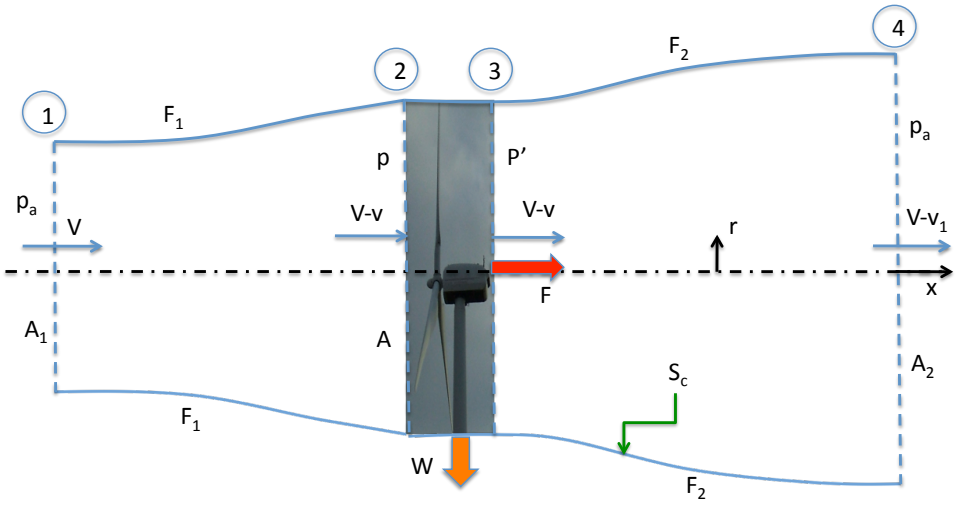


Figura 8.15

Suponiendo que las componentes radial y azimutal de la velocidad son despreciables frente a la axial, que las fuerzas másicas y viscosas son despreciables, que las propiedades fluidas son uniformes en las secciones 1, 2, 3 y 4, y que la densidad del aire ρ permanece prácticamente constante, se pide:

a) Escribir las ecuaciones de conservación de masa, cantidad de movimiento axial y energía entre las secciones 1-3, 3-4 y 4-2.

b) Hallen las fuerzas de presión sobre S_c, F_1 y F_2, en función de v_1 y v (además de, por supuesto, ρ y A), demostrando que son cuadráticas en dichas velocidades.

c) Como, normalmente, v y v_1 son mucho más pequeñas que la velocidad del viento V, de acuerdo con el apartado anterior se pueden despreciar las fuerzas F_1 y F_2 frente a los restantes términos de las correspondientes ecuaciones de cantidad de movimiento. En este supuesto, hallen la fuerza axial F que el aire ejerce sobre

el rotor de la turbina y la potencia W extraida al viento. Obtengan la relación existente entre v_1 y v y expresen F y W en función, exclusivamente, de v y de los datos del problema (ρ, V y A).

d) Rendimiento de la turbina (comprueben que es solo función de v/V).

e) Expresen la potencia en función del rendimiento y calculen el valor de éste para que la potencia sea máxima. Den el valor óptimo de v/V y la potencia máxima.

12. Por un conducto de sección A_1 circula subsónicamente un gas ideal. Cuando las condiciones del gas son v_1, p_1 y ρ_1, el conducto se ensancha bruscamente hasta una sección A_2. Suponiendo que el esfuerzo de fricción en la pared es despreciable y que el conducto está aislado térmicamente, se pide:

a) Escriban las ecuaciones de conservación de masa, cantidad de movimiento y energía en forma integral para relacionar las magnitudes fluidas en la sección 1 con las de la sección 2.

b) Utilizando además la ecuación de estado de un gas perfecto, hallen una relación algebráica que determine el número de Mach tras el ensanchamiento (M_2) como función, exclusivamente, de M_1, de A_2/A_1 y de la relación de calores específicos γ.
Nota: El número de Mach se define como el cociente entre la velocidad del fluido y la del sonido, $M \equiv v/a$, siendo la velocidad del sonido a para un gas perfecto $a = \sqrt{\gamma R_g T} = \sqrt{\gamma p/\rho}$.

c) Simplifiquen la expresión anterior en el límite $A_1/A_2 \ll 1$, y hallen explícitamente M_2, p_2/p_1, ρ_2/ρ_1 y T_2/T_1 en función de M_1 y γ.

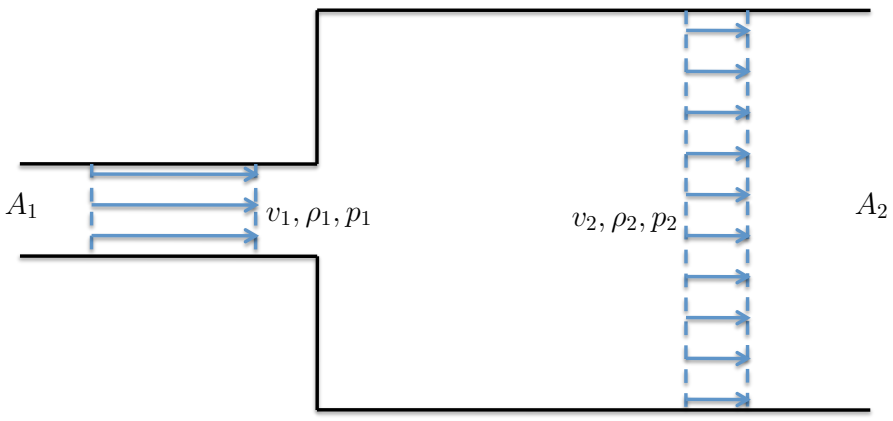


Figura 8.16

CAPÍTULO 9

Ecuaciones de Navier-Stokes

9.1. Resumen de las ecuaciones de Navier-Stokes

Como se ha visto en las lecciones precedentes, las ecuaciones diferenciales que gobiernan el movimiento de un fluido Newtoniano de composición homogénea son las siguientes:

continuidad

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\cdot\vec{v} = 0\,, \tag{9.1}$$

cantidad de movimiento

$$\rho\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p + \nabla\cdot\overline{\overline{\tau}}' + \rho\vec{f}_m\,, \tag{9.2}$$

$$\overline{\overline{\tau}}' = \mu[\nabla\vec{v} + \nabla\vec{v}^T] + (\mu_v - \frac{2}{3}\mu)\nabla\cdot\vec{v}\overline{\overline{I}}\,, \tag{9.3}$$

energía

$$\rho\frac{De}{Dt} = -p\nabla\cdot\vec{v} + \Phi + \nabla\cdot(K\nabla T) + Q_r\,, \tag{9.4}$$

$$\Phi = \overline{\overline{\tau}}' : \nabla\vec{v} = \frac{\mu}{2}[\nabla\vec{v} + \nabla\vec{v}^T - \frac{2}{3}\nabla\cdot\vec{v}\overline{\overline{I}}] : [\nabla\vec{v} + \nabla\vec{v}^T - \frac{2}{3}\nabla\cdot\vec{v}\overline{\overline{I}}] + \mu_v(\nabla\cdot\vec{v})^2\,. \tag{9.5}$$

Este sistema de ecuaciones se suele denominar Ecuaciones de Navier-Stokes (tomando el nombre de la ecuación de cantidad de movimiento) y tiene por incógnitas la densidad ρ, las tres componentes de la velocidad $\vec{v}$, la presión p, la energía interna e y la temperatura T. Para completarlo se necesitan dos **ecuaciones de estado;** por ejemplo,

$$\rho = \rho(p,T)\,, \quad e = e(T,p)\,, \tag{9.6}$$

además de la especificación de los **coeficientes de transporte,**

$$\mu = \mu(T,p)\,, \quad \mu_v = \mu_v(T,p)\,, \quad K = K(T,p)\,, \tag{9.7}$$

que normalmente solo dependen de la temperatura.

La ecuación de la energía interna (9.4) puede ser sustituida por la ecuación de la entropía (8.27), o por la ecuación de la entalpía (8.24), o cualquier combinación de ellas.[1]

[1] La ecuación de cantidad de movimiento (9.2) a veces es sustituida por una ecuación para la vorticidad, que no veremos en este curso introductorio a la Mecánica de Fluidos.

9.1.1. Fluidos incompresibles con propiedades constantes

Las ecuaciones anteriores se simplifican notoriamente si el movimiento es incompresible, como ocurre casi siempre con los líquidos, o en algunos flujos de gases a velocidades no demasiado altas y sometidos a variaciones de temperatura poco importantes (ver sección siguiente para una especificación más precisa). En particular, como se apuntó en la sección 7.5, las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento quedan desacopladas de la ecuación de la energía si el coeficiente de viscosidad se puede considerar constante (variaciones de temperatura no muy importantes). Suponiendo que la conductividad térmica es también constante, las ecuaciones quedan:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0\,, \tag{9.8}$$

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\vec{v} + \vec{f}_m\,, \tag{9.9}$$

$$\rho\frac{De}{Dt} = \Phi + K\nabla^2 T + Q_r\,, \tag{9.10}$$

$$\Phi = \frac{\mu}{2}[\nabla\vec{v} + \nabla\vec{v}^T] : [\nabla\vec{v} + \nabla\vec{v}^T]\,, \tag{9.11}$$

que se completan con las ecuaciones de estado $\rho =$ constante (que es un dato del problema al igual que μ y K), y $de = c(T)dT$. Las dos primeras ecuaciones tienen como únicas incógnitas p y $\vec{v}$, siendo $\vec{v}$ **solenoidal** en virtud de la ecuación de continuidad. La ecuación de la energía junto con la ecuación de estado para e permiten obtener la temperatura T una vez conocido $\vec{v}$. Suponiendo que el calor específico c es constante, y que no existen aportes volumétricos de calor ($Q_r = 0$), la ecuación de la energía se puede escribir como

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\Phi}{\rho c} + \alpha\nabla^2 T\,, \tag{9.12}$$

donde $\alpha = K/\rho c$ es la difusividad térmica, que tiene las mismas unidades que la viscosidad cinemática ν, o el coeficiente de difusión másica D. De hecho, si la velocidad del fluido fuese nula, la ecuación anterior se escribiría

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\nabla^2 T\,, \tag{9.13}$$

que se suele denominar ecuación de difusión por su identidad formal con la ecuación de difusión másica (sin más que sustituir α por D y T por la concentración o fracción másica; ver, por ejemplo, Bird et al. 1960).

9.2. Condiciones para que el campo de velocidades sea aproximadamente solenoidal. Número de Mach. Cavitación.

Cuando en el movimiento de un fluido la densidad permanece constante, la ecuación de conservación de la masa nos dice que el campo de velocidades es solenoidal, lo cual, como acabamos de ver, implica importantes simplificaciones en las ecuaciones. De aquí la relevancia

de conocer con precisión las condiciones para que el campo de velocidades de un movimiento fluido pueda considerarse como solenoidal.

Estas condiciones se obtienen comparando los términos $(D\rho/Dt)/\rho$ y $\nabla \cdot \vec{v}$ que aparecen en la ecuación de continuidad 9.1. Para ello suponemos que el orden de magnitud de las variaciones de $\vec{v}$, tanto espacial como temporalmente, es V, que puede ser una velocidad característica del problema en cuestión si, como ocurre normalmente, las variaciones en la velocidad son del orden de ella misma. Por otro lado, designamos por L la longitud característica en la cual varían las magnitudes fluidas, entre ellas la velocidad (ver Fig. 9.1). Así, para que $\vec{v}$ sea aproximadamente solenoidal se debe verificar:

$$\left| \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \right| \ll |\nabla \cdot \vec{v}| \sim \frac{V}{L} \,. \tag{9.14}$$

Si tomamos la densidad ρ y la entropía s como las dos variables independientes que caracterizan el estado termodinámico de cada partícula fluida (de composición homogenea), es decir, $p = p(\rho, s)$, se puede escribir

$$\frac{Dp}{Dt} = a^2 \frac{D\rho}{Dt} + \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho \frac{Ds}{Dt} \,, \tag{9.15}$$

donde la propiedad termodinámica a^2, definida como

$$a^2 \equiv \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \,, \tag{9.16}$$

es el cuadrado de la **velocidad del sonido,** o velocidad de propagación de las pequeñas perturbaciones en un fluido. Para un gas ideal, de (8.39) resulta

$$a = \sqrt{\gamma p/\rho} = \sqrt{\gamma R_g T} \,. \tag{9.17}$$

Sustituyendo (9.15) en (9.14) se tiene la condición de solenoidalidad

$$\left| \frac{1}{\rho a^2} \frac{Dp}{Dt} - \frac{1}{\rho a^2} \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho \frac{Ds}{Dt} \right| \ll \frac{V}{L} \,. \tag{9.18}$$

Para que esta condición se satisfaga, ambos términos del lado izquierdo deben de ser mucho menores que V/L, por lo que se considerarán por separado.

Si la condición

$$\left| \frac{1}{\rho a^2} \frac{Dp}{Dt} \right| \ll \frac{V}{L} \tag{9.19}$$

se satisface, tenemos que las variaciones en la densidad producidas por las variaciones de presión en el flujo son despreciables, lo cual es lo que normalmente se entiende por un movimiento incompresible. Es decir, la condición de solenoidalidad es más general que la de incompresibilidad, aunque normalmente se confunden por ser esta última, como veremos en lo que sigue, la más importante de las dos condiciones de solenoidalidad expresadas en la ecuación (9.18).[2] Para expresar (9.19) en una forma más conveniente, utilizamos la ecuación de cantidad de movimiento (9.2):

[2]Salvo en esta sección, siempre que se hable de incompresibilidad se hará en el sentido *amplio* de solenoidalidad, es decir, $\nabla \cdot \vec{v} = 0$.

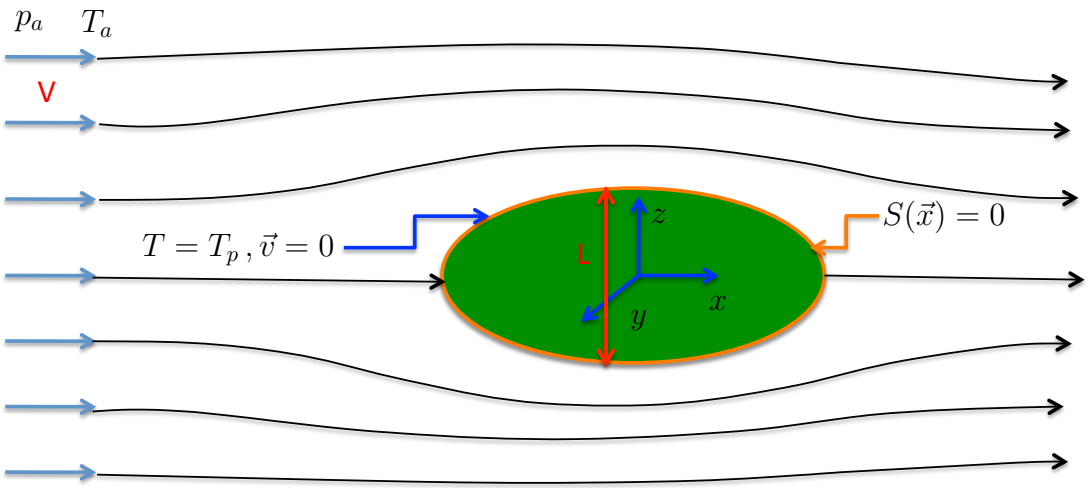


Figura 9.1: Esquema del flujo alrededor de un cuerpo sólido para ilustrar las magnitudes características (en rojo) y las condiciones de contorno.

$$\frac{1}{\rho a^2}\frac{Dp}{Dt} = \frac{1}{\rho a^2}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\vec{v}}{a^2}\cdot\left[-\frac{D\vec{v}}{Dt} + \frac{1}{\rho}\nabla\cdot\bar{\bar{\tau}}' + \vec{f}_m\right]. \tag{9.20}$$

En primera aproximación se puede suponer, para la evaluación de la influencia de las variaciones de presión, que el flujo es isentrópico, de forma que se puede despreciar término viscoso en (9.20), el cual afecta a la distribución de presiones más que a la magnitud de su variación (por otra parte, la influencia de las variaciones de entropía las consideraremos después). Así, la condición (9.19) se escribe:

$$\left|\frac{1}{\rho a^2}\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{1}{2a^2}\frac{Dv^2}{Dt} + \frac{\vec{v}\cdot\vec{f}_m}{a^2}\right| \ll \frac{V}{L}\,. \tag{9.21}$$

El primer término tiene en cuenta la no estacionariedad del flujo. Supongamos que el flujo es oscilatorio, siendo ω la frecuencia característica de las oscilaciones. Si V es la velocidad típica del movimiento asociada a estas oscilaciones, las variaciones de la presión en distancias de orden L son del orden de las variaciones temporales de la cantidad de movimiento por unidad de volumen multiplicadas por L, $\rho V\omega L$. Así, la condición asociada a este primer término es $\rho V\omega^2 L/\rho a^2 \ll V/L$, es decir,

$$\frac{\omega^2 L^2}{a^2} \ll 1\,. \tag{9.22}$$

En cuanto al segundo término de (9.21), el orden de magnitud de Dv^2/Dt puede venir dado por $\partial v^2/\partial t$ o por $\vec{v}\cdot\nabla v^2$, dependiendo de cual sea mayor. En el primer caso tendríamos $\omega LV/a^2 \ll 1$, mientras que en el segundo $V^2/a^2 \ll 1$. La primera de estas condiciones no es relevante como lo demuestra el siguiente razonamiento: Si el movimiento es no estacionario y ω es la frecuencia característica, puede ocurrir que ω sea mucho mayor, mucho menor, o del mismo orden que V/L. Si $\omega \sim V/L$ tenemos la condición $V^2/a^2 \ll 1$, que es la correspondiente al término $\vec{v}\cdot\nabla v^2$. Si $\omega \gg V/L$, la condición resultante es más *débil* que (9.22), mientras

que si $\omega \ll V/L$ la condición V^2/a^2 es más *fuerte.* Por tanto, la condición $\omega LV/a^2 \ll 1$ es redundante si imponemos (9.22) junto con

$$V^2/a^2 \ll 1\,, \tag{9.23}$$

que, por otra parte, coincide con (9.22) si $\omega \sim V/L$. Esta condición se suele expresar como

$$M^2 \ll 1\,, \tag{9.24}$$

donde

$$M \equiv \frac{V}{a} \tag{9.25}$$

es el **número de Mach,** que relaciona la velocidad del fluido con la del sonido. La condición $V^2/a^2 \ll 1$ se podría haber obtenido de una forma más intuitiva si se tiene en cuenta que, para un movimiento isentrópico, las variaciones de densidad $\delta\rho$ son, de acuerdo con la definición de a^2, del orden de $a^2\delta p$. Por otra parte, en un movimiento isentrópico en el que las variaciones temporales no sean importantes, la ecuación de cantidad de movimiento nos dice que $\delta p \sim \rho V^2$, es decir, un cambio en la velocidad del fluido desde 0 hasta V requiere una variación de presión del orden de ρV^2. La condición de incompresibilidad $\delta\rho/\rho \ll 1$ daría pues $V^2/a^2 \ll 1$.

El tercer término de (9.21), que representa las variaciones de presión producidas por las fuerzas másicas, suponiendo que éstas sean exclusivamente gravitatorias con aceleración g, proporciona la condición

$$\frac{gL}{a^2} \ll 1\,. \tag{9.26}$$

En conclusión, para que el movimiento de un fluido se pueda considerar como incompresible se deben verificar las tres condiciones siguientes:

$$\frac{\omega^2 L^2}{a^2} \ll 1\,, \quad M^2 \ll 1 \quad \text{y} \quad \frac{gL}{a^2} \ll 1\,. \tag{9.27}$$

La primera de ellas nos dice, por ejemplo, que los efectos de compresibilidad no se pueden despreciar cuando se estudie el flujo originado por ondas sonoras, ya que una onda sonora de frecuencia ω tiene por longitud de onda $L = a/\omega$, por lo que $\omega^2 L^2/a^2 = 1$. La segunda condición, que es la más importante de las tres desde un punto de vista práctico, nos obliga a considerar los efectos de la compresibilidad siempre que la velocidad del fluido se aproxime a la del sonido. Para el aire a 15^{o}C y 1 atm se tiene que $a = 340{,}6$ m/s, mientras que para el agua a 15^{o}C, $a = 1470$ m/s, de modo que los movimientos en el seno del aire (por ejemplo los originados por un cuerpo en movimiento) a menos de, pongamos, 400 km/h ($M^2 = 0{,}106$), se pueden considerar como incompresibles (con errores menores del 10 %), mientras que prácticamente todos los movimientos en agua, o cualquier otro líquido, se pueden considerar incompresibles. La tercera condición nos dice que solo cuando el movimiento del fluido involucra longitudes características gigantescamente grandes, del orden de a^2/g, los efectos gravitatorios en la compresibilidad son importantes. Tomando $g = 9{,}8$ m/s^2, para el aire tenemos $a^2/g \sim 12$ km, y para el agua $a^2/g \sim 220$ km, por lo que este efecto es importante en la meteorología o dinámica de la atmósfera, pero no en la dinámica de los océanos, ya que la profundidad del mar es, como mucho, del orden de la decena de kilómetros. Fuera de

los problemas *terrestres* este efecto sería importante en el estudio de la dinámica del plasma estelar.

Pasemos ahora a considerar el efecto de las variaciones de entropía en (9.18). El coeficiente que multiplica a Ds/Dt se puede escribir, teniendo en cuenta que la relación entre p, ρ y s es única, como

$$\frac{1}{\rho a^2}\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_\rho = -\frac{1}{\rho a^2}\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)_p = -\frac{1}{\rho}\frac{(\partial\rho/\partial T)_p}{(\partial s/\partial T)_p} = \frac{\beta T}{c_p}\,, \tag{9.28}$$

donde se ha hecho uso de (8.21) y (9.16), y se ha definido

$$\beta \equiv -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p\,, \tag{9.29}$$

que es el **coeficiente de expansión térmica** del fluido ($\beta = 1/T$ para los gases ideales, y es muy pequeño para los líquidos; para el agua a 15^oC $\beta = 1{,}5 \times 10^{-4} K^{-1}$). Sustituyendo la ecuación (8.27) para Ds/Dt en (9.18), se tiene la siguiente condición (suponiendo que no hay aportes volumétricos de calor):

$$\left|\frac{\beta}{\rho c_p}[\Phi + \nabla\cdot(K\nabla T)]\right| \ll \frac{V}{L}\,, \tag{9.30}$$

que expresa que las variaciones en la densidad debidas al calentamiento por disipación viscosa y a la conducción molecular de calor deben ser pequeñas. Teniendo en cuenta la definición (9.5) para Φ, tenemos las siguientes dos condiciones:

$$\frac{\beta\nu}{c_p}\frac{V}{L} \ll 1\,, \quad \beta\alpha\frac{\theta}{LV} \ll 1\,, \tag{9.31}$$

donde α y ν son las difusividades térmicas y de cantidad de movimiento (o viscosidad cinemática), y θ es el orden de magnitud de las variaciones de temperatura (por ejemplo, en el caso de un fluido calentado por una pared a temperatura T_p, $\theta = T_p - T_a$, donde T_a es una temperatura característica del fluido lejos de la pared). Estas dos condiciones se satisfacen en la mayoría de las condiciones prácticas, dejando solo de valer cuando la diferencia de temperatura o la velocidad son extremadamente altas, y ocurren en longitudes muy pequeñas. Por ejemplo, para el aire en condiciones normales (20^oC y $1atm$) se tiene $\beta\nu/c_p \simeq 3{,}8 \times 10^{-11} s$ y $\beta\alpha \simeq 7 \times 10^{-8} m^2/sK$; para que la primera condición no se cumpla, V/L tiene que ser del orden de $10^{11}s$, es decir, si L es del orden del centímetro, V tiene que ser del orden de $10^9 m/s$; en cuanto a la segunda condición, si suponemos un caso favorable en que $V = 0{,}1 m/s$ y $L = 1cm$, para que no se cumpla la diferencia de temperatura tendría que ser del orden de $10^4 K$, siendo este número mayor cuanto mayor es V o L. Por otra parte, para el agua a 20^oC se tiene $\beta\nu/c_p \simeq 3{,}6 \times 10^{-14} s$ y $\beta\alpha \simeq 2{,}1 \times 10^{-11} m^2/sK$, por lo que las condiciones para que no se verifiquen las desigualdades anteriores deben de ser aún más extremas.

Se concluye, por tanto, que los efectos disipativos no producen, a efectos prácticos, variaciones en la densidad, por lo que la condición de incompresibilidad (es decir, la constancia de la densidad frente a variaciones en la presión) puede ser equiparada a la de solenoidalidad. De las tres condiciones de incompresibilidad (9.27), la segunda, $M^2 = V^2/a^2 \ll 1$, es la más importante en la práctica.

Por último hay que decir que en los líquidos (donde las condiciones anteriores se satisfacen prácticamente siempre, al menos en flujos estacionarios), se debe tener en cuenta una circunstancia adicional que es la posibilidad de **cavitación** o formación de burbujas de vapor en el seno del líquido como consecuencia de que la presión baje por debajo de la presión de vapor, $p_v(T)$, en algún punto del flujo. Así, la condición de solenoidalidad en flujos estacionarios de líquidos es, simplemente, $p > p_v$ en todos los puntos. Se suele definir un **número de cavitación,**

$$Ca \equiv \frac{p_o - p_v}{\rho V^2/2}\,, \tag{9.32}$$

donde p_a es una presión de referencia (generalmente, $p_a \gg p_v$, por lo que $Ca \simeq p_a/\frac{1}{2}\rho V^2$). Este número adimensional es una medida de la posibilidad de que el flujo de un líquido cavite, puesto que si un flujo se acelera desde $v = 0$ hasta $v = V$, su presión disminuye una cantidad del orden de $\frac{1}{2}\rho V^2$ (cantidad que se suele denominar **presión dinámica**), siendo, por tanto, mayor la posibilidad de cavitación cuanto menor es Ca. En particular, si Ca es menor que un cierto valor crítico Ca^*, que depende del tipo de flujo y del líquido en cuestión, el flujo cavita en algún punto, dejando de ser solenoidal el campo de velocidad.

9.3. Condiciones iniciales y de contorno

Para resolver las ecuaciones (9.1)-(9.7) en un problema concreto se necesitan condiciones iniciales y de contorno. Como **condiciones iniciales** hay que especificar tres magnitudes, por ejemplo, $\rho, \vec{v}$ y T, en el instante $t = 0$, para todo el campo fluido; es decir,

$$\rho_o(\vec{x}) \equiv \rho(\vec{x}, 0)\,, \quad \vec{v}_o(\vec{x}) \equiv \vec{v}(\vec{x}, 0)\,, \quad T_o(\vec{x}) \equiv T(\vec{x}, 0)\,. \tag{9.33}$$

En el caso de un fluido incompresible [ecuaciones (9.8)-(9.11)], al ser $\rho =$ constante, hay que especificar $p_o(\vec{x}) \equiv p(\vec{x}, 0)$ en vez de ρ_o, y la condición inicial para $\vec{v}$ debe ser solenoidal, $\nabla \cdot \vec{v}_o = 0$. A veces se buscan soluciones periódicas de las ecuaciones (lo cual es solo posible si las condiciones de contorno son también periódicas en el tiempo, o estacionarias), en cuyo caso no se imponen condiciones iniciales, sino que se presupone una determinada dependencia temporal (periódica) en la solución. Si lo que se busca es la solución estacionaria de las ecuaciones (compatible solo con condiciones de contorno estacionarias), los términos con derivadas temporales son idénticamente nulos y solo son necesarias condiciones de contorno.

El tipo de **condiciones de contorno** depende del problema particular considerado. En términos generales, se necesitan dos condiciones de contorno para la velocidad (debido a que el término $\nabla \cdot \overline{\overline{\tau}}'$ contiene derivadas segundas de la velocidad), dos condiciones de contorno para la temperatura [término de segundo orden $\nabla \cdot (K \nabla T)$], y una condición de contorno más que puede especificarse en términos de la presión o de la densidad (evidentemente, en flujos incompresibles la condición de contorno no puede ser en términos de la densidad).

Para concretar un poco más las condiciones de contorno se considerará un ejemplo típico: el flujo alrededor de un cuerpo sólido definido por la superficie $S(\vec{x}) = 0$, que suponemos fijo en el sistema de referencia considerado (ver Fig. 9.1). Este problema quedará definido con las siguientes condiciones de contorno:

$$\vec{v} = 0 \quad \text{en} \quad S(\vec{x}) = 0\,, \tag{9.34}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_a(\vec{x}, t) = V\vec{e}_x \quad \text{en} \quad |\vec{x}| \to \infty\,, \tag{9.35}$$

$$p = p_a(\vec{x}, t) \quad \text{en} \quad |\vec{x}| \to \infty\,, \tag{9.36}$$

$$T = T_p(\vec{x}, t) \quad \text{en} \quad S(\vec{x}) = 0\,, \tag{9.37}$$

$$T = T_a(\vec{x}, t) \quad \text{en} \quad |\vec{x}| \to \infty\,. \tag{9.38}$$

Es decir, sobre la superficie del cuerpo la velocidad y la temperatura del fluido son iguales a la velocidad y temperatura de la superficie sólida ($\vec{v} = 0$ y $T = T_p$, respectivamente; si la velocidad del cuerpo en relación a nuestro sistema de referencia fuese $\vec{v}_p(\vec{x}, t)$, la condición de contorno sería $\vec{v} = \vec{v}_p(\vec{x}, t)$ sobre $S(\vec{x}, t) = 0$, que incluye la posibilidad de que los distintos puntos de la superficie del cuerpo se muevan con velocidades diferentes y varíen con el tiempo). Esta igualdad se debe a que la hipótesis de equilibrio termodinámico local ($Kn \ll 1$) exige que las partículas fluidas en contacto con la superficie deben de estar en equilibrio termodinámico con ella. Si Kn no fuese pequeño, podrían existir diferencias entre $\vec{v}$ y T en $S(\vec{x}) = 0$ y los correspondientes valores de la superficie sólida, pero que no consideraremos aquí.[3] Las otras dos condiciones de contorno son los valores de $\vec{v}, p$ y T lejos del cuerpo. Estas últimas condiciones pueden sustituirse por otras equivalentes como, por ejemplo, ρ_∞ en vez de p_∞, o cualquier otra combinación entre p_a, ρ_a y T_a, ya que dadas dos de ellas, la ecuación de estado nos proporciona la tercera.

A veces, la condición de contorno (9.37) es sustituida por

$$K\nabla T(\vec{x}, t) \cdot \vec{n} = q_p(\vec{x}, t) \quad \text{en} \quad S(\vec{x}) = 0\,, \tag{9.39}$$

donde $\vec{n}$ es el vector unitario normal a S, equivalente a especificar el flujo de calor a través de la superficie [una combinación entre (9.37) en parte de la superficie y (9.39) en el resto es también posible]. En el supuesto que la condición de contorno sea de la forma (9.39), el equilibrio termodinámico local implícito en (9.39) (ley de Fourier) y en las ecuaciones asegurarían que la temperatura del fluido sobre la superficie fuese igual a la temperatura del sólido, pero esta sería desconocida en principio.[4]

Otras condiciones de contorno que aparecen en muchos problemas y que no están contempladas en el ejemplo anterior son las que aparecen cuando existe una superficie libre que separa dos fluidos inmiscibles, como por ejemplo un gas y un líquido. En estas situaciones hay que tener en cuenta la *tensión superficial* de la interfaz, que no se considerará aquí. Prescindiendo de ella (es decir, suponiendo que la tensión superficial es despreciable), las condiciones de contorno asociadas a la superficie libre son las siguientes. (a) En primer lugar,

[3] La condición de contorno para la velocidad sobre una superficie sólida fue objeto de polémica durante gran parte del siglo XIX, después de que se establecieran las ecuaciones de Navier-Stokes y se empezaran a resolver problemas concretos, los cuales exigían una nueva condición de contorno en relación a las ecuaciones de Euler (lección 15) que fueron establecidas mucho antes. Esta polémica se zanjó con la introducción por Stokes de la condición de contorno de adherencia a la superficie, $\vec{v} = \vec{v}_p$. En cuanto a las condiciones de contorno con *deslizamiento* o diferencia de velocidad (y temperatura) entre el fluido y la superficie, las cuales son necesarias cuando la hipótesis de equilibrio termodinámico local no se cumple, ver, por ejemplo, T.I. Gombosi, 1994, *Gaskinetic theory* (Cambridge University Press, Cambridge), capítulo X.

[4] De una forma más rigurosa, habría que resolver las ecuaciones del fluido y la ecuación térmica correspondiente al sólido conjuntamente, imponiendo las dos condiciones de contorno de igualdad de temperaturas e igualdad de flujos de calor en S. Las condiciones (9.37) o (9.39) son simplificaciones que se hacen en muchos problemas debido a que, o bien la temperatura del sólido es conocida (impuesta externamente), o bien se quiere imponer un cierto flujo de calor. Por otra parte, estas condiciones de contorno no tienen en cuenta el posible aporte (o eliminación) de calor debido a la radiación sobre (o emitida por) la interfaz fluido-sólido (véase, por ejemplo, Bird et al., 1960, capítulo 14).

la interfaz es, en la mayoría de los problemas reales, desconocida *a priori,* por lo que las condiciones de contorno se especifican en una superficie $S(\vec{x},t)=0$ desconocida, pero que debe verificar la ecuación

$$\frac{DS(\vec{x},t)}{Dt}=0\,, \tag{9.40}$$

es decir, la interfaz es una superficie fluida. (b) Igualdad de las velocidades y de los esfuerzos normales y tangenciales a ambos lados de la interfaz,

$$\vec{v}_1=\vec{v}_2\,,\quad \vec{n}\cdot\overline{\overline{\tau}}_1\cdot\vec{n}=\vec{n}\cdot\overline{\overline{\tau}}_2\cdot\vec{n}\,,\quad \overline{\overline{\tau}}_1\cdot\vec{n}-(\vec{n}\cdot\overline{\overline{\tau}}_1\cdot\vec{n})\vec{n}=\overline{\overline{\tau}}_2\cdot n-(\vec{n}\cdot\overline{\overline{\tau}}_2\cdot\vec{n})\vec{n}\quad\text{en}\quad S(\vec{x},t)=0\,, \tag{9.41}$$

donde los subíndices 1 y 2 hacen referencia a los dos fluidos inmiscibles. (c) Igualdad de las temperaturas y flujos de calor a ambos lados de la interfaz,

$$T_1=T_2\,,\quad K_1\nabla T_1\cdot\vec{n}=K_2\nabla T_2\cdot\vec{n}\quad\text{en}\quad S(\vec{x},t)=0\,. \tag{9.42}$$

Si la tensión superficial no fuese nula, la única condición de contorno que cambiaría sería la igualdad de esfuerzos (normales y tangenciales) en la superficie, que debería tener en cuenta los esfuerzos adicionales asociados a la tensión superficial.

9.4. Existencia, unicidad y estabilidad de las soluciones. Turbulencia

El problema matemático de establecer la existencia y la unicidad del problema constituido por las ecuaciones (9.1)-(9.7) y las correspondientes condiciones iniciales y de contorno es muy complejo debido, sobre todo, a la no linealidad de las ecuaciones (términos convectivos de las ecuaciones). Son muy pocos los resultados generales que han sido posible establecer en este sentido, casi todos ellos referidos a flujos incompresibles (el alumno interesado en estos temas matemáticos formales de las ecuaciones de Navier-Stokes puede consultar, por ejemplo, el libro de R. Téman, *Navier-Stokes Equations,* Elsevier, Amsterdam, 1984; ver también The Millenium problems: Navier-Stokes equations).

Prueba de la complejidad de las ecuaciones de Navier-Stokes es el escaso número de soluciones *exactas* que se conocen, casi todas ellas correspondientes a flujos incompresibles y a movimientos en los cuales los términos convectivos (no lineales) de las ecuaciones son idénticamente nulos (algunas de ellas se considerarán en las lecciones siguientes; un repertorio más amplio de estas soluciones exactas puede verse, por ejemplo, en Schlichting y Gersten, 2000, capítulo V, en Rosenhead, 1988, capítulo III, y en Landau y Lifshitz, 1987, capítulo II).

Un problema que presentan las soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes asociado a la no linealidad es el de la **estabilidad.** Dadas unas determinadas condiciones de contorno estacionarias, cabría pensar que, independientemente de las condiciones iniciales, pasado un cierto tiempo se llegaría a un flujo estacionario correspondiente a la solución estacionaria de las ecuaciones y condiciones de contorno. Pero esto no siempre es así. En la práctica se encuentra que cuando los parámetros que gobiernan el problema están dentro de ciertos rangos, no se llega nunca a una solución estacionaria. Matemáticamente lo que sucede es que la solución estacionaria en esos rangos paramétricos es inestable, es decir, cualquier perturbación de la solución, por pequeña que sea, crece indefinidamente en el tiempo. Como

en todo flujo real siempre existen pequeñas perturbaciones, aunque la solución estacionaria del problema existe y está bien definida, al ser inestable no se da en la práctica. En otras palabras, para que una solución tenga significación real no basta que satisfaga las ecuaciones del movimiento y cumpla las condiciones iniciales y de contorno, es preciso, además, que dicha solución sea estable, para que las pequeñas perturbaciones que puedan producirse en las diversas magnitudes del movimiento, las cuales existen siempre en la realidad por multitud de causas, tiendan a amortiguarse al avanzar el tiempo. Las inestabilidades conducen casi siempre a movimientos que se denominan **turbulentos**, a los cuales está dedicada la última parte del curso.

Aunque en este curso introductorio no se va a tratar el importante tema de las inestabilidades hidrodinámicas, a continuación se comentará muy brevemente un ejemplo significativo para que se tenga una idea básica. El ejemplo consiste en el flujo de un fluido incompresible (por ejemplo agua) en un conducto de sección circular. Este problema fue considerado por Reynolds en 1883 en su trabajo pionero sobre la inestabilidad y la turbulencia (más detalles se verán en la práctica de laboratorio sobre el experimento de Reynolds). Para un conducto *infinito* alineado según el eje x y de diámetro D, veremos en la lección 12 que el campo de velocidad, solución estacionaria de la ecuación de Navier-Stokes para este problema, se puede escribir como

$$\vec{v} = u(r)\vec{e}_x\,, \quad u(r) = 2V\left[1 - \left(\frac{2r}{D}\right)^2\right]\,, \tag{9.43}$$

donde r es la coordenada radial y V es la velocidad media (igual al caudal Q que circula por el conducto dividido por la sección, $V = 4Q/\pi D^2$). Es decir, el movimiento es *unidireccional* (con solo una componente del vector velocidad según el eje x), siendo el perfil de la velocidad un paraboloide: la velocidad es máxima en el centro e igual a dos veces la velocidad media, y nula en la pared del conducto $r = D/2$. Reynolds observó experimentalmente que esta solución **laminar** se presenta en la práctica siempre que el parámetro adimensional

$$Re \equiv \frac{V\rho D}{\mu}\,, \tag{9.44}$$

llamado **número de Reynolds** en su honor, es menor que un cierto valor crítico (alrededor de 2300). Para valores mayores que el crítico, Reynolds observó (inyectando tinta en el flujo) que el movimiento dejaba de ser unidireccional para volverse tridimensional y caótico (**turbulento),** y ello a pesar de que la solución anterior es válida independientemente del valor del número de Reynolds. Esto se debe a que el flujo se hace inestable por encima de un valor crítico Re^*, de manera que si $Re > Re^*$, cualquier perturbación presente en el flujo se amplifica exponencialmente hasta invalidar la solución estacionaria (9.43). Esto no quiere decir necesariamente que para $Re > Re^*$ no se encuentren soluciones laminares en la práctica, pero son altamente improbables, ya que siempre existen perturbaciones originadas, por ejemplo, en la entrada del conducto. Si uno es extremadamente cuidadoso en el diseño de la entrada del conducto, se puede *retrasar* la aparición del flujo turbulento, pero la inestabilidad está presente por encima de Re^*, y más tarde o más temprano el flujo se hará turbulento si el conducto es suficientemente largo. Por el contrario, si $Re < Re^*$, el flujo es siempre estable (laminar), ya que todas las perturbaciones que se puedan producir son amortiguadas.

Existen muchos tipos diferentes de inestabilidades hidrodinámicas. El ejemplo anterior es un caso típico de inestabilidad relacionada con la viscosidad del fluido, cuya aparición

está caracterizada por un número de Reynolds crítico. Otras inestabilidades están asociadas a fuerzas centrífugas, gravitatorias, magnéticas, etc., y su aparición viene caracterizada por números adimensionales que cuantifican esas fuerzas.

Como se apuntó anteriormente, la inestabilidad de las soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes y la consecuente formación de movimientos caóticos e irregulares, en una palabra, turbulentos, es una consecuencia del caracter no lineal de las ecuaciones, es decir, de los términos convectivos $\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}$ y $\vec{v}\cdot\nabla T$. Las soluciones turbulentas que aparecen cuando dejan de ser estables las laminares son, por supuesto, también soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes, pero su carácter caótico e impredecible las hacen poco útiles en la prática. Por ello, cuando se estudian los flujos turbulentos desde un punto de vista ingenieril, se recurre a un tratamiento estadístico de las soluciones, que se complementa con informaciones empíricas (se verán algunos ejemplos al final de este curso). Podría pensarse que estas soluciones caóticas son el resultado de la complejidad del problema, es decir, del enorme número de grados de libertad presentes en un flujo real, que hace imposible obtener una información cuantitativa precisa del movimiento, recurriéndose por ello al tratamiento estadístico. Ésta era una creencia que se tenía hasta hace relativamente poco tiempo, basada en que casi todos los comportamientos caóticos aparecían en sistemas con muchos grados de libertad (un gas o un líquido está constituido por muchísimas moléculas y por ello se recurre a teorías que de una manera u otra introducen hipótesis estadísticas, como la Teoría Cinética de Gases, o la Teoría de Medios Contínuos que estamos utilizando para describir a los fluidos). Pero se sabe que sistemas mecánicos simples, con la condición de que sean no lineales y tengan tres o más grados de libertad, pueden tener comportamientos caóticos e impredecibles en algunos rangos paramétricos. Un ejemplo típico es el péndulo esférico forzado que, con solo tres grados de libertad, tiene soluciones caóticas para ciertos valores del parámetro forzador. En definitiva, sistemas no lineales simples no necesariamente poseen comportamientos dinámicos simples.

9.5. Métodos de estudio de los problemas fluidomecánicos

Ante la enorme complejidad de obtener soluciones exactas de las ecuaciones de Navier-Stokes, a la hora de obtener resultados prácticos se han seguido varias alternativas, que se resumen a continuación.

9.5.1. Métodos experimentales

Una de las técnicas más comúnmente usadas para resolver problemas fluidomecánicos ha sido, y sigue siendo, la experimentación guiada por el análisis dimensional y la semejanza física, que ha proporcionado resultados muy fructíferos. Ejemplo pionero en este campo fue el experimento de Reynolds descrito anteriormente: Reynolds obtuvo el parámetro adimensional (9.44), que caracteriza la transición de flujo laminar a turbulento en un conducto, mediante un análisis puramente dimensional del problema. La lección siguiente se dedica a este tema tan importante del análisis dimensional y la semejanza física, que no es exclusivo, ni mucho menos, de la Mecánica de Fluidos.

Las técnicas experimentales en la Mecánica de Fluidos han avanzado extraordinariamente en los últimos años. Por ejemplo, a los métodos clásicos de medición de la velocidad mediante medidas de la presión (tubos de Pitot y similares) y por anemometría de hilo

caliente, se han sumado métodos ópticos, no intrusivos, como la anemometría Láser-Doppler, o la anemometría Fase-Doppler que, aparte de no interferir en el flujo, permite obtener mucha más información sobre el campo de velocidades y otras magnitudes fluidas. También se han introducido nuevas técnicas de visualización de flujos, muy útiles para obtener una información cualitativa del movimiento, y que en muchos casos es imprescindible previamente a la experimentación cuantitativa, o a la *búsqueda* de soluciones matemáticas del problema. Con la llegada de ordenadores potentes, han sido posible técnicas de visualización *cuantitativas* de flujos mediante el seguimiento con una cámara de partículas dispersas en el fluido y el tratamiento digital de las imágenes sucesivas (técnica llamada PIV, del inglés *Particle Image Velocimetry).* Esta técnica permite tener instantáneamente el campo de velocidad de un flujo. Con el uso del ordenador también es posible aprovechar ahora datos que hubieran sido inservibles hace algunos años, y realizar tratamientos estadísticos que no era posible hace poco tiempo. Además, se pueden formar bancos de datos de resultados experimentales y, por tanto, su utilización sin la necesidad de realizar uno mismo los experimentos.

9.5.2. Modelos simplificados

Otro de los métodos más empleados en la resolución de problemas fluidomecánicos ha sido la utilización de modelos simplificados, tanto de las propiedades del fluido como del tipo de movimiento. Son pocos los campos de la Física en donde el empleo de modelos simplificados ha sido tan fecundo como en la Mecánica de Fluidos. Uno de los modelos más espectaculares ha sido el de suponer el **campo de velocidades solenoidal (o flujo incompresible),** considerado en detalle en la sección 9.2. Como se recordará, esta aproximación se cumple prácticamente siempre en los flujos de líquidos, y en bastantes flujos de gases caracterizados por la *pequeñez* de ciertos parámetros adimensionales, entre los cuales el más importante es el número de Mach. Ésta es una constante de los modelos simplificados: su validez está caracterizada porque ciertos parámetros adimensionales que gobiernan el problema son muy grandes, o muy pequeños, por lo que se pueden *despreciar* ciertos términos de las ecuaciones, simplificándolas. De aquí la importancia de analizar dimensionalmente las ecuaciones previamente a la resolución de cualquier problema (ver lección siguiente).

Otro modelo simplificado muy importante en la Mecánica de Fluidos es el modelo de **flujo o movimiento ideal,** consistente en suponer nulos los efectos disipativos (básicamente, suponer que la viscosidad y la conductividad térmica son nulas) en las ecuaciones del movimiento. A este modelo se dedica una buena parte de la asignatura. La relevancia histórica de esta hipótesis queda patente no solo en el hecho de que las ecuaciones del movimiento para el fluido ideal fueran establecidas por Euler casi un siglo antes de la formulación de las ecuaciones de Navier-Stokes, sino, también, en la gran fecundidad de ideas que ha originado, especialmente con la Teoría de Capa Límite a principios de este siglo. La hipótesis de fluido ideal se aplica en muchos problemas debido a que una fracción importante de los fluidos que se presentan en la naturaleza, así como muchos de interés tecnológico, entre los que se incluyen el aire y el agua, tienen viscosidades y conductividades térmicas muy pequeñas, con lo que los efectos disipativos son despreciables, salvo en problemas muy especiales o en regiones muy limitadas del flujo (ondas de choque, capas límites, estelas, etc.); lo cual no quiere decir que estas regiones donde los efectos disipativos son importantes sean irrelevantes, ya que muchas veces condicionan la totalidad del movimiento. El empleo del modelo de fluido ideal introduce una simplificación fundamental en las ecuaciones de Navier-Stokes: desaparecen

los términos que contienen las derivadas de mayor orden ($\nabla \cdot \overline{\overline{\tau}}'$ y $\nabla \cdot \vec{q}$). Por tanto, no se puede imponer, entre otras, la condición física esencial del fluido viscoso de no deslizamiento en una superficie sólida. Esto hace que la solución de un problema con el modelo ideal sea esencialmente distinta que la solución del mismo problema con fluido viscoso, al menos en la inmediata proximidad del contorno, incluso cuando se hace tender a cero el coeficiente de viscosidad en la solución *viscosa,* cuyo límite cabría esperar que proporcionase la solución correspondiente al fluido ideal. Esta dificultad, que produjo una gran controversia y algunas paradojas a finales del siglo XIX y principios del XX, la solventó Prandtl con la introdución del concepto de capa límite en 1904, que se verá más adelante.

La simplificación de flujo ideal está caracterizada, como veremos en la lección siguiente, por el límite en el cual el número de Reynolds [ecuación (9.44)] es muy grande. El límite opuesto, consistente en suponer que el número de Reynolds es muy pequeño, caracteriza a los flujos en los que los efectos disipativos son dominantes en las ecuaciones. Estos flujos constituyen también un capítulo importante de la Mecánica de Fluidos, siendo algunas de las aplicaciones más relevantes la lubricación fluidomecánica, ciertos flujos en conductos y la sedimentación de partículas sólidas pequeñas. Estos flujos en los que los efectos disipativos son dominantes (número de Reynolds pequeño) se estudiarán en el Tema VI. La razón de considerar los flujos con viscosidad dominante previamente a los flujos ideales, contrariamente a como históricamente han sido introducidos, se debe, principalmente, a que en el límite de viscosidad dominante las ecuaciones son lineales al desaparecer los términos convectivos, con lo que su resolución es mucho más simple.

9.5.3. Métodos numéricos

Por último, otro de los métodos de ataque de las ecuaciones de Navier-Stokes es la integración numérica directa, que en la actualidad está en plena expansión debido al desarrollo espectacular de los ordenadores. Para la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes se utilizan métodos numéricos muy diversos, algunos de ellos desarrollados específicamente para resolver problemas fluidomecánicos. Entre ellos están los métodos de diferencias finitas, de elementos finitos, de elementos de contorno, el método de las características, los métodos espectrales, etc. La mayor dificultad con los métodos puramente numéricos es el de la estabilidad dinámica de las ecuaciones, que da lugar a fenómenos de turbulencia, la cual viene a sumarse a la dificultad intrínseca de las ecuaciones. A pesar de ello, la capacidad y rapidez de los ordenadores ha crecido tanto en los últimos tiempos que ya es posible resolver numéricamente las ecuaciones de Navier-Stokes en situaciones no triviales. En particular, es ya posible resolver sin dificultad cualquier problema fluido bidimensional no estacionario y muchos problemas tridimensionales, salvo problemas que involucran escalas muy pequeñas como la de la turbulencia, o problemas con zonas muy delgadas a altos números de Reynolds. De todas formas, se están realizando avances muy importantes en estas áreas en los últimos tiempos, tanto en técnicas computacionales como en capacidad de los ordenadores, y no es improbable que muchos de los problemas que actualmente son inaccesibles puedan ser resueltos en un futuro inmediato.

Uno de los aspectos más importantes de la introducción del ordenador en la resolución de problemas fluidomecánicos (como ocurre también en otras ramas de la física) ha sido la aparición de la **experimentación numérica,** con dos consecuencias muy importantes. En primer lugar, una vez que se consigue simular un flujo, es posible medir *todo* sobre él, incluyendo magnitudes básicas, como la vorticidad, muy difíciles de medir por experimen-

tación física. Estas magnitudes forman parte intrínseca de la simulación numérica y están disponibles sin esfuerzo adicional a la vez que otras magnitudes de las que sí se podría obtener información experimental. Por otra parte, es posible realizar experimentos numéricos en situaciones esencialmente imposibles para los experimentos físicos. Por supuesto, hay muchos flujos cuya complicación excede todavía la capacidad de los ordenadores más potentes, y en algunos de ellos el experimento físico sigue siendo aun imprescindible para esclarecer el problema.

Como ocurre con los métodos experimentales, a pesar de que los métodos numéricos constituyen cada vez más una de las herramientas más útiles para resolver problemas fluidomecánicos, es difícil incluirlos en un apretado programa de un curso introductorio a la Mecánica de Fluidos aplicada a la Ingeniería. Por ello estos métodos se suelen dejar para un curso más avanzado de Mecánica de Fluidos.

Referencias.

- G. K. BATCHELOR, 1967. Capítulo 3.
- R. B. BIRD et al. 1960. Capítulo 18.
- L. D. LANDAU y E.M. LIFSHITZ, 1987. Capítulo II.
- G. MILLÁN BARBANY, 1975. Capítulo I.
- L. ROSENHEAD, 1988. Capítulos I y III.
- H. SCHLICHTING y K. GERSTEN, 2000. Capítulo V.

TEMA IV:
Análisis dimensional y semejanza física

CAPÍTULO 10

Análisis dimensional y semejanza física

10.1. Introducción

El análisis dimensional es importante por dos motivos principales. Por un lado permite conocer el mínimo número de variables que gobierna un determinado problema, reduciendo las variables físicas originales a un conjunto menor de parámetros adimensionales. De esta forma racionaliza la experimentación, ya que establece cuáles son los parámetros realmente relevantes en un determinado proceso. Por ejemplo, en el experimento de Reynolds que se describió en la sección 9.4 (ver también práctica de laboratorio descrita más adelante), aunque la transición de flujo laminar a turbulento viene en principio gobernada por las propiedades del líquido, ρ y μ, por el diámetro del conducto, D, y por el caudal (o velocidad media U), el análisis dimensional nos dice que el proceso no está gobernado por cada una de estas variables por separado, sino por una combinación adimensional de ellas, $\rho DU/\mu$ (el número de Reynolds), y que es, por tanto, el parámetro que debemos controlar experimentalmente. Esta minimización de las variables también permite establecer de una forma precisa cuáles son las condiciones que se deben cumplir para que exista *semejanza física* entre dos problemas: no hay más que exigir que las variables adimensionales sean iguales. En el ejemplo anterior, para que dos flujos sean físicamente semejantes no hace falta que sean iguales todos los parámetros físicos, ρ, μ, D y U (lo cual exigiría que los flujos fuesen idénticos), sino que es suficiente con que el número de Reynolds sea el mismo. El otro motivo por el cual el análisis dimensional es importante es que permite conocer con precisión cuando una determinada variable es relevante o no en un problema, ya que las nuevas variables son *puros números* adimensionales; basta averiguar si alguno de esos números es siempre muy pequeño, o muy grande, o aproximadamente constante, para que esa *variable* no influya, prácticamente, en el proceso.

El análisis dimensional está basado simplemente en que las leyes físicas, que relacionan magnitudes cuyos valores dependen del sistema de unidades utilizado, son independientes de las dimensiones usadas. Si estas leyes son conocidas explícitamente, como ocurre con las ecuaciones de Navier-Stokes en la Mecánica de Fluidos, una forma de aplicar el análisis dimensional consiste en *adimensionalizar* las ecuaciones, es decir, en escribirlas en términos de variables sin dimensiones, lo cual proporciona el conjunto de parámetros adimensionales que gobierna el proceso, cuyo número es siempre menor que el de los parámetros dimensionales originales. Pero el análisis dimensional se puede aplicar incluso si no se conocen las leyes explícitamente (por ejemplo, cuando lo que queremos es, precisamente, hallar esas leyes

experimentalmente), si se conocen las magnitudes físicas que *pueden* influir en el proceso considerado. Antes de pasar a formular la teoría general del análisis dimensional basada en el Teorema Π de Buckingham (sección 10.4), vamos a adimensionalizar las ecuaciones de Navier-Stokes para conocer cuáles son los parámetros adimensionales más importantes que aparecen en la Mecánica de Fluidos, algunos de los cuales ya han sido introducidos en las lecciones anteriores.

10.2. Parámetros adimensionales de la Mecánica de Fluidos

Para adimensionalizar las ecuaciones de Navier-Stokes (9.1)-(9.5) definimos las siguientes variables:

$$t^* = t/t_o, \quad \vec{x}^* = \vec{x}/L_o, \quad \vec{v}^* = \vec{v}/V_o, \quad p^* = p/p_o, \quad \rho^* = \rho/\rho_o, \quad \mu^* = \mu/\mu_o,$$
$$\mu_v^* = \mu_v/\mu_o, \quad \vec{f}_m^* = \vec{f}_m/g_o, \quad T^* = T/T_o, \quad K^* = K/K_o, \quad c_v^* = c_v/c_{vo}. \tag{10.1}$$

Las variables con asterisco son adimensionales y las magnitudes con subíndice cero son valores característicos, o típicos, de las respectivas magnitudes en el problema que estemos considerando, de forma que las variables adimensionales son de orden unidad (para las fuerzas másicas suponemos que éstas son solo gravitatorias, y g_o es la aceleración de la gravedad a nivel del mar). Introduciendo estas nuevas variables en las ecuaciones (9.1)-(9.5), se obtiene

$$\frac{\rho_o}{t_o}\frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \frac{\rho_o V_o}{L_o}\nabla^* \cdot (\rho^* \vec{v}^*) = 0\,, \tag{10.2}$$

$$\frac{\rho_o V_o}{t_o}\rho^*\frac{\partial \vec{v}^*}{\partial t^*} + \frac{\rho_o V_o^2}{L_o}\rho^* \vec{v}^* \cdot \nabla^* \vec{v}^* = -\frac{p_o}{L_o}\nabla^* p^* + \frac{\mu_o V_o}{L_o^2}\nabla^* \cdot \overline{\overline{\tau}}'^* + \rho_o g_o \rho^* \vec{f}_m^*\,, \tag{10.3}$$

$$\frac{\rho_o c_{vo} T_o}{t_o}\rho^*\frac{\partial e^*}{\partial t^*} + \frac{\rho_o V_o c_{vo} T_o}{L_o}\rho^* \vec{v}^* \cdot \nabla^* e^*$$
$$= -\frac{p_o V_o}{L_o} p^* \nabla^* \cdot \vec{v}^* + \frac{\mu_o V_o^2}{L_o^2}\Phi^* + \frac{K_o T_o}{L_o^2}\nabla^* \cdot (K^* \nabla^* T^*)\,, \tag{10.4}$$

donde ∇^* es el operador nabla en la variable $\vec{x}^*$ y se ha supuesto, por simplicidad, que no hay aportes volumétricos de calor. Para que todos los términos que aparecen en las ecuaciones sean adimensionales, hay que dividirlas por alguno de los factores dimensionales que multiplican a las variables con asterisco. Para que aparezcan los parámetros adimensionales que normalmente se utilizan, dividimos por los factores que multiplican al segundo término (término convectivo) de cada una de las ecuaciones, resultando:

$$\frac{L_o}{V_o t_o}\frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \nabla^* \cdot (\rho^* \vec{v}^*) = 0\,, \tag{10.5}$$

$$\frac{L_o}{V_o t_o}\rho^*\frac{\partial \vec{v}^*}{\partial t^*} + \rho^* \vec{v}^* \cdot \nabla^* \vec{v}^* = -\frac{p_o}{\rho_o V_o^2}\nabla^* p^* + \frac{\mu_o}{\rho_o V_o L_o}\nabla^* \cdot \overline{\overline{\tau}}'^* + \frac{L_o g_o}{V_o^2}\rho^* \vec{f}_m^*\,, \tag{10.6}$$

$$\frac{L_o}{V_o t_o}\rho^*\frac{\partial e^*}{\partial t^*} + \rho^* \vec{v}^* \cdot \nabla^* e^*$$

$$= -\frac{p_o}{\rho_o c_{vo} T_o} p^* \nabla^* \cdot \vec{v}^* + \frac{\mu_o V_o}{\rho_o c_{vo} T_o L_o} \Phi^* + \frac{K_o}{\rho_o c_{vo} V_o L_o} \nabla^* \cdot (K^* \nabla^* T^*) \,. \tag{10.7}$$

Los parámetros adimensionales que aparecen en cada término da una idea de la importancia de ese término en relación a los términos convectivos, que están multiplicados por la unidad. A continuación se enumeran dichos parámetros adimensionales y se comenta su significado físico.

Número de Strouhal,

$$St \equiv \frac{L_o}{V_o t_o} \,, \tag{10.8}$$

que aparece multiplicando a los términos que en cada ecuación representa las variaciones temporales. Este número es el cociente entre el *tiempo de residencia,* L_o/V_o, y el tiempo característico t_o, siendo una medida de la importancia de la variación local frente a la variación por el movimiento del fluido. Si $St \ll 1$, los términos de variación local son despreciables frente a los términos convectivos, y el movimiento se denomina *casi estacionario.* Físicamente, si $St \ll 1$, el fluido recorre, con velocidad característica V_o, la longitud característica del problema L_o en un tiempo (L_o/V_o) mucho menor que el tiempo característico t_o de variación de las magnitudes fluidas con el tiempo, por lo que el fluido *no se entera* de la variación temporal y el flujo se puede considerar estacionario. Por el contrario, si $St \gg 1$, la variación temporal es mucho más importante (más rápida) que la asociada al movimiento del fluido, y se pueden despreciar los términos convectivos de las ecuaciones.

Número de Euler,

$$Eu \equiv \frac{p_o}{\rho_o V_o^2} \,, \tag{10.9}$$

que representa la importancia relativa de las fuerzas de presión frente a la convección de cantidad de movimiento o *fuerzas de inercia.* Este número está relacionado con dos que ya hemos definido con anterioridad, dependiendo que el fluido sea un gas (ideal) o un líquido (incompresible). En el caso en que el fluido sea un gas ideal, se tiene

$$Eu = \frac{p_o}{\rho_o V_o^2} = \frac{1}{\gamma} \frac{a_o^2}{V_o^2} = \frac{1}{\gamma M^2} \,, \tag{10.10}$$

donde a_o es la velocidad del sonido del gas, γ es la relación de calores específicos y M es el **número de Mach** o cociente entre la velocidad del gas y la velocidad del sonido (ver sección 9.2), todo ello en las condiciones p_o, ρ_o. Así, para un gas ideal, el número de Euler está relacionado con el inverso del cuadrado del número de Mach y, por tanto, nos da una idea de la compresibilidad del gas en el flujo considerado. Si $Eu \gg 1$, al ser γ siempre de orden unidad, $M^2 \ll 1$ y, como se discutió en la sección 9.2, el flujo se puede considerar como incompresible o solenoidal.

Para un líquido ideal ($\rho = constante$), el número de Euler está relacionado con el **número de cavitación** Ca, definido también en la sección 9.2, puesto que si $p_o \gg p_v$, $Eu \simeq Ca/2$. Por tanto, está relacionado con la posibilidad de cavitación del líquido: cuanto más pequeño sea Eu, mayor es la posibilidad de cavitación, ya que la *depresión* dinámica originada por el movimiento, del orden de $\rho_o V_o^2$, es mayor para una p_o dada. Así, pues, el número de Euler está relacionado, tanto para gases como para líquidos, con la compresibilidad del fluido

(recuérdese que, en la mayoría de las situaciones, la única posibilidad para que un líquido pueda ser compresible es que cavite; véase sección 9.2).

Número de Reynolds,

$$Re \equiv \frac{\rho_o V_o L_o}{\mu_o} = \frac{V_o L_o}{\nu_o} \,. \tag{10.11}$$

Es una medida de la importancia relativa de las fuerzas de inercia frente a las fuerzas viscosas. Si $Re \ll 1$, el término convectivo puede despreciarse frente al viscoso en la ecuación de cantidad de movimiento, y al contrario, si $Re \gg 1$, el término viscoso es despreciable frente al de inercia, teniéndose lo que se denomina un *flujo ideal* (en el límite formal $Re \to \infty$). El número de Reynolds es el parámetro adimensional más importante de la Mecánica de Fluidos por dos razones fundamentales: porque la división de los movimientos fluidos en flujos a altos y bajos números de Reynolds, es decir, movimientos ideales y movimientos con viscosidad dominante, ha sido históricamente la división fundamental de la Mecánica de Fluidos, y es la que utilizaremos en lo que sigue (véase sección 9.5.2); por otra parte, en ausencia de otras fuerzas que no sean las de viscosidad, el número de Reynolds es el parámetro que caracteriza la formación de inestabilidades y la transición a la turbulencia, cuando su valor es mayor que un cierto valor crítico que depende del tipo de flujo.

Número de Froude,

$$Fr \equiv \frac{V_o^2}{g_o L_o} \,, \tag{10.12}$$

que mide la importancia relativa de las fuerzas de inercia frente a las gravitatorias. Si $Fr \gg 1$, las fuerzas gravitatorias pueden despreciarse en el movimiento del fluido y, por el contrario, si $Fr \ll 1$, son dominantes frente a la convección de cantidad de movimiento. Este parámetro es muy relevante en *hidráulica,* en movimientos de líquidos con superficie libre como, por ejemplo, en los flujos en canales abiertos. En los movimientos en conductos o confinados, que constituyen la mayoría de los ejemplos que se considerarán en este curso introductorio a la Mecánica de Fluidos aplicada a la Ingeniería Industrial, este parámetro tiene escasa importancia.

El parámetro $p_o/\rho_o c_{vo} T_o$ representa la relación entre el trabajo de compresión y la convección de energía interna teniendo sentido, por tanto, únicamente en fluidos compresibles. Para un gas ideal se puede escribir:

$$\frac{p_o}{\rho_o c_{vo} T_o} = \frac{R_g}{c_{vo}} = \gamma - 1 \,, \tag{10.13}$$

por lo que es una propiedad del gas y no del tipo de movimiento.

El parámetro $\mu_o V_o/\rho_o c_{vo} T_o L_o$ es una medida de la importancia de la energía disipada por viscosidad frente a la convección de energía interna. Para los líquidos este parámetro suele ser muy pequeño, por lo que la disipación viscosa es generalmente despreciable. Por ejemplo, para el agua a $T_o = 20^o$C ($\nu_o \simeq 10^{-6}$ m^2 / s, $c_{vo} \simeq 4{,}18 \times 10^3$ J/kg K) se tiene $\mu_o V_o/\rho_o c_{vo} T_o L_o \simeq 8 \times 10^{-13} s^{-1} \times V_o/L_o$, por lo que solo cuando las velocidades son extremadamente altas o cuando las magnitudes fluidas varían en longitudes pequeñísimas, la disipación viscosa cuenta en los movimientos de agua. Para ciertos líquidos como los aceites o la glicerina, que tienen una viscosidad mucho mayor que la del agua (el aceite de oliva tiene una viscosidad del orden de 100 veces la del agua, mientras que la viscosidad de la glicerina

a temperatura ambiente es unas 2000 veces mayor que la del agua), las condiciones para que la disipación viscosa cuente no son tan extremas. Para los gases ideales, el parámetro $\mu_o V_o/\rho_o c_{vo} T_o L_o$ es idéntico al parámetro (9.31)(a) si uno cambia c_v por c_p y está, por tanto, también relacionado con la influencia de la disipación viscosa en la compresibilidad del fluido. Haciendo uso de la ecuación de estado del gas ideal y de las definiciones anteriores se puede escribir

$$\frac{\mu_o V_o}{\rho_o c_{vo} T_o L_o} = \gamma(\gamma-1)\frac{M^2}{Re}\,, \tag{10.14}$$

que suele ser muy pequeño.

El **número de Peclet,**

$$Pe \equiv \frac{\rho_o V_o L_o c_{vo}}{K_o}\,, \tag{10.15}$$

representa la relación entre la convección de energía interna y el calor transportado por conducción. En la práctica se suele sustituir c_v por c_p en la definición del número de Peclet, teniéndose

$$Pe \equiv \frac{\rho_o V_o L_o c_{po}}{K_o} = RePr\,, \tag{10.16}$$

donde

$$Pr \equiv \frac{\mu_o c_{po}}{K_o} = \frac{\nu_o}{\alpha_o}\,, \tag{10.17}$$

es el **número de Prandtl.** El número de Prandtl es una propiedad del fluido que representa la importancia relativa que en ese fluido tienen dos fenómenos de transporte molecular: la difusión viscosa o de cantidad de movimiento y la difusión de calor o energía. Para los gases el número de Prandtl es de orden unidad, lo cual es debido a que en los gases ambos transportes se realizan por colisiones moleculares, que son prácticamente igual de efectivas para intercambiar cantidad de movimiento y energía entre las moléculas. Por tanto, el número de Peclet para los gases es del mismo orden que el número de Reynolds, y si las fuerzas viscosas son despreciables en la ecuación de cantidad de movimiento ($Re \gg 1$), también lo es la conducción de calor en la ecuación de la energía (y viceversa, si las fuerzas viscosas son dominantes, también lo es la conducción de calor). Así, la condición $Re \gg 1$ implica viscosidad y conducción de calor despreciables en el movimiento, lo que *normalmente* se entiende por un movimiento o flujo ideal (ver lección 14).

En los líquidos el número de Prandtl tiene un rango de variación muy amplio. Líquidos *comunes* como el agua, el alcohol etílico, etc., tienen un número de Prandtl de orden unidad,[1] por lo que se puede aplicar lo dicho anteriormente para los gases. Líquidos como los aceites son más efectivos transportando cantidad de movimiento que calor, es decir, tienen un número de Prandtl alto ($Pr \simeq 117$ para el aceite de oliva a 15^oC), de forma que si el número de Reynolds es alto, el número de Peclet lo es mucho más, y la condición $Re \gg 1$ sigue caracterizando a los flujos ideales. Por el contrario, si $Re \ll 1$, pero no *excesivamente* pequeño, puede ocurrir que las fuerzas viscosas sean dominantes en la ecuación de cantidad de movimiento sin que lo sea la conducción de calor en la ecuación de la energía. Lo opuesto a esta situación ocurre

[1] En realidad son más bien del orden de la decena; así, a 20^oC, $Pr \simeq 7$ para el agua y $Pr \simeq 15$ para el etanol.

en los metales líquidos, caracterizados por un número de Prandtl muy pequeño al ser mucho más efectiva la conducción de calor que el transporte molecular de cantidad de movimiento. En estos líquidos, la condición $Re \gg 1$ generalmente no implica que la conducción de calor sea despreciable.

Además de los números adimensionales definidos hasta ahora, que son los más comunes, en algunos problemas aparecen otros asociados a fenómenos físicos que no se han incluido en la descripción anterior como, por ejemplo, la tensión superficial, fuerzas originadas por un sistema de referencia no inercial, fuerzas másicas aparte de las gravitatorias, fuerzas de flotabilidad asociada a diferencias de temperaturas, etc. Estos parámetros adimensionales no se verán en este curso introductorio a la Mecánica de Fluidos, pero se pueden derivar fácilmente sin más que adimensionalizar las ecuaciones correspondientes.

En el Cuadro 10.1 se resumen los parámetros adimensionales más relevantes. Antes de abordar cualquier problema fluidodinámico concreto es muy importante tener una idea del orden de magnitud de cada uno de estos parámetros adimensionales para poder tener una idea previa de la naturaleza del movimiento y simplificar el problema convenientemente, si es posible, como se verá a continuación. En particular, en la mayoría de los problemas ingenieriles, es imprescindible tener un conocimiento de los números de Reynolds y de Mach antes de abordarlos.

Cuadro 10.1: Números adimensionales más comunes en Mecánica de Fluidos

Número adimensional	Símbolo y definición	Significado físico	Observaciones
Strouhal	$St = \frac{L_o}{V_o t_o}$	$\frac{Tiempo\ de\ residencia}{Tiempo\ caracteristico}$	$St \ll 1$: Movimiento casi-estacionario
Reynolds	$Re = \frac{\rho_o V_o L_o}{\mu_o}$	$\frac{Fuerzas\ de\ inercia}{Fuerzas\ viscosas}$	$Re \gg 1$: Movimiento ideal $Re \ll 1$: Movimiento *reptante* Caracteriza transición a la turbulencia
Mach	$M = \frac{V_o}{a_o}$	$\frac{Velocidad\ caracteristica}{Velocidad\ del\ sonido}$	$M^2 \ll 1$: Movimiento incompresible
Froude	$Fr = \frac{V_o^2}{g_o L_o}$	$\frac{Fuerzas\ de\ inercia}{Fuerzas\ gravitatorias}$	$Fr \gg 1$: Fuerzas gravitatorias despreciables
Prandtl	$Pr = \frac{\nu_o}{\alpha_o}$	$\frac{Difusion\ viscosa\ (friccion)}{Conduccion\ de\ calor}$	Gases y líquidos comunes: $Pr = O(1)$ Metales líquidos: $Pr \ll 1$ Aceites, glicerina, ... : $Pr \gg 1$
Peclet	$Pe = Re\,Pr$	$\frac{Conveccion\ energia\ interna}{Conduccion\ de\ calor}$	$Pe \gg 1$: Conducción de calor despreciable

10.3. Semejanza física

Para que dos problemas fluidomecánicos sean físicamente semejantes no es necesario que sean *idénticos,* sino que es suficiente con que todos los parámetros adimensionales que aparecen en las ecuaciones de Navier-Stokes que los gobiernan, así como los que aparecen en las condiciones de contorno, sean iguales. Esto es debido a que, si se cumple esa igualdad, la solución *adimensional* del problema es la misma en ambos. La solución *física* para cada problema se obtiene sin más que *deshacer* los cambios de variables utilizando las magnitudes características de cada problema.

Una de las consecuencias prácticas más importantes de la semejanza física es que permite hacer experimentación con *modelos* de una forma rigurosa, extrapolándose sin ambigüedad los resultados al problema *real.* Así, por ejemplo, para estudiar las corrientes que crearían una nueva instalación portuaria, no haría falta hacer la instalación real y comprobar después, sino que se puede hacer un modelo a escala (la igualdad de las condiciones de contorno adimensionales exige la **semejanza geométrica** entre el modelo y el problema real) y experimentar sobre él teniendo en cuenta que los parámetros adimensionales sean los mismos (no haría falta utilizar el mismo fluido, agua salada, sino solamente exigir que los números de Re, Fr, etc., fuesen los mismos; es más, la igualdad de estos números exige casi siempre que el fluido en el modelo tenga propiedades físicas distintas que en la realidad).

Uno de los problemas que se suele encontrar al aplicar la semejanza física a la experimentación con modelos es que, en la mayoría de los casos, no es posible exigir que *todos* los parámetros adimensionales sean iguales. Pero el análisis dimensional también nos da información sobre qué parámetros adimensionales son los más relevantes en el problema considerado, por los que podemos descartar algunos de ellos y hacer una **semejanza física parcial,** es decir, exigir que solo algunos parámetros adimensionales (los más relevantes en el problema dado) sean iguales en el modelo y en el problema real. El análisis dimensional también nos da información sobre el orden de magnitud de los errores cometidos con esta aproximación, puesto que sabemos los valores típicos de los parámetros adimensionales descartados (estos parámetros pueden no tenerse en cuenta porque, o bien son muy pequeños, con lo que el error cometido sería del orden de ellos mismos; o bien son muy grandes, siendo el error del orden del inverso de su valor, o, finalmente, son aproximadamente constantes, con lo que el error es del orden de las fluctuaciones alrededor de esas constantes).

10.4. Teorema Π de Buckingham

La reducción de las variables físicas de las cuales depende un determinado proceso físico mediante el uso de variables adimensionales se puede demostrar de una forma general, independientemente de las relaciones o leyes que gobiernan el proceso, basándose en la homogeneidad o *invariancia* de dichas leyes en relación al sistema dimensional de unidades utilizado. En otras palabras, todos los términos de una determinada ley física deben de ser dimensionalmente homogéneos, hecho que se ha utilizado para *adimensionalizar* las ecuaciones de Navier-Stokes en la sección 10.2. El siguiente teorema, tradicionalmente denominado Teorema Π, se debe a Buckingham (1914).

Considérese un problema físico gobernado por $n+1$ variables físicas, a_o, a_1, ..., a_n, y que satisfacen una cierta relación:

$$a_o = f(a_1, a_2, ..., a_n)\,, \tag{10.18}$$

la cual puede ser conocida teóricamente, o desconocida en principio, pero que se quiere determinar mediante una serie de experimentos. El valor numérico de cada cantidad física (dimensional) a_i depende del sistema de unidades de medida que se utilice. Supongamos que existen $k \leq n+1$ dimensiones independientes, es decir, de las $n+1$ variables a_i hay k que son *dimensionalmente independientes.* Por ejemplo, en un problema puramente mecánico hay tres dimensiones independientes, que pueden ser una masa, una longitud y un tiempo, o cualquier combinación entre ellas; si el problema es termodinámico, hay que añadir una más, por ejemplo, una temperatura, etc. El Teorema Π establece que el número de variables de

que depende el problema puede reducirse a $n+1-k$ si se utilizan variables adimensionales convenientemente elegidas.

En efecto. Supongamos que las variables dimensionalmente independientes son $a_1, a_2, ..., a_k$. Esto quiere decir que las dimensiones de las restantes variables se pueden expresar como producto de las dimensiones de $a_1, a_2, ..., a_k$ (las cuales se designan por $[a_1], [a_2], ..., [a_k]$) elevadas a ciertas potencias:

$$[a_o] = [a_1]^{b_{0,1}} [a_2]^{b_{0,2}} \cdots [a_k]^{b_{0,k}} ,$$
$$[a_{k+1}] = [a_1]^{b_{k+1,1}} [a_2]^{b_{k+1,2}} \cdots [a_k]^{b_{k+1,k}} ,$$
$$...$$
$$[a_n] = [a_1]^{b_{n,1}} [a_2]^{b_{n,2}} \cdots [a_k]^{b_{n,k}} ,$$

donde los $b_{i,j}$ son números racionales. Si definimos las variables adimensionales

$$\pi_o \equiv a_o/(a_1^{b_{0,1}} a_2^{b_{0,2}} \cdots a_k^{b_{0,k}}) ,$$
$$\pi_{k+1} \equiv a_{k+1}/(a_1^{b_{k+1,1}} a_2^{b_{k+1,2}} \cdots a_k^{b_{k+1,k}}) ,$$
$$...$$
$$\pi_n \equiv a_n/(a_1^{b_{n,1}} a_2^{b_{n,2}} \cdots a_k^{b_{n,k}}) ,$$

la relación física (10.18) puede escribirse como

$$\pi_o = \frac{f[a_1, a_2, ..., a_k, (\pi_{k+1} a_1^{b_{k+1,1}} a_2^{b_{k+1,2}} \cdots a_k^{b_{k+1,k}}), ..., (\pi_n a_1^{b_{n,1}} a_2^{b_{n,2}} \cdots a_k^{b_{n,k}})]}{a_1^{b_{0,1}} a_2^{b_{0,2}} \cdots a_k^{b_{0,k}}} , \qquad (10.19)$$

es decir,

$$\pi_o = g(a_1, a_2, ..., a_k, \pi_{k+1}, ..., \pi_n) . \qquad (10.20)$$

Como la ecuación tiene que ser dimensionalmente homogenea, no puede depender de $a_1, a_2, ..., a_k$,

$$\pi_o = g(\pi_{k+1}, ..., \pi_n) , \qquad (10.21)$$

con lo que queda demostrado el teorema.

Si la relación (10.18) se quiere obtener experimentalmente, está claro que la minimización del número de variables es esencial, pues reduce considerablemente el número de experimentos a realizar. En el caso muy particular en que $n = k$, solo queda un parámetro adimensional, por ejemplo π_o, que se determina ¡con un único experimento! Por otra parte, como se comentó en la sección anterior, el uso de parámetros adimensionales permite establecer de una forma rigurosa las condiciones mínimas que se deben verificar para que exista semejanza física, total o parcial, entre dos problemas físicos y, así, el uso experimental de modelos.

Referencias.

- R.A. GRANGER, 1995. Capítulo 7.

- J. PALACIOS, 1964.
- L. J. SEDOV, 1959.
- F. M. WHITE, 2004. Capítulo 5.
- J. ZIEREP, 1971.

Lectura sugerida:

Dynamic similarity, the dimensionless science. Diogo Bolster, Robert E. Hershberger, and Russell J. Donnelly. *Physics Today,* vol. 64(9), p. 42 (2011).

Ejercicios de análisis dimensional

Ejemplo resuelto: Alcance de un proyectil

Supongamos que queremos averiguar experimentalmente cuál es el alcance X de un proyectil de masa m (ver figura 10.1). Primeramente consideraremos el problema sin tener en cuenta la resistencia aerodinámica; es decir, el problema puramente mecánico de una masa puntual (ya se dijo que el análisis dimensional se puede aplicar a cualquier problema físico, no necesariamente fluidomecánico). La resistencia del aire en un proyectil finito se considerará a continuación.

El proyectil es lanzado con una velocidad V y un ángulo de inclinación α. Está claro que X es una función de α, V, m y la aceleración de la gravedad g:

$$X = X(\alpha, m, V, g)\,. \tag{10.22}$$

Como es un problema mecánico, de acuerdo con el Teorema Π, el número de variables se puede reducir a $5-3=2$. Para ello tomamos como variables dimensionalmente independientes m, V y g, cuyas dimensiones son:

$$[m] = [M]\,, \quad [V] = [L][t]^{-1}\,, \quad [g] = [L][t]^{-2}\,, \tag{10.23}$$

donde $[M]$, $[L]$ y $[t]$ representan las dimensiones de masa, longitud y tiempo, respectivamente. Al ser el ángulo α adimensional, la única variable que debemos adimensionalizar es X. Para ello buscamos una combinación apropiada de m, V y g:

$$[X] = [L] = [m]^{\beta}[V]^{\gamma}[g]^{\delta}\,. \tag{10.24}$$

Claramente, $\beta = 0$, $\gamma = 2$ y $\delta = -1$, por lo que el parámetro adimensional asociado a X es:

$$\pi_x = \frac{Xg}{V^2}\,. \tag{10.25}$$

El teorema Π nos dice que

$$\pi_x = f(\alpha)\,, \tag{10.26}$$

es decir,

$$X = \frac{V^2}{g} f(\alpha)\,, \tag{10.27}$$

donde f es una función (desconocida *a priori)* de α. Así, el problema se reduce a hacer una sola serie de experimentos variando únicamente α, sin tener siquiera que variar V, m, ni,

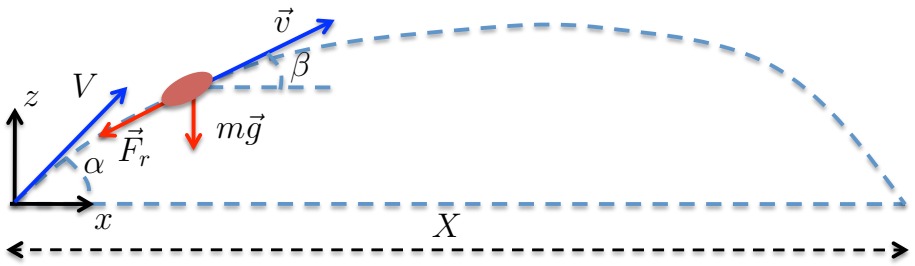


Figura 10.1: Alcance de un proyectil teniendo en cuenta la resistencia aerodinámica.

por supuesto g, ya que la dependencia con estas variables es conocida (en particular, X no depende de la masa).

Por supuesto, la función $f(\alpha)$ en este problema tan sencillo se puede conocer sin hacer ningún experimento, puesto que las ecuaciones que describen el fenómeno son muy sencillas:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0\,, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = -mg\,, \tag{10.28}$$

$$t = 0\,, \quad x = z = 0\,, \quad dx/dt = V\cos\alpha\,, \quad dz/dt = V\sin\alpha\,, \tag{10.29}$$

cuya solución es $x = V\cos\alpha t$, $z = -gt^2/2 + V\sin\alpha t$; es decir, el proyectil describe la parábola $z = x[\tan\alpha - 2gx/(V^2\cos^2\alpha)]$, que proporciona

$$X = \frac{V^2}{g}\sin 2\alpha\,, \tag{10.30}$$

o $f(\alpha) = \sin 2\alpha$. Pero si no conociésemos este resultado, el análisis dimensional nos ha proporcionado la variable, en este caso única, sobre la que tenemos que dirigir nuestros esfuerzos experimentales.

Alcance de un proyectil teniendo en cuenta la resistencia aerodinámica

Si quisiéramos obtener el alcance X teóricamente, habría que resolver las ecuaciones siguientes:

$$m\frac{d^2\vec{x}_{cm}}{dt^2} = m\vec{g} + \vec{F}_r\,, \quad \vec{g} = -g\vec{e}_z\,, \tag{10.31}$$

$$t = 0\,, \quad \vec{x}_{cm} = 0\,, \quad d\vec{x}_{cm}/dt = (V\cos\alpha, 0, V\sin\alpha)\,, \tag{10.32}$$

$$X \equiv x_{cm}(t = t_F)\,, \quad z(t_F) = 0 \quad , \tag{10.33}$$

donde $\vec{x}_{cm}$ es la posición del centro de masa del proyectil y $\vec{F}_r$ es la fuerza de resistencia que ejerce el aire sobre el proyectil. Para hallar esta fuerza hay que resolver las ecuaciones de Navier-Stokes que describen el movimiento del aire alrededor del proyectil. Suponiendo que el flujo del aire es prácticamente incompresible ($M^2 \ll 1$ y $T \simeq$ constante), se tiene

$$\nabla\cdot\vec{v} = 0\,, \tag{10.34}$$

$$\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \rho\vec{v}\cdot\nabla\vec{v} = -\nabla p + \mu\nabla^2\vec{v} + \rho\vec{g}\,, \tag{10.35}$$

$$\vec{v} = 0 \quad \text{sobre} \quad S(\vec{x}) = 0\,, \quad p \to p_a \quad \text{y} \quad \vec{v} = -d\vec{x}_{cm}/dt \quad \text{para} \quad |\vec{x}| \to \infty\,, \tag{10.36}$$

donde $S(\vec{x}) = 0$ es el contorno del proyectil, situado en el origen de coordenadas y caracterizado, por ejemplo, por dos parámetros, longitud L y grosor c. *Lejos* del proyectil ($|\vec{x}| \to \infty$), la velocidad del aire es, respecto a unos ejes que se mueven con el centro de masa del proyectil, $-d\vec{x}_{cm}/dt$, y la presión es la atmosférica, p_a. Una vez que se han obtenido $\vec{v}(\vec{x}, t)$ y $p(\vec{x}, t)$ alrededor del proyectil, la fuerza de resistencia se calcula mediante

$$\vec{F}_r = \int_{S(\vec{x})=0} (p\vec{n} - \overline{\overline{\tau}}' \cdot \vec{n}) ds = \int_{S(\vec{x})=0} [(p - p_a)\vec{n} - \overline{\overline{\tau}}' \cdot \vec{n}] ds\,. \tag{10.37}$$

Evidentemente, este problema es muy complejo, al menos así planteado de forma general. El análisis dimensional nos permite obtener el número mínimo de parámetros adimensionales que lo gobierna, simplificando la experimentación. Por otra parte, este análisis nos permitirá establecer con precisión qué condiciones se deben verificar para que los resultados del ejemplo anterior sean aproximadamente válidos, es decir, para que la resistencia del aire no cuente.

Para proceder de una forma más *pedagógica* (aunque no más simple), vamos a suponer primero que estuviésemos interesados solamente en calcular la fuerza de resistencia $\vec{F}_r$. De las ecuaciones (10.34)-(10.37), esta fuerza depende de las siguientes magnitudes:

$$\vec{F}_r = \vec{F}_r(\rho, \mu, g, L, U, t, c, \beta)\,, \tag{10.38}$$

donde el valor de $d\vec{x}_{cm}/dt$ se ha sustituido por dos parámetros, su módulo U y el ángulo β que forma con el eje del proyectil. La dependencia de la fuerza de resistencia con el tiempo proviene de que tanto U como β dependen del tiempo [con condiciones iniciales $U(t = 0) = -V$ y $\beta(t = 0) = \alpha$]. La presión atmosférica p_a no aparece puesto que es una presión uniforme que lógicamente no afecta a $\vec{F}_r$ [si uno hace el cambio $p' = p - p_a$ en (10.34)-(10.37), desaparece el parámetro p_a del problema].

Si aplicamos el Teorema Π a la expresión anterior, los parámetros adimensionales que aparecen (aparte de los que provienen de las condiciones de contorno) deben de estar relacionados con algunos de los definidos en la sección 10.2, ya que éstos provenían de adimensionalizar las ecuaciones del movimiento. En particular, si elegimos ρ, U y L como magnitudes dimensionalmente independientes, se tiene

$$\frac{\vec{F}_r}{\rho U^2 L^2} = \vec{f}\left(\frac{\mu}{\rho U L}, \frac{gL}{U^2}, \frac{tU}{L}, \frac{c}{L}, \beta\right)\,, \tag{10.39}$$

es decir,

$$\vec{F}_r = \rho U^2 L^2 \vec{f}(Re, Fr, St, c/L, \beta)\,. \tag{10.40}$$

Esta dependencia se puede simplificar bastante más en la mayoría de las situaciones. Para empezar, el número de Strouhal suele ser muy pequeño, ya que el tiempo que tarda el aire en *pasar* por el proyectil, U/L, suele ser mucho menor que el tiempo característico de variación de las condiciones de contorno [$U(t)$ y $\beta(t)$], que es del orden del *tiempo de vuelo* del proyectil, t_F; es decir $St = (L/U)/t_F \ll 1$. Por ejemplo, supongamos que la velocidad típica del proyectil es 100 m/s y su longitud 10 cm; el tiempo de residencia sería del orden de 10^{-3} s, que, evidentemente es mucho menor que el tiempo de vuelo del proyectil, y el problema se puede

considerar casi estacionario. Por otro lado, el número de Froude, $Fr = U^2/gL$, suele ser muy grande: con los valores anteriores para U y L resulta $Fr = 10^4$. Esto quiere decir que la gravedad tiene muy poca influencia en el movimiento del aire alrededor del proyectil, lo cual es lógico debido a su pequeño tamaño [por supuesto, la gravedad sí influye en el movimiento del proyectil, pero no a través de $\vec{F}_r$, sino actuando sobre la masa del proyectil según la ecuación (10.31)]; para que las fuerzas gravitatorias fuesen importantes en el movimiento del aire alrededor del proyectil, el tamaño de éste debería ser del orden de $L \sim U^2/g$ (~ 1000 m si $U = 100$ m/s). Por último, en cuanto al número de Reynolds, su valor suele ser muy alto: tomando $\nu \simeq 10^{-5}$ m^2/s (aire a temperatura ambiente), $Re = UL/\nu \simeq 10^6$. Por tanto, en este problema,

$$\vec{F}_r \simeq \rho U^2 L^2 \vec{f}(c/L, \beta)\,, \tag{10.41}$$

puesto que al ser St, Fr y Re o bien muy grandes, o bien muy pequeños, su influencia en el problema es despreciable [en otras palabras, desarrollamos la función $\vec{f}$ en potencias de $Re^{-1} \ll 1$, $Fr^{-1} \ll 1$ y $St \ll 1$, y nos quedamos con el orden más bajo]. La fuerza de resistencia es pues, en estas condiciones, cuadrática con la velocidad, siendo la constante de proporcionalidad ρL^2 multiplicado por una cierta función que sólo depende de las características geométricas del problema, que se puede determinar experimentalmente. Obsérvese que la dependencia temporal ha desaparecido de forma explícita, aunque aparece a través de $U(t)$ y $\beta(t)$ (por ello se denomina *casi estacionario;* en las ecuaciones desaparece el término $\partial\vec{v}/\partial t$, pero el tiempo sigue apareciendo en las condiciones de contorno).

Abordemos ahora el problema del alcance del proyectil X. Una vez simplificada la expresión para $\vec{F}_r$, este problema se puede resolver analíticamente sin más que sustituir la expresión (10.41) (determinando previamente la función $\vec{f}$ para una forma de proyectil dada mediante una serie de experimentos) en (10.31)-(10.33). Sin embargo, continuando con nuestro análisis dimensional, X depende de las siguientes magnitudes físicas:

$$X = X(m, V, g, \alpha, \rho, \mu, L, c)\,. \tag{10.42}$$

El tiempo no aparece explícitamente porque, aunque $\vec{F}_r$ dependa del tiempo, X es una longitud que proviene de la integración de (10.31) imponiendo la condición $z = 0$, la cual se verifica en un tiempo t_F que depende de las mismas variables que X. Por la misma razón no aparecen $U(t)$ ni $\beta(t)$ [$U(0) = -V$ y $\beta(0) = \alpha$ sí que influyen en X]. Al aplicar el Teorema Π a (10.42), en buena lógica deberían aparecer los parámetros que teníamos en el ejemplo anterior más los que aparecieron al adimensionalizar la fuerza de resistencia. Sin embargo, la elección de ρ, U y L como variables dimensionalmente independientes, aunque es apropiada para adimensionalizar $\vec{F}_r$, ya que éstas son las magnitudes que caracterizan el movimiento del aire alrededor del proyectil, no es muy afortunada para adimensionalizar (10.42) puesto que los parámetros adimensionales resultantes serían o muy pequeños o muy grandes (por ejemplo, X/L es muy grande), y no serían relevantes en el movimiento *global* del proyectil. Por ello utilizamos m, g y V como magnitudes dimensionalmente independientes, como se hizo en el ejemplo anterior, elección que nos permitirá, además, averiguar más fácilmente las condiciones para que la aproximación de resistencia nula hecha en el ejemplo anterior sea válida. Aplicando el Teorema Π se tiene:

$$\frac{Xg}{V^2} = f\left(\alpha, \frac{\rho V^6}{mg^3}, \frac{\mu V^3}{mg^2}, \frac{Lg}{V^2}, \frac{cg}{V^2}\right)\,. \tag{10.43}$$

Claramente, Lg/V^2 y cg/V^2 son siempre muy pequeños, puesto que $X \sim V^2/g$ y $X \gg L$, $X \gg c$. Por otro lado, $\rho V^6/mg^3$, cuyo inverso nos da una idea de la influencia de la gravedad en la fuerza de resistencia, es siempre muy grande (por las razones que se discutieron anteriormente): si el proyectil pesa 1 kg y se mueve en aire con $V = 100$ m/s, $\rho V^6/mg^3 = 10^9$, que es gigantescamente grande. Por tanto, la expresión anterior queda

$$X \simeq \frac{V^2}{g} f\left(\alpha, \frac{\mu V^3}{mg^2}\right), \tag{10.44}$$

donde solo aparece un parámetro adicional en relación a (10.27), $\mu V^3/mg^3$, que mide la influencia de la viscosidad en la resistencia del aire sobre el proyectil. Por tanto, para que la resistencia aerodinámica sea despreciable y el resultado del ejemplo anterior sea (aproximadamente) válido se debe cumplir que $\mu V^3/mg^2 \ll 1$. Para los valores numéricos dados anteriormente (junto con $\mu \simeq 10^{-5}$ kg /m s), se tiene $\mu V^3/mg^2 \simeq 0{,}1$, que no es excesivamente pequeño [con estos valores numéricos los errores de (10.27) son pues alrededor del diez por ciento; si hubiésemos tomado $m = 0{,}1$ kg, los errores serían del orden del propio valor de la medida de X].

Resumiendo, de este par de ejemplos podemos sacar las conclusiones siguientes: (a) El análisis dimensional permite reducir de una manera eficiente el número de magnitudes físicas de las que depende un problema físico [compare las ecuaciones (10.42) y (10.44), donde se ha reducido de 8 variables de las que dependía X a solo dos de las que realmente depende Xg/V^2]. Esta reducción es particularmente importante a la hora de realizar experimentos. (b) El análisis dimensional permite conocer con rigor cuándo una determinada magnitud física no tiene influencia apreciable en un problema, y estimar el orden de magnitud del error que se comete al despreciar la influencia de esa magnitud. (c) Aunque la aplicación del Teorema Π, o la adimensionalización directa de las ecuaciones, sigue un procedimiento estándar, la *buena elección* de las magnitudes con las cuales se adimensionaliza (magnitudes dimensionalmente independientes) es fundamental para obtener resultados óptimos, y aquí es importante algún conocimiento físico previo del problema por parte de quien lo resuelve.

Problemas propuestos

La mayoría de los ejercicios que se enuncian a continuación serán resueltos en clases de problemas. El resto se recomiendan como ejercicios para realizar en casa. Algunos de ellos están resueltos en FERNANDEZ FERIA, DEL PINO PEÑAS y ORTEGA CASANOVA (2010).

1. Utilizando el análisis dimensional demostrar que la fuerza sobre una esfera sólida en ausencia de gravedad que se mueve con velocidad constante V a través de un líquido es (una vez adimensionalizada) función solo del número de Reynolds. En la figura 10.2 se representa esta función $C_D(Re)$, donde el coeficiente de resistencia C_D es igual a $F_f/(\rho V^2 \pi D^2/8)$, siendo F_f la fuerza de resistencia y D el diámetro de la esfera. La curva sólida (i) está determinada experimentalmente, la cual presenta discrepancias según los autores alrededor de $Re \sim 10^5$, donde la resistencia cae abruptamente debido a la transición de capa límite laminar a turbulenta; las curvas (ii) y (iii) representan valores extremos experimentales de la resistencia. La curva a trazos es el límite de

Stokes para números de Reynolds bajos, $C_D = 24/Re$ (ver lección 14), mientras que la curva con puntos y rayas es la corrección de Oseen a la fórmula de Stokes, $C_D = (24/Re)(1 + 3Re/16)$. Estas leyes teóricas son aproximadamente válidas hasta $Re \simeq 1$. Para $1 < Re < 10^3$, aproximadamente, se puede usar la correlación (empírica) $C_D \simeq 18{,}5/Re^{3/5}$; para $10^3 < Re < 2 \times 10^5$, aproximadamente, C_D es prácticamente constante, $C_D \simeq 0{,}44$ (comentar este resultado). Para $Re \simeq 2 \times 10^5$ tiene lugar la caída de la resistencia mencionada antes.

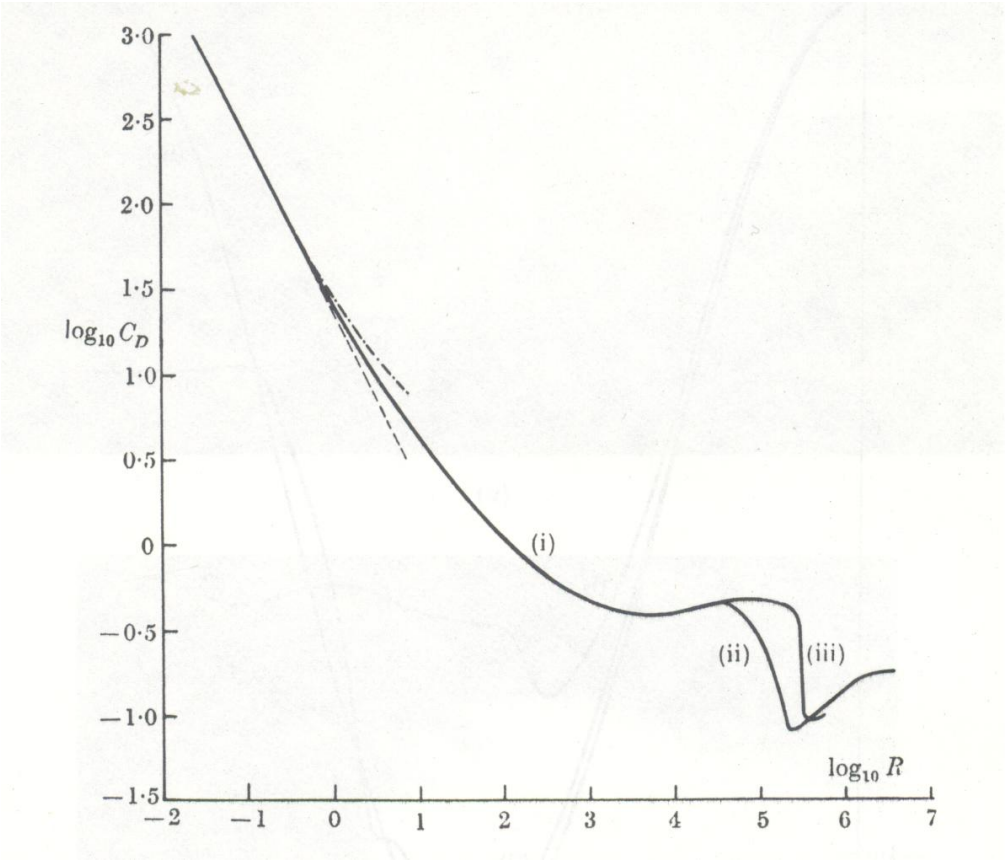


Figura 10.2: Coeficiente de resistencia C_D de una esfera en función del número de Reynolds (R en la figura) obtenido experimentalmente (figura tomada de ROSENHEAD, 1988, capítulo II).

Ver qué nuevos parámetros adimensionales aparecerían en el problema además del número de Reynolds si: (a) el fluido exterior es un gas (suponer que la esfera tiene una temperatura constante T_o); (b) la velocidad de la esfera no es constante (suponer, por ejemplo, que varía sinusoidalmente con el tiempo); (c) la esfera, además de moverse rectilíneamente, gira con velocidad angular Ω constante alrededor de algún eje que pasa por su centro, y (d) la gravedad es importante (averiguar las condiciones para que esto ocurra).

2. Un caudalímetro de bola (también llamado rotámetro) es un aparato que determina el caudal Q que circula por una instalación mediante la medición de la posición final X a la que queda suspendida una bola, de diámetro d y densidad ρ_s, en el interior de un tubo troncocónico vertical de diámetro característico D por el que circula desde abajo el

líquido (la bola permanece en equilibrio en la posición X cuando la fuerza de resistencia que ejerce el líquido sobre ella para el caudal dado se hace igual al peso neto de la bola). Mediante análisis dimensional halle la relación funcional más simple posible entre X y Q. ¿Cómo se simplificaría esa relación cuando el número de Reynolds (basado en d o en D, ambos diámetros son del mismo orden) es muy pequeño y la densidad de la bola es mucho mayor que la del fluido? Desprecien también el efecto de la gravedad en este último caso. Justificar la hipótesis empleada.

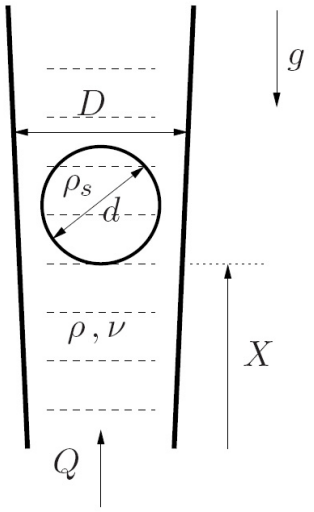


Figura 10.3: Esquema del caudalímetro y los parámetros de los que depende X

3. Un barco de masa total M tiene definida su geometría mediante una única longitud característica L. El barco se desplaza por la superficie del agua a velocidad constante V. Se pide:

   (a) Utilizar el análisis dimensional para determinar el número mínimo de parámetros adimensionales de que depende la resistencia al avance, R, del barco, así como la superficie S mojada por el agua.

   (b) Mostrar que no es posible la semejanza física completa cuando se quiere simular el fenómeno en un modelo a escala reducida utilizando agua en el experimento. Indicar cómo se procedería teniendo en cuenta que la corriente a grandes números de Reynolds se hace poco dependiente de la viscosidad.

   (c) Se pretende construir un barco de longitud característica 50 m, de 1000 toneladas de masa y velocidad de crucero de 10 m/s. Para conocer la resistencia al avance y la potencia de los motores de este barco, se ensaya con un modelo de longitud característica 5 m, que consume una potencia de 1 CV ¿Cuál ha de ser la masa del modelo y su velocidad para que los resultados del ensayo sean aplicables al barco real? Calcular la potencia necesaria del barco real.

4. Para diseñar la hélice de un barco se planea experimentar con modelos geométricamente semejantes a escala y utilizar el análisis dimensional y la semejanza física para extrapolar los resultados del modelo a la hélice real. En concreto se pide:

a) Relación funcional más simple posible que proporcione el empuje de la hélice en función de la velocidad de avance, la velocidad angular de giro y demás magnitudes que intervienen en el problema.

b) Suponiendo que los experimentos con el modelo se hacen utilizando el mismo fluido (agua de mar) que en el problema real, compruebe que no es posible la semejanza física total. Justifique una semejanza física parcial.

c) Utilizando la semejanza física parcial del apartado anterior, y suponiendo que el diámetro del modelo de hélice es la mitad del de la hélice real, obtengan:

1) Velocidad de avance y velocidad angular de giro que hay que utilizar en los experimentos con el modelo en función de los respectivos valores en el problema real.

2) Empuje de la hélice en el problema real en función del empuje medido experimentalmente con el modelo de hélice.

5. Obtener mediante análisis dimensional la dependencia funcional de la pérdida de carga por unidad de longitud, $p_l = \Delta p/L$, en un tubo recto, horizontal, de sección circular y diámetro D, cuyas paredes son rugosas con altura media de las rugosidades h, por el que circula, en corriente completamente desarrollada, un caudal Q de líquido.

   Simplificar la relación cuando el movimiento en el tubo es laminar. (Téngase en cuenta la linealidad de la ecuación que gobierna el movimiento laminar de líquidos en conductos para simplificar aún más la relación obtenida.)

   Con las simplificaciones citadas se hace un experimento con agua ($\mu = 10^{-3}$ kg/m s) en un tubo de 1 cm de diámetro por el que circula un caudal $Q = 30$ litros /hora, obteniéndose $p_l = 34$ kg/s^2 m^2. ¿Cuál sería el valor de p_l en función de Q para un tubo de 2 cm por el que circula un líquido de viscosidad $\mu = 10^{-2}$ kg/m s? ¿Hasta qué valores de Q sería válida dicha función si $\nu = 10^{-2}$ cm^2/ s?

6. Utilizar el análisis dimensional para encontrar la dependencia funcional más simplificada posible del salto de presiones Δp a través de un rotor de una bomba centrífuga de diámetro D y de la potencia consumida por la misma W, cuando girando con una velocidad angular Ω bombea un caudal Q de un líquido de densidad ρ y viscosidad μ.

   Suponiendo despreciable la influencia de la fricción viscosa, las expresiones adimensionales anteriores se suelen utilizar para calcular las curvas características $\Delta p = f(Q)$ y $W = W(Q)$ de una bomba girando a diferentes velocidades conocidas las curvas para una velocidad dada, y las de una serie de bombas geométricamente semejantes girando a la misma velocidad, conocidas las curvas para una determinada bomba con un cierto diámetro. Dé un procedimiento gráfico para dibujar dichas curvas.

7. Una burbuja de aire (densidad ρ_a) y radio R (tamaño característico en el caso de que no sea esférica) asciende por acción de las fuerzas de flotabilidad (es decir, por gravedad) en el seno de un líquido de densidad ρ y viscosidad μ. Hallar mediante análisis dimensional la expresión funcional más simple posible para la velocidad ascensional V.

   a) Simplifique la expresión anterior en los límites $\rho_a/\rho \ll 1$ y fuerzas viscosas despreciables. ¿Cómo sería en este límite el cociente de las velocidades ascensionales de dos burbujas 1 y 2 cuyos tamaños satisfacen $R_1/R_2 = 4$?

b) Simplifique la expresión funcional para V también en el límite $\rho_a/\rho \ll 1$, pero ahora suponiendo que las fuerzas viscosas son dominantes en el movimiento de la burbuja. ¿Cómo sería en este límite el cociente de las velocidades ascensionales de dos burbujas 1 y 2 cuyos tamaños satisfacen $R_1/R_2 = 4$, suponiendo que el líquido es el mismo?

8. La velocidad de propagación c de las ondas en la superficie libre de un líquido (por ejemplo, ondas en la superficie del agua de un estanque) depende de su longitud de onda λ, de la profundidad H del líquido, de la gravedad g y de las propiedades físicas del líquido (la densidad del aire no se tiene en cuenta al ser mucho menor que la del agua), incluyendo la tensión superficial σ en la interfaz líquido-aire.[2] Haciendo uso del análisis dimensional, se pide:

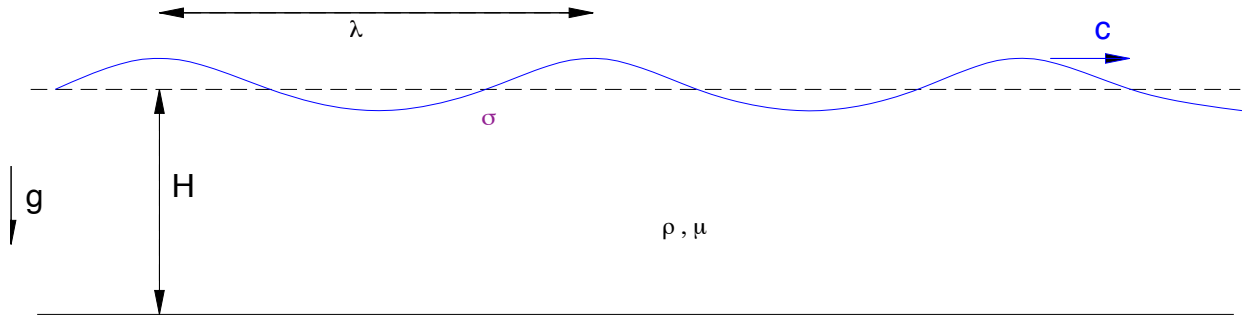


Figura 10.4: Propagación de una onda en la superficie libre de un líquido.

a) Relación más simple posible que proporciona c en función de las magnitudes que intervienen en el problema. Trate de identificar con nombre propio los parámetros adimensionales que aparecen.[3]

b) Simplifique la relación anterior en el supuesto de que las fuerzas viscosas sean despreciables en el movimiento de las ondas. Justifique esta simplificación dando la condición que tiene que cumplir λ para que la suposición sea cierta. Como ejemplo, supongan que el líquido es agua y den la condición para λ en metros (viscosidad cinemática del agua $\nu = \mu/\rho \simeq 10^{-6}$ m^2/s).

c) Simplifiquen aun más la relación anterior en el supuesto de que la capa líquida sea muy profunda ($H \gg \lambda$).

d) Por último, den el criterio que se tiene que cumplir para que las fuerzas de tensión superficial sean despreciables y simplifiquen la relación anterior en este supuesto. Con esta última simplificación, hayen la relación entre las velocidades de propagación, c_1/c_2, para ondas cuyas longitudes de onda satisfacen $\lambda_1/\lambda_2 = 4$ (para el mismo valor de la gravedad g).

[2]La tensión superficial tiene dimensiones de una fuerza por unidad de longitud.

[3]El parámetro adimensional que mide la importancia relativa de las fuerzas gravitatorias frente a las fuerzas asociadas a la tensión superficial se denomina número de Bond y se representa por B.

TEMA V:
Fluidostática

CAPÍTULO 11

Fluidostática

11.1. Ecuaciones generales

Las soluciones más sencillas, en principio, de las ecuaciones de Navier-Stokes (9.1)-(9.7) son aquellas correspondientes a un fluido en reposo ($\vec{v} = 0$), o soluciones fluidostáticas. Si en algún sistema de referencia (inercial o no) $\vec{v} = 0$, esas ecuaciones se reducen a:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0\,, \tag{11.1}$$

$$-\nabla p + \rho \vec{f}_m = 0\,, \tag{11.2}$$

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} = \nabla \cdot (K \nabla T) + Q_r\,, \tag{11.3}$$

$$e = e(T, p)\,, \quad p = p(\rho, T)\,, \quad K = K(T)\,. \tag{11.4}$$

La ecuación de continuidad nos dice que, si el fluido está en reposo, la densidad solo puede ser función de la posición. La ecuación de cantidad de movimiento es un balance entre las fuerzas de presión y las fuerzas másicas. Estas últimas son, en ausencia de campos eléctricos o magnéticos, suma de las fuerzas gravitatorias y de las fuerzas de inercia debidas al movimiento del sistema de referencia en el caso de que éste no sea inercial [ecuación (7.3)]:

$$\vec{f}_m = \vec{g} - \vec{a}_o - \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{x} - \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{x})\,, \tag{11.5}$$

donde las fuerzas de Coriolis no aparecen debido a que $\vec{v} = 0$. La ecuación de la energía es un balance entre la conducción de calor, la variación local de la energía interna y el calor por radiación, siendo similar a la ecuación de la energía interna para un *sólido.* Si c_v y K fuesen constantes y $Q_r = 0$, esta ecuación sería la ecuación de difusión (9.13). Por último las condiciones iniciales y de contorno deben ser compatibles con $\vec{v} = 0$.

11.2. Condiciones de equilibrio

La ecuación (11.2) establece que las fuerzas másicas por unidad de volumen, $\rho \vec{f}_m$, derivan de un potencial, siendo éste igual a $-p$. Por tanto, no toda fuerza másica es compatible con

un fluido en reposo. La condición que deben verificar estas fuerzas se obtienen sin más que tomar el rotacional de (11.2):

$$\nabla \wedge (\rho \vec{f}_m) = \rho \nabla \wedge \vec{f}_m + \nabla \rho \wedge \vec{f}_m = 0 \,. \tag{11.6}$$

Multiplicando escalarmente por $\vec{f}_m$, se tiene la condición general para $\vec{f}_m$:

$$\vec{f}_m \cdot \nabla \wedge \vec{f}_m = 0 \,. \tag{11.7}$$

Dado que $\nabla \wedge \nabla U \equiv 0$ para cualquier función escalar U, una condición suficiente para que la relación (11.7) se satisfaga es que $\vec{f}_m$ derive de un potencial U, $\vec{f}_m = -\nabla U$. Conformándonos con esta última condición suficiente y teniendo en cuenta las fuerzas másicas (11.5), éstas se pueden escribir como $-\nabla U$ si la velocidad angular del sistema de referencia no depende del tiempo, pues el término $d\vec{\Omega}/dt \wedge \vec{x}$ no se puede escribir como un gradiente, siendo el potencial de fuerzas másicas

$$U = -\vec{g} \cdot \vec{x} + \vec{a}_o \cdot \vec{x} - (\vec{\Omega} \wedge \vec{x})^2/2 \,.^{1} \tag{11.8}$$

Téngase en cuenta que la aceleración $\vec{a}_o$ podría ser una función del tiempo.

La ecuación (11.7) es la condición general que deben verificar las fuerzas másicas para que pueda existir **equilibrio mecánico** ($\vec{v} = 0$) en un fluido. Sin embargo, un fluido puede estar en equilibrio mecánico sin que exista **equilibrio térmico,** siempre que la distribución de temperaturas satisfaga la ecuación (11.3) y la densidad no varíe con el tiempo. Pero esto no es suficiente, puesto que la solución de las ecuaciones (11.1)-(11.4) puede ser **inestable.** Es decir, aunque las distribuciones de ρ, p y T satisfagan (11.1)-(11.4) junto con condiciones de contorno e iniciales compatibles, es necesario que estas distribuciones cumplan ciertos requisitos adicionales para que sean estables, ya que si el equilibrio fuese inestable aparecerían corrientes ($\vec{v} \neq 0$) que tenderían a uniformizar la temperatura (a equilibrar térmicamente el fluido). Por tanto, el estudio de la estabilidad de las soluciones fluidostáticas es esencial cuando el equilibrio mecánico no esté emparejado con un equilibrio térmico, pero este problema no será abordado en esta introducción a la fluidostática.

Sustituyendo (11.8) en la ecuación de cantidad de movimiento (11.2) se tiene

$$\nabla p + \rho \nabla U = 0 \,. \tag{11.9}$$

Esta expresión establece que las superficies equipotenciales (U = constante) en un fluido en reposo son también superficies isobaras (p = constante). Además, estas superficies son también de densidad constante, puesto que $\rho = -(\partial p/\partial U)_t$. Otra consecuencia es que **un fluido en reposo es barótropo,** es decir $\frac{1}{\rho} dp$ es una diferencia exacta, dw, siendo w la **función de barotropía.** En efecto, de (11.9) se tiene $p = p(U, t)$, y de la relación anterior para la densidad, $\rho = \rho(U, t)$ [pero la dependencia $U(t)$ debe ser tal que $\rho \neq \rho(t)$], de donde p depende de la posición solo a través de la densidad, $p = p(\rho, t)$, y viceversa, $\rho = \rho(p)$. Por tanto,

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = \nabla w \,, \quad w \equiv \int^{p} \frac{dp}{\rho(p)} \,. \tag{11.10}$$

Físicamente, si el fluido no fuese barótropo, los gradientes de presión no serían paralelos a los gradientes de densidad y las fuerzas de presión producirían un par distinto de cero en

[1] Se deja como ejercicio para el alumno la comprobación de que $-\nabla U$ es igual a (11.5) sin el término de aceleración angular. Para la comprobación del último término hay que hacer uso de (2.63).

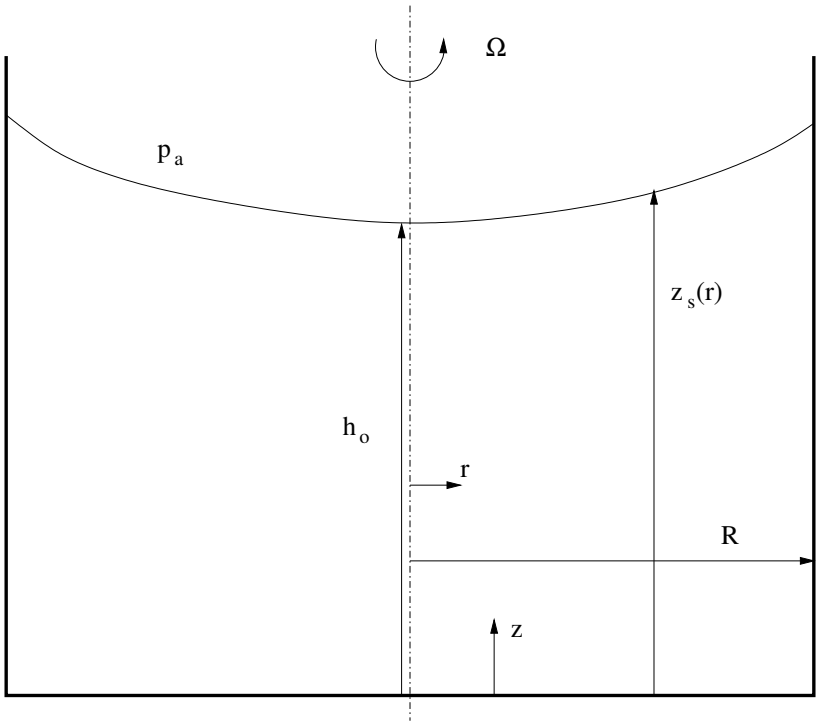


Figura 11.1: Equilibrio mecánico de un líquido en un recipiente que gira.

relación al centro de gravedad las partículas fluidas, que originarían una componente de giro en las mismas (vorticidad en el fluido), dejando de estar en reposo. En términos de la función de barotropía (11.10), la ecuación (11.9) se escribe:

$$\nabla(w+U)=0\,,\quad w+U=C(t)\,, \tag{11.11}$$

donde $C(t)$ es una *constante* de integración que en general depende del tiempo y que viene fijada por las condiciones de contorno.

11.3. Hidrostática

En el caso de un líquido ($\rho=$ constante), la ecuación anterior queda

$$p+\rho U=C(t)\,. \tag{11.12}$$

Si la única fuerza másica presente es la gravitatoria, $\vec{g}=-g\vec{e}_z$, la distribución de presiones hidrostática es:

$$p+\rho g z=\text{constante}. \tag{11.13}$$

Así, por ejemplo, la presión en el interior de un depósito con una altura H de líquido y abierto a la atmósfera sería $p=p_a+\rho g(H-z)$, donde p_a es la presión atmosférica y z se mide desde el fondo del depósito.

Como otro **ejemplo** sencillo, considérese un depósito cilíndrico (de radio R) que gira con velocidad angular constante Ω alrededor de su eje de simetría. Transcurrido un tiempo suficiente para que el líquido adquiera un movimiento solidario con el recipiente, la

distribución de presión de equilibrio en un sistema de referencia que se mueva con el recipiente sería, de acuerdo con (11.12) y (11.8):

$$p + \rho g z - \rho\Omega^2 r^2/2 = \text{constante} = p_a + \rho g z_s(r) - \rho\Omega^2 r^2/2\,, \tag{11.14}$$

donde la constante se ha evaluado en la superficie libre del líquido $z_s(r)$ (ver figura 11.1). Es decir,

$$p = p_a + \rho g[z_s(r) - z]\,. \tag{11.15}$$

Aplicando (11.14) al punto de la superficie libre en el eje ($z = h_o$, $r = 0$), se tiene

$$p_a + \rho g h_o = p_a + \rho g z_s(r) - \rho\Omega^2 r^2/2\,, \tag{11.16}$$

que proporciona la ecuación de la superficie libre en función de h_o:

$$z_s(r) = h_o + \frac{1}{2}\frac{\Omega^2}{g} r^2\,. \tag{11.17}$$

La constante h_o se obtiene a partir del volumen V del líquido:

$$V = \int_0^R dr 2\pi r z_s(r) = \pi R^2 h_o \left(1 + \frac{\Omega^2 R^2}{4 g h_o}\right)\,, \quad h_o = \frac{V}{\pi R^2} - \frac{\Omega^2 R^2}{4g}\,. \tag{11.18}$$

11.4. Fuerza sobre un cuerpo sumergido. Principio de Arquímedes

Consideremos un cuerpo sólido de volumen V y superficie S sumergido en un fluido en equilibrio mecánico. La fuerza (de presión) que el líquido ejerce sobre la superficie del sólido es:

$$\vec{F} = -\int_S p\vec{n} ds = -\int_V \nabla p dV = -\int_V \rho \vec{f}_m dV\,, \tag{11.19}$$

donde se ha aplicado el Teorema de Gauss y se ha hecho uso de (11.2). La fuerza está dirigida en sentido opuesto a las fuerzas másicas. Suponiendo que las fuerzas másicas son exclusivamente gravitatorias, se tiene

$$\vec{F} = g\vec{e}_z \int_V \rho dV = gM\vec{e}_z\,, \quad M \equiv \int_V \rho dV\,; \tag{11.20}$$

es decir, un cuerpo sumergido en un fluido en reposo está sometido a una fuerza *(empuje)* que es igual al peso del fluido que *desaloja* el cuerpo, en sentido opuesto a la acción de la gravedad (**Principio de Arquímedes**). En el caso de un líquido, $M = \rho V$. Para que el cuerpo permanezca en reposo (y, por tanto, el fluido), esta fuerza debe estar equilibrada con el peso del mismo. Además, el momento de las fuerzas de presión que el fluido ejerce sobre el cuerpo debe estar también equilibrado. Este momento, en relación a un punto fijo $\vec{x}_o$, vale

$$\begin{aligned}\vec{M} &= -\int_S p\vec{n} \wedge (\vec{x} - \vec{x}_o) ds = -\int_V \nabla \wedge [p(\vec{x} - \vec{x}_o)] dV \\ &= -\int_V \nabla p \wedge (\vec{x} - \vec{x}_o) dV = -\int_V \rho \vec{f}_m \wedge (\vec{x} - \vec{x}_o) dV\,.\end{aligned} \tag{11.21}$$

Si $\vec{f}_m = -g\vec{e}_z$,

$$\vec{M} = g\vec{e}_z \wedge \int_V \rho(\vec{x} - \vec{x}_o)dV = gM\vec{e}_z \wedge (\vec{x}_{cm} - \vec{x}_o)\,, \tag{11.22}$$

donde $\vec{x}_{cm}$ es el centro de masa del cuerpo sumergido si su volumen lo ocupase el fluido que desaloja. Este momento debe estar equilibrado con el momento del peso del sólido (que está aplicado en su centro de masa) con respecto a $\vec{x}_o$ para que el cuerpo permanezca en reposo.

11.5. Equilibrio de gases. Atmósfera estándar

En el caso de un gas ideal bajo la acción de la gravedad, la ecuación (11.11) se puede escribir:

$$U + w = gz + \int^p \frac{dp}{\rho} = gz + R_g \int^p T\frac{dp}{p} = \text{constante}. \tag{11.23}$$

Como p, ρ y T solo dependen de z, es más fácil utilizar la forma original de la ecuación de cantidad de movimiento (es decir, derivar con respecto a z la ecuación anterior):

$$g + \frac{R_g T}{p}\frac{dp}{dz} = 0\,, \tag{11.24}$$

que integrada proporciona

$$\frac{p}{p_o} = \exp\left[-\frac{g}{R_g}\int_0^z \frac{dz}{T(z)}\right]\,. \tag{11.25}$$

Luego para conocer la distribución de presión en equilibrio mecánico se debe conocer la distribución de temperatura, la cual debe satisfacer la ecuación (11.3) junto con condiciones de contorno apropiadas.

Un ejemplo típico lo constituye el aire de la atmósfera supuesto en reposo. En sus capas más cercanas al suelo el aire se calienta, principalmente por conducción de calor desde el suelo y, en menor medida, por radiación solar directa, aunque esta última es más importante en las capas altas de la atmósfera. Para los cálculos fluidostáticos, sin embargo, no se suele resolver la ecuación (11.3) para la temperatura, sino que se supone una distribución $T(z)$ obtenida experimentalmente, siendo la correspondiente a la denominada *atmósfera estándar* la representada en la figura 11.2.

Desde un punto de vista práctico, la capa más importante es la *troposfera* o capa más cercana al suelo, donde se supone que, en primera aproximación, el perfil de temperatura es lineal:

$$T = T_o - \alpha z\,, \tag{11.26}$$

siendo $T_o = 288$ K y $\alpha = 6{,}5$ K/km en la atmósfera estándar. Sustituyendo en (11.25), se tiene la distribución de presiones

$$\frac{p}{p_o} = \left(\frac{T_o - \alpha z}{T_o}\right)^{g/\alpha R_g}\,; \tag{11.27}$$

y, de la ecuación de estado,

$$\frac{\rho}{\rho_o} = \left(\frac{T_o - \alpha z}{T_o}\right)^{g/\alpha R_g - 1}\,, \tag{11.28}$$

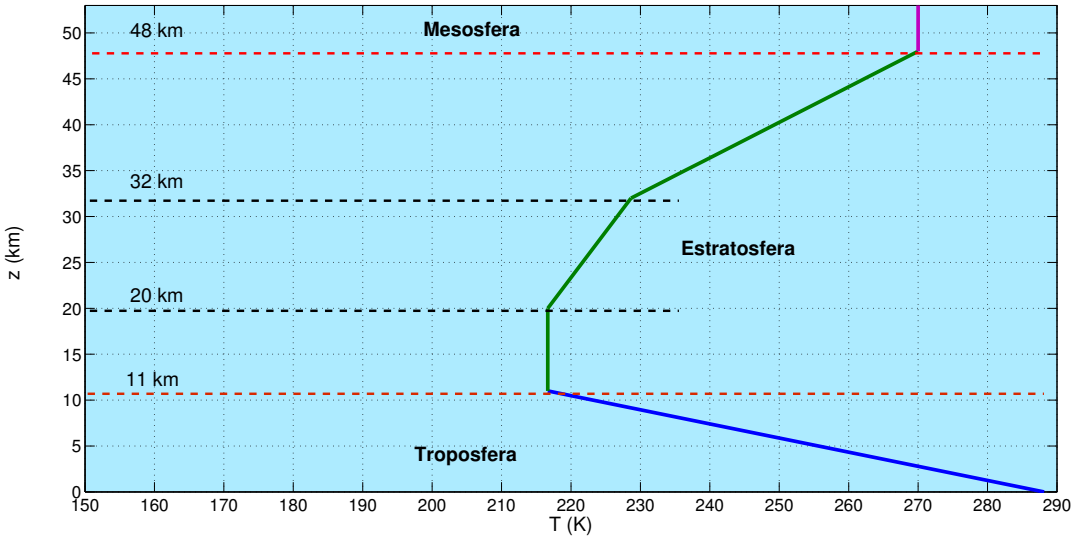


Figura 11.2: Distribución de temperatura en la atmósfera estándar.

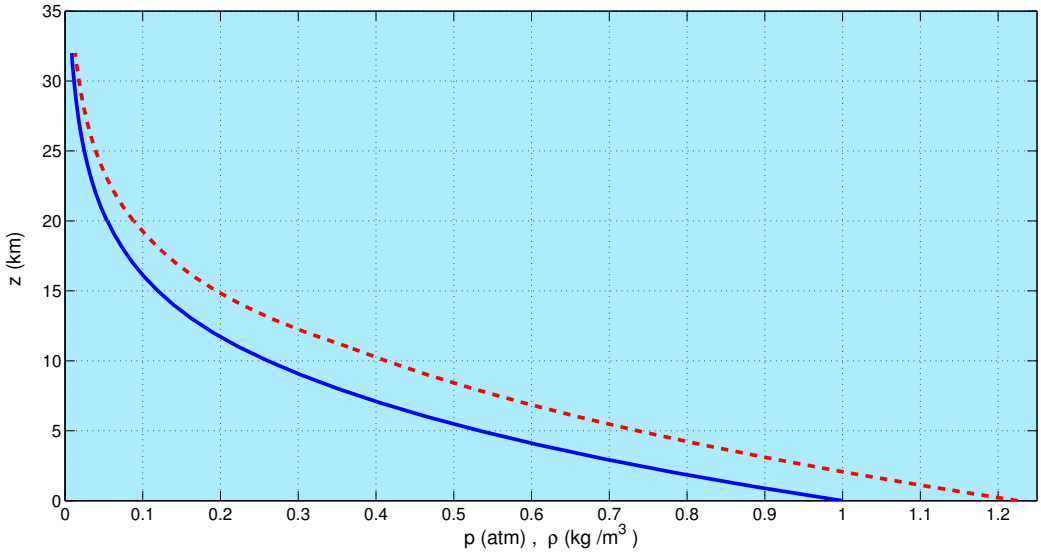


Figura 11.3: Distribución de presión (línea contínua) y densidad (línea discontínua) en la atmósfera estándar.

siendo $p_o = 1$ atm, $\rho_o = p_o/R_g T_o = 1{,}25$ kg/m^3. De forma análoga se hallarían las distribuciones de presión y densidad en las restantes capas de la atmósfera estándar utilizando los perfiles de temperatura de la figura 11.2 (ver figura 11.3).

La expresión (11.28) proporciona un criterio *estático* de estabilidad de la atmósfera: para que sea estable, la densidad debe disminuir con la altura, pues en caso contrario las fuerzas de *flotabilidad* originarían un movimiento vertical; es decir,

$$\frac{g}{\alpha R_g} - 1 > 0 \qquad \text{o} \qquad \alpha < \frac{g}{R_g} \simeq 34{,}9 \text{ K/km}\,. \tag{11.29}$$

Este criterio *no* es una condición suficiente para que la atmósfera sea estable, ya que si fuese así, la atmósfera estándar sería siempre estable, lo cual, evidentemente, no es cierto. El estudio de la estabilidad de la atmósfera requiere considerar la estabilidad *dinámica,* o estabilidad frente a pequeñas perturbaciones de la distribución de equilibrio anterior, perturbaciones que siempre están presentes en la atmósfera. De todas formas, el criterio anterior nos da una idea del grado de estabilidad de la atmósfera: cuanto más pequeña sea la constante α, más estable será. Por ejemplo, en condiciones de *inversión térmica* ($\alpha < 0$), lo cual ocurre a veces en las proximidades del suelo en ciertos núcleos urbanos donde los niveles de contaminación son muy altos, la atmósfera se hace muy estable, con lo que los gases contaminantes permanecen *anclados* en la ciudad. Otro ejemplo significativo de estabilidad lo constituye la *estratosfera,* donde α es marcadamente negativo (ver figura 11.2), siendo, por tanto, extraordinariamente estable, y de ahí su nombre: el aire de la estratosfera está estratificado, sin apenas mezcla de unas capas con otras (ésta se produce casi exclusivamente por difusión, no por convección). Por ello es tan peligroso que algunos agentes contaminantes lleguen a la estratosfera.

Referencias.

- L.D. LANDAU y E.M. LIFSHITZ, 1987. Capítulo I.
- J.M.WALLACE y P.V. HOBBS, 1977. Capítulo 1.
- F.M. WHITE, 2004. Capítulo 2.

Ejercicios de fluidoestática

Ejemplo resuelto

La figura 11.4 muestra el esquema de un acelerómetro muy sencillo y barato. Consta de un tubo en forma de U que contiene un líquido de densidad ρ; las variaciones del nivel h constituyen una medida de la aceleración a. Obtener la relación entre h y a suponiendo que $D \ll L$. ¿Pueden hacerse las marcas en el tubo en forma de múltiplos lineales de a? Comente las principales desventajas de este diseño.

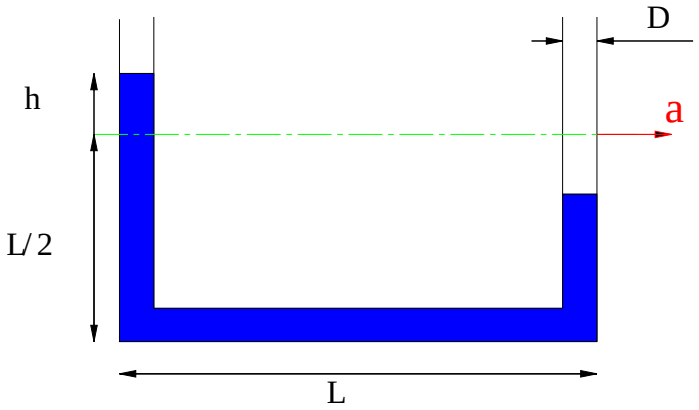


Figura 11.4

Solución.

Utilizando coordenadas (x, z), donde x tiene la dirección de la aceleración a, la ecuación (11.12), junto con (11.8), se escribe

$$p + \rho U = p + \rho g z + \rho a x = \text{constante}\,. \tag{11.30}$$

La constante se obtiene aplicando esta ecuación a cualquiera de las dos superficies libres del líquido, donde la presión es la atmosférica (p_a). Si se toma el origen de coordenadas en la esquina inferior izquierda del tubo en U, suponiendo despreciable el diámetro del conducto ($D \ll L$), la aplicación de esta ecuación a las dos superficies libres proporciona

$$p_a + \rho g \left(\frac{L}{2} + h \right) = p_a + \rho g \left(\frac{L}{2} - h \right) + \rho a L\,, \tag{11.31}$$

de donde se obtiene una relación entre a y h:

$$h = \frac{aL}{2g}\,. \tag{11.32}$$

Esta relación es lineal, por lo que, efectivamente, la distancia entre las marcas en el tubo sería proporcional a los incrementos de la aceleración.

El principal inconveniente de este diseño es que la superficie libre no es exactamente un plano horizontal. Si D no fuese muy pequeño, habría que tener en cuenta la inclinación de la superficie libre en relación a la horizontal. Por otro lado, la tensión superficial provoca una curvatura de la superficie libre, más acusada cuanto más pequeño sea D. Para tener una medida precisa habría que tener en cuenta ambos efectos.

Otra cuestión relevante, si queremos medir aceleraciones que varían temporalmente, es el tiempo de respuesta del acelerómetro, que tiene que ser pequeño en relación al tiempo característico de variación de la aceleración. Para estimar el tiempo de respuesta hay que estudiar el movimiento del líquido en el interior del tubo, y no solo tener en cuenta la fluidostática de los estados finales. El movimiento de un fluido en un conducto en sus diferentes regímenes se considerará a lo largo de este curso.

Problemas propuestos

1. Un camión cisterna transporta un volumen V de un líquido de densidad ρ. Debido a un imprevisto, el conductor tiene que frenar hasta pararse cuando viaja a una velocidad v_o. Como consecuencia de ello, el líquido ejerce una fuerza F sobre la pared frontal del tanque que lo contiene, que se quiere calcular. Suponiendo que la frenada ocurre con aceleración constante en un tiempo t_f, que el tanque es un paralelepípedo de longitud l, altura h y anchura e, que el líquido no llena completamente el tanque, existiendo sobre él un gas a presión p_o, y que el líquido adquiere la nueva disposición de equilibrio respecto al tanque en un tiempo mucho menor que t_f, se pide:

   a) Posición de la superficie libre del líquido durante la frenada. Supongan que líquido no toca la pared superior del tanque.

   b) Fuerza ejercida sobre la pared frontal del tanque (la presión exterior es p_a).

2. Una presa tiene una parte superior vertical, de 2 m desde la superficie libre del agua, y el resto, hasta el suelo, su profundidad sigue la ley $z = 2+10\sqrt{x}$, donde z es la distancia vertical (en metros) desde la superficie libre del agua y x la distancia horizontal (en metros) perpendicular a la parte superior de la presa. La profundidad total de la presa desde la superficie libre del agua es de 32 m. Se pide:

   a) Fuerza resultante que el agua ejerce sobre la presa por unidad (metro) de longitud de la presa.

   b) Distancia de la presa a la que la dirección de esta fuerza resultante intersecta la superficie libre.

3. Un globo meteorológico relleno con hidrógeno tiene una masa total, incluyendo la carga, de 6 kg. Suponiendo que el globo permanece esférico, con 3 m de diámetro, ¿hasta qué altura ascenderá en una atmósfera *isoterma* si la temperatura es de 20^o C y la presión en el suelo de 101,3 kN/m^2?

4. Un cono de acero (densidad $\rho_0 = 7{,}5$)[2] de semiángulo $\alpha = 10^o$ y radio de la base $R = 0{,}1$ permanece en equilibrio en la interfaz entre una masa de mercurio ($\rho_1 = 13{,}56$) y otra de agua [$\rho_2 = 1$; ver figura 11.5(a)]. ¿Cuánto vale la altura h sumergida en mercurio?

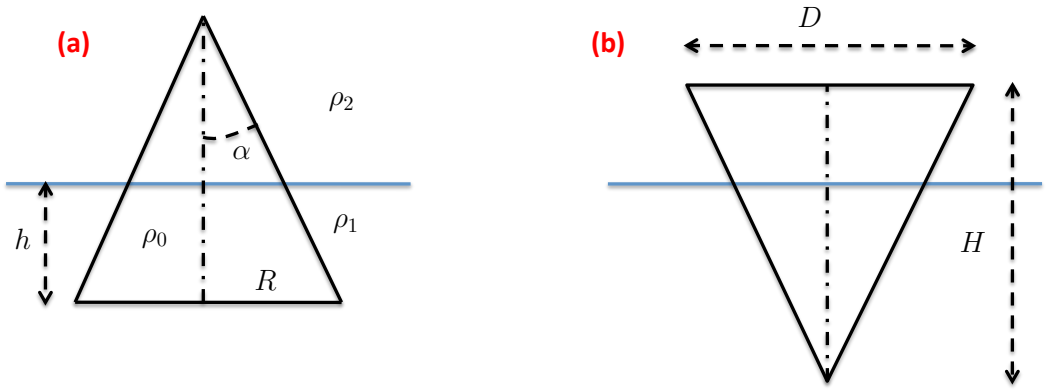


Figura 11.5

5. Un cono flota en agua con su vértice hacia abajo y su eje perpendicular a la superficie libre [figura 11.5(b)]. Si el diámetro de la base del cono es D, su altura H y su densidad es s veces la del agua ($s < 1$; la densidad del aire es despreciable), demostrar que para que el cono permanezca en equilibrio estable se tiene que verificar

$$H < \frac{D}{2}\left(\frac{s^{1/3}}{1-s^{1/3}}\right)^{1/2}.$$

[2]Todas las magnitudes están expresadas en el Sistema Internacional

TEMA VI:
Movimientos incompresibles con fuerzas viscosas dominantes

CAPÍTULO 12

Movimientos unidireccionales de líquidos

La dificultad fundamental para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes reside en los términos no lineales que introduce la convección. En esta lección consideraremos algunos flujos en los que el término convectivo de la ecuación de cantidad de movimiento es idénticamente nulo. Las soluciones de las ecuaciones lineales resultantes son, por tanto, las más simples posibles, aparte de la trivial $\vec{v} = 0$ considerada en la lección anterior.

12.1. Ecuaciones y condiciones iniciales y de contorno

Con las ecuaciones escritas en coordenadas cartesianas, el término convectivo de la ecuación de cantidad de movimiento desaparece en los movimientos incompresibles si todas las componentes del vector velocidad, excepto una, son nulas (movimientos unidireccionales). En efecto, tomando $\vec{v} = u\vec{e}_x$, la ecuación de continuidad $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ proporciona

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0\,, \tag{12.1}$$

con lo que $u = u(y, z, t)$. Por lo tanto, la ecuación de cantidad de movimiento se simplifica a

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho f_{mx} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\,, \tag{12.2}$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho f_{my}\,, \tag{12.3}$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho f_{mz}\,, \tag{12.4}$$

donde los términos convectivos son idénticamente nulos debido a que u no depende de x y al ser nulas las componentes de la velocidad según y y z. Se ha supuesto que la viscosidad es constante para que así el problema mecánico esté desacoplado del térmico.

Las proyecciones y y z de la ecuación de cantidad de movimiento establecen, simplemente, que existe equilibrio hidrostático en las direcciones perpendiculares al movimiento. Si las fuerzas másicas derivan de un potencial, $\vec{f}_m = -\nabla U$, se tiene que $p + \rho U$ (que se suele denominar **presión reducida**) no depende de y y z:

$$p + \rho U = f(x, t)\,. \tag{12.5}$$

Definiendo

$$p_l \equiv -\frac{\partial}{\partial x}(p + \rho U)\,, \tag{12.6}$$

la ecuación (12.2) queda:

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} = p_l + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\,. \tag{12.7}$$

Como u no depende de x, tampoco p_l,

$$p_l = p_l(t)\,. \tag{12.8}$$

Suponiendo que la capacidad calorífica y la conductividad térmica son constantes, la correspondiente ecuación de la energía se escribe:

$$\rho c_v\left(\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x}\right) = K\nabla^2 T + \mu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] + Q_r\,. \tag{12.9}$$

Obsérvese que aunque esta última ecuación no es lineal, al estar desacoplada de las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento, la función $u(y,z,t)$ es conocida previamente a su resolución, y a efectos prácticos el problema es también lineal para la temperatura. En los ejemplos que siguen solo resolveremos el problema mecánico.

Como condiciones iniciales se deben imponer

$$t = 0\,, \quad u = u_o(y,z)\,, \quad T = T_o(x,y,z)\,. \tag{12.10}$$

Las condiciones de contorno para la velocidad u deben ser, por supuesto, compatibles con la unidireccionalidad del movimiento, pudiendo corresponder a tres tipos de problemas: (a) flujos en conductos de sección uniforme; (b) flujos generados por el movimiento de un contorno plano en la dirección x, y (c) flujos confinados entre dos contornos paralelos e infinitos (por ejemplo dos placas) producidos por un gradiente de la presión (reducida) independiente de la posición. [El tercer supuesto se puede tomar como un caso particular de (a).] A continuación vamos a considerar los ejemplos más sencillos y significativos, todos ellos estacionarios.

Antes de pasar a ver los ejemplos concretos conviene señalar que la linealidad del problema permite la **superposición** de distintas soluciones correspondientes a distintas condiciones de contorno. Por otra parte, aunque pocos problemas reales son *exactamente* unidireccionales, las soluciones que veremos a continuación se pueden tomar como soluciones *aproximadas* de algunos problemas reales. Además, estas soluciones nos van a permitir introducir algunos conceptos físicos y matemáticos de mucha utilidad para resolver problemas reales más complejos.

12.2. Corriente de Couette

El movimiento unidireccional más sencillo posible es el confinado entre dos placas paralelas e infinitas producido por el movimiento de una de ellas relativo a la otra. Si la velocidad de la placa móvil es constante, el movimiento es estacionario y la velocidad u sólo depende de una coordenada transversal (y), siendo, además, $p_l = 0$. La ecuación (12.7) queda, simplemente,

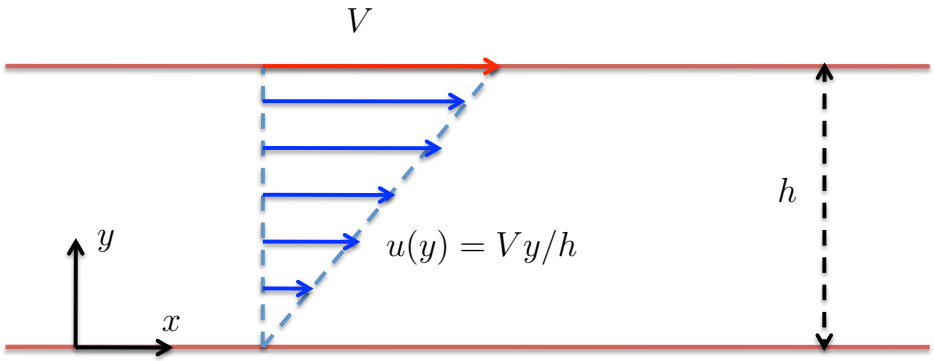


Figura 12.1: Corriente de Couette.

$$\frac{d^2u}{dy^2} = 0\,, \tag{12.11}$$

y las condiciones de contorno son (ver figura 12.1):

$$u(y=0) = 0\,, \quad u(y=h) = V\,, \tag{12.12}$$

donde se ha supuesto que la velocidad de la placa inferior es nula y la de la superior V. La solución es un perfil lineal de velocidad (corriente de Couette):

$$u = Vy/h\,. \tag{12.13}$$

El esfuerzo viscoso, $\tau'_{xy} = \mu\partial u/\partial y$, es constante en todo el flujo e igual a $\mu V/h$, siendo ésta, por tanto, la fuerza por unidad de superficie necesaria para mover la placa superior con velocidad V y la que es necesario hacer, pero en sentido contrario, para que la placa inferior no sea *arrastrada* por el movimiento del fluido. (La medición de esta fuerza constituye un procedimiento simple para determinar experimentalmente la viscosidad de un líquido.) El caudal que circula es, por unidad de longitud en la dirección z,

$$q \equiv \int_o^h u dy = \frac{Vh}{2}\,. \tag{12.14}$$

12.3. Corriente de Poiseuille

Es el movimiento originado entre dos placas paralelas por un gradiente de presión (reducida) constante. La ecuación de cantidad de movimiento en la dirección x y las condiciones de contorno (ver figura 12.2) quedan

$$0 = p_l + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,, \quad p_l = \text{constante}, \tag{12.15}$$

$$u(y=0) = (y=h) = 0\,. \tag{12.16}$$

La solución es el perfil parabólico de velocidad

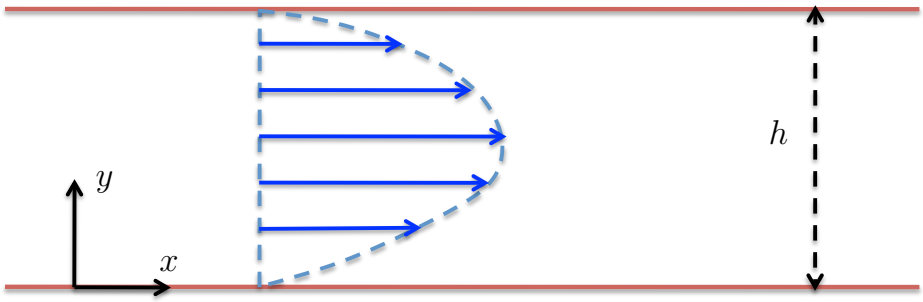


Figura 12.2: Corriente de Poiseuille bidimensional.

$$u = \frac{p_l}{2\mu} y(h-y)\,. \tag{12.17}$$

El esfuerzo viscoso es nulo en el centro ($y = h/2$) y máximo en las paredes:

$$\tau'_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{p_l}{2}(h-2y)\,, \quad \tau'_{xy}(y=0) = \frac{p_l h}{2} = -\tau'_{xy}(y=h)\,. \tag{12.18}$$

El caudal por unidad de longitud es:

$$q = \int_o^h u dy = \frac{h^3 p_l}{12\mu}\,. \tag{12.19}$$

El perfil de velocidad correspondiente al movimiento originado por un gradiente de presión constante y por el movimiento de una de las placas (e.g. la superior) se obtiene sin más que sumar (12.13) y (12.17) en virtud de la linealidad del problema:

$$u = \frac{Vy}{h} + \frac{p_l}{2\mu} y(h-y)\,, \tag{12.20}$$

siendo el caudal por unidad de longitud

$$q = Vh/2 + h^3 p_l/12\mu\,. \tag{12.21}$$

Este campo de velocidad (Couette + Poiseuille) es la base de la **lubricación fluidomecánica,** donde h no es constante, sino que varía muy lentamente con x, y tanto h como p_l pueden ser funciones del tiempo. Este tema de la lubricación fluidodinámica, tan importante en Ingeniería, no va a ser considerado en este curso introductorio a la Mecánica de Fluidos, pero se verá en un curso posterior.

12.4. Corriente de Poiseuille en un conducto circular

Considérese un conducto infinito de sección circular constante. El flujo unidireccional y estacionario originado por un gradiente de presión reducida $p_l \equiv -\partial(p+\rho U)/\partial x$ constante, donde x es la coordenada axial a lo largo del conducto, viene gobernado por la ecuación (12.7) con el primer miembro igual a cero, que en coordenadas cilíndricas (x, r, θ), suponiendo axilsimetría, se escribe

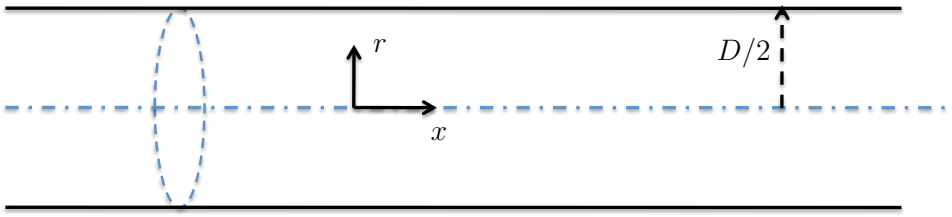


Figura 12.3: Coordenadas cilíndricas en un conducto circular.

$$0 = p_l + \frac{\mu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) , \tag{12.22}$$

siendo $\vec{u} = u\vec{e}_x$. La solución general de esta ecuación es

$$u = -\frac{p_l r^2}{4\mu} + C_1 \ln r + C_2 \, . \tag{12.23}$$

Como la velocidad no puede ser singular en el eje, $C_1 = 0$; por otra parte, la velocidad debe ser nula en la pared del conducto, $r = D/2$, donde D es el diámetro del conducto, lo cual proporciona el perfil parabólico de velocidad

$$u = \frac{p_l D^2}{16\mu}\left[1 - \left(\frac{2r}{D}\right)^2\right] . \tag{12.24}$$

El esfuerzo de fricción en la pared es

$$\tau_f \equiv (-\tau'_{rx})_{r=D/2} = -\mu\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=D/2} = \frac{p_l D}{4} , \tag{12.25}$$

mientras que el caudal que circula por el conducto es

$$Q \equiv \int_o^{2\pi} d\theta \int_o^{D/2} dr\, ru = \frac{\pi D^4}{128\mu} p_l = -\frac{\pi D^4}{128\mu}\frac{\partial(p + \rho U)}{\partial x} \, . \tag{12.26}$$

El perfil de velocidad (12.24) se suele también expresar en términos de la velocidad media V, definida como

$$V \equiv \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{D^2 p_l}{32\mu} , \tag{12.27}$$

teniéndose

$$u = 2V\left[1 - \left(\frac{2r}{D}\right)^2\right] . \tag{12.28}$$

Es decir, la velocidad máxima (en el eje) es dos veces la media.

Referencias.

- G. K. BATCHELOR, 1967. Capítulo 4.
- L.D. LANDAU y E.M. LIFSHITZ, 1987. Capítulo II.

CAPÍTULO 13

Movimiento laminar de líquidos en conductos

13.1. Ecuación de Hagen-Poiseuille

La ecuación (12.26),

$$Q = \frac{\pi D^4}{128\mu} p_l = -\frac{\pi D^4}{128\mu} \frac{\partial(p + \rho U)}{\partial x}\,, \tag{13.1}$$

es la conocida como ecuación o **Ley de Hagen-Poiseuille,** que estos autores obtuvieron experimentalmente (Hagen en 1839 y Poiseuille en 1840) relacionando el caudal que circula por un conducto circular con la caída de presión entre sus extremos. En particular, si en dos secciones (1 y 2) de un conducto separadas por una longitud L ($L \gg D$) se conocen las presiones, p_1 y p_2 (en general la relación anterior es válida para la presión reducida $P = p + \rho U$, pero Hagen y Poiseuille consideraron tubos horizontales y sin fuerza másica alguna en la dirección del movimiento), como p_l es constante, se tiene que $p_l = (p_1 - p_2)/L$, y la ecuación anterior queda

$$Q = \frac{\pi D^4 (p_1 - p_2)}{128\mu L}\,, \tag{13.2}$$

que es la expresión obtenida experimentalmente por Hagen y Poiseuille.[1] Este resultado confirmó experimentalmente la hipótesis de no deslizamiento del fluido en la pared hecha por Stokes (la cual se ha utilizado como condición de contorno en la pared), además de la ley de Stokes para fluidos Newtonianos. Por otra parte, la comparación de (13.2) con los resultados experimentales es un método directo muy simple para determinar la viscosidad de un fluido.

La fuerza total que por fricción el fluido ejerce sobre la pared de un conducto horizontal entre las secciones 1 y 2 se obtiene sustituyendo $p_l = (p_1 - p_2)/L$ en (12.25):

$$F_f = \pi D L \tau_f = \pi D^2 (p_1 - p_2)/4\,, \tag{13.3}$$

[1] El médico francés Poiseuille, que estudiaba la circulación de la sangre, expresó esta ley de la siguiente forma: el tiempo que tarda un determinado volumen de líquido en salir del conducto es, por unidad de volumen (es decir, Q^{-1}), proporcional a la longitud del conducto, inversamente proporcional a la diferencia de presiones entre los extremos e inversamente proporcional a la cuarta potencia del diámetro. Por supuesto, ni Hagen ni Poiseuille se dieron cuenta que la constante de proporcionalidad está relacionada con la viscosidad del líquido, puesto que la primera deducción teórica del perfil de velocidades (12.24) no fue hecha hasta 1859 por Hagenbach y F. Neumann, que la obtuvieron independientemente.

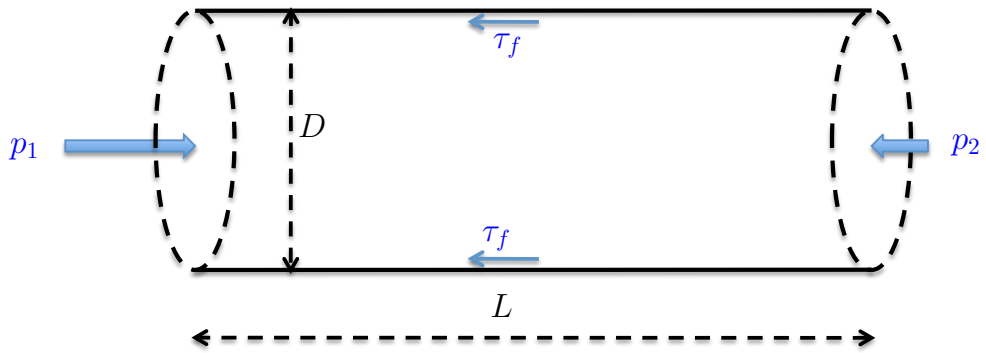


Figura 13.1

expresión que se podría haber obtenido aplicando, simplemente, la ecuación de conservación de cantidad de movimiento en forma integral al volumen de control contenido entre las dos secciones y la pared del conducto (figura 13.1; se deja como ejercicio para el alumno).

La expresión de Hagen-Poiseuille (13.1) a veces se escribe en forma adimensional, utilizando el número de Reynolds

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu}\,, \tag{13.4}$$

definido, como se suele hacer en flujo en conductos, en términos del diámetro D y la velocidad media $V = Q/(\pi D^2/4)$. Sustituyendo, queda

$$\frac{(p+\rho U)_1 - (p+\rho U)_2}{\rho V^2/2} = \frac{L}{D}\frac{64}{Re} \quad \text{o} \quad \lambda \equiv \frac{4\tau_f}{\rho V^2/2} = \frac{64}{Re}\,, \tag{13.5}$$

donde λ es el denominado coeficiente de fricción.

Como se comentó en la sección 9.4, esta solución del movimiento en un conducto circular, y la correspondiente Ley de Hagen-Poiseuille, aunque en teoría es válida para cualquier número de Reynolds, se hace inestable para Re mayor que un cierto valor crítico Re^* (aproximadamente igual a 2300 en condiciones normales), dejando de tener significado físico para $Re > Re^*$. El flujo se hace entonces turbulento y será considerado al final de este curso. Ya en 1839, casi 50 años antes que Reynolds hiciera sus famosos experimentos (que reproduciremos en esencia en una de las prácticas de laboratorio), Hagen indicó la existencia de dos regímenes diferenciados en el flujo de un líquido por un conducto. Hagen observó que la caída de presión, $\Delta p = p_1 - p_2$, era lineal con la velocidad media cuando ésta era menor que un cierto valor [Ley de Hagen - Poiseuille (13.5)], y que por encima de ese valor, pasada una cierta transición, Δp era proporcional a la velocidad media al cuadrado, aproximadamente. Esta última ley es equivalente a decir que la expresión (13.5) es independiente del número de Reynolds, lo cual veremos que ocurre en tubos rugosos para Re mayores que un cierto valor Re^r, que depende de la rugosidad. Para números de Reynolds intermedios ($Re^* < Re < Re^r$), la dependencia de Δp con la velocidad media sigue leyes intermedias entre la dependencia lineal y la cuadrática. En particular, para $2300 < Re < 10^4$, aproximadamente, se produce la *transición* entre los regímenes laminar y turbulento, e Δp varía de manera fluctuante con V; para $10^4 < Re < Re^r$, Δp tiene una dependencia logarítmica con Re (y por tanto con V)

que se obtendrá en la última lección.

13.2. Flujo laminar en conductos de sección arbitraria lentamente variable

La solución anterior, que es exacta para conductos infinitos de sección circular constante, es aproximadamente válida para conductos de sección *lentamente variable* cuando el número de Reynolds es pequeño (fuerzas viscosas dominantes frente a las inerciales; ver más abajo para una especificación más precisa).

En efecto. Considérese un conducto cuya sección (que se supondrá de forma arbitraria) varía lentamente; es decir, si D es un diámetro característico y L la longitud del conducto, $D/L \ll 1$. Por otra parte, el conducto no tiene que ser necesariamente rectilíneo, pero se supone que si es curvo, lo es *suavemente;* es decir, $D/R_c \ll 1$, donde R_c es cualquier radio de curvatura del eje del conducto. En estas condiciones es lícito tomar, en primera aproximación y con errores del orden de $D/R_c \ll 1$, ejes cartesianos, siendo el eje x la dirección axial a lo largo del conducto. La ecuación de continuidad para el movimiento del líquido,

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0\,, \tag{13.6}$$

nos dice que

$$\frac{V}{L} \sim \frac{V_T}{D}\,, \tag{13.7}$$

donde V es el orden de magnitud de la velocidad axial a lo largo del conducto (v_x) y V_T es el orden de magnitud de las velocidades en las direcciones transversales y y z. Por tanto,

$$V_T \sim \frac{D}{L} V \ll V\,, \tag{13.8}$$

y el movimiento se puede considerar *casi unidireccional.* Las ecuaciones de cantidad de movimiento en las direcciones x, y, z se escriben:

$$\rho\frac{\partial v_x}{\partial t} + \rho\left(v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right) = -\frac{\partial(p+\rho U)}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right), \tag{13.9}$$

$$\rho\frac{\partial v_y}{\partial t} + \rho\left(v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right) = -\frac{\partial(p+\rho U)}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right), \tag{13.10}$$

$$\rho\frac{\partial v_z}{\partial t} + \rho\left(v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = -\frac{\partial(p+\rho U)}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right). \tag{13.11}$$

En los términos correspondientes a las fuerzas viscosas, está claro que los sumandos que involucran $\partial^2/\partial x^2$ son despreciables frente a los otros con errores del orden de $(D/L)^2 \ll 1$.

Se supondrá, en primer lugar, que los términos de fuerzas viscosas son dominantes frente a los convectivos. Teniendo en cuenta la ecuación (13.9), esta condición implica

$$\rho\frac{V^2}{L} \ll \mu\frac{V}{D^2}\,, \tag{13.12}$$

y de las ecuaciónes (13.10)-(13.11)

$$\rho\frac{V_T^2}{D} \ll \mu\frac{V_T}{D^2}\,; \tag{13.13}$$

ambas expresiones proporcionan la condición:

$$Re\frac{D}{L} \ll 1\,, \tag{13.14}$$

donde $Re = VD/\nu$ es el número de Reynolds basado en el diámetro. Obsérvese que la condición de términos viscosos dominantes frente a los convectivos no necesariamente implica que $Re \ll 1$, puesto que $D/L \ll 1$, siendo una consecuencia, mayormente, de la casi unidireccionalidad del movimiento; por tanto, esta condición puede verificarse, incluso, para Re relativamente altos.

Supondremos, además, que el movimiento es casi estacionario. Comparando los términos de aceleración local con los viscosos, esta hipótesis requiere que

$$\frac{D}{L}ReSt = \frac{D^2}{\nu t_o} \ll 1\,, \tag{13.15}$$

donde t_o es un tiempo característico de variación de las magnitudes fluidas. Con estas hipótesis, las variaciones transversales de $p + \rho U$ son despreciables frente a sus variaciones longitudinales: de (13.9) se tiene

$$\frac{\Delta_L(p+\rho U)}{L} \sim \mu\frac{V}{D^2}\,, \tag{13.16}$$

donde Δ_L denota variaciones longitudinales a lo largo del conducto, y de (13.10)-(13.11),

$$\frac{\Delta_T(p+\rho U)}{D} \sim \mu\frac{V_T}{D^2}\,, \tag{13.17}$$

por lo que

$$\frac{\Delta_T(p+\rho U)}{\Delta_L(p+\rho U)} \sim \left(\frac{D}{L}\right)^2 \ll 1\,. \tag{13.18}$$

Consecuentemente, las dos ecuaciones transversales pueden no tenerse en cuenta en primera aproximación y suponer que

$$p + \rho U \neq f(y,z)\,; \tag{13.19}$$

es decir, $p + \rho U$ es constante en cada sección del conducto (con errores del orden de $D^2/L^2 \ll 1$).[2]

Con todas estas aproximaciones, con errores del orden de ReD/L, $(D/L)^2$ y $D^2/\nu t_o$, las ecuaciones de cantidad de movimiento se reducen a

$$0 = p_l + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\,, \tag{13.20}$$

donde $u \equiv v_x$ y $p_l = -\partial(p+\rho U)/\partial x$, que depende solo de x y de t (a través de las condiciones de contorno, puesto que el movimiento es casi unidireccional y casi estacionario). Como

[2]Se puede comprobar que esta aproximación es independiente de la hipótesis $ReD/L \ll 1$, siendo una consecuencia de $D/L \ll 1$ exclusivamente.

condiciones de contorno, u debe ser finita en el interior de la sección $S(x;y,z)$ y $u=0$ sobre el contorno $c(x;y,z)=0$. Por tanto, el fluido se comporta en cada sección del conducto como si éste tuviese longitud infinita y sección constante (la local); la coordenada x y el tiempo actúan como parámetros. Utilizando las variables adimensionales

$$v=\frac{\mu}{p_l D^2}u\,,\quad \xi=\frac{y}{D}\,,\quad \eta=\frac{z}{D}\,, \tag{13.21}$$

donde $D=D(x)$ y $p_l=p_l(x,t)$, la ecuación anterior y la condición de contorno en la pared se transforman en

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial\eta^2}=-1\,, \tag{13.22}$$

$$v=0\quad\text{en}\quad c(\xi,\eta)=0\,. \tag{13.23}$$

El caudal viene dado por

$$Q=\int_{S(x;y,z)} u\,dydz=\int_{S(\xi,\eta)}\frac{p_l D^2}{\mu}vD^2 d\xi d\eta=\frac{p_l D^4}{\mu}\Gamma\,, \tag{13.24}$$

donde

$$\Gamma\equiv\int_S v\,d\xi d\eta\,, \tag{13.25}$$

es un *número* que depende del tipo de sección (obsérvese que en las ecuaciones (13.22)-(13.23) no aparece ningún parámetro físico). La relación anterior es una generalización de la Ley de Hagen-Poiseuille (13.1) para secciones de forma arbitraria (lo cual está reflejado en Γ) y que pueden variar (lentamente) con x [contemplado en $p_l(x,t)$ y $D(x)$; téngase en cuenta que $p_l(x,t)D^4(x)$ no puede depender de x, puesto que por conservación de la masa Q es función, a lo sumo, de t].

Para una sección circular, la ecuación (13.22) y las condiciones de contorno se escriben, en coordenadas cilíndricas con $\xi=r/D$,

$$\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\frac{\partial v}{\partial\xi}\right)=-1\,, \tag{13.26}$$

$$v(\xi=1/2)=0\,,\quad v(\xi=0)\neq\infty\,, \tag{13.27}$$

que proporciona

$$v=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-\xi^2\right) \tag{13.28}$$

y

$$\Gamma=\int_o^{2\pi}d\theta\int_o^{1/2}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-\xi^2\right)\xi d\xi=\frac{\pi}{128}\,, \tag{13.29}$$

lo cual está de acuerdo con (12.24) y (13.1). Como otro ejemplo, en el caso de un **flujo a través de una sección anular**, $R_1<r<R_2$, la ecuación (13.26) sigue siendo válida, pero cambian las condiciones de contorno:

$$v(\xi=a)=v(\xi=1)=0\,, \tag{13.30}$$

donde se ha tomado R_2 para adimensionalizar r, $\xi = r/R_2$, y $a = R_1/R_2 < 1$. La solución es

$$v = \frac{1}{4}\left[1 - \xi^2 - \frac{1-a^2}{\ln a}\ln\xi\right] , \tag{13.31}$$

que proporciona

$$\Gamma = \frac{\pi}{8}\left[1 - a^4 + \frac{(1-a^2)^2}{\ln a}\right] . \tag{13.32}$$

El perfil de velocidades anterior se asemeja a una parábola que recorre la región anular, cuyo máximo está en

$$\frac{r}{R_2} = \left(\frac{1-a^2}{2\ln(1/a)}\right)^{1/2} . \tag{13.33}$$

Análogamente se podría generalizar para cualquier sección del conducto. Lo relevante es que la Ley de Hagen-Poiseuille (13.24) se puede utilizar de forma aproximada para el movimiento incompresible de un fluido en cualquier conducto siempre que $D/L \ll 1$, $ReD/L \ll 1$ y $D^2/\nu t_o \ll 1$.

13.3. Tubos de longitud finita. Efecto de entrada

La ley de Hagen-Poiseuille (13.1) [o (13.24)] es válida para tubos infinitos (si $Re \leq 2300$ para conductos circulares), en los que el perfil de velocidades viene dado por (12.24). Obviamente, no existen conductos infinitos y en la región de entrada de los mismos el perfil de velocidad no es el parabólico (12.24). Justo en la sección de entrada la velocidad es prácticamente uniforme e igual a u_e (ver figura 13.2). Ya dentro del conducto, el efecto de frenado por viscosidad del fluido en la pared va modificando el perfil de velocidad de forma que existe un núcleo central no viscoso de velocidad uniforme, en el cual el fluido se acelera al ser el caudal constante, y una capa límite cerca de la pared donde la viscosidad sí es importante, cuyo espesor va creciendo hasta que la viscosidad *impregna* todo el fluido y se llega al perfil de velocidad *desarrollado* de Poiseuille (donde la velocidad en el centro es $2u_e$). La longitud (de entrada) L_e en la cual el fluido pasa de tener velocidad uniforme hasta llegar al perfil parabólico se puede estimar teniendo en cuenta que en esta región el término convectivo de la ecuación de cantidad de movimiento es tan importante como el viscoso:

$$|\rho\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}| \sim \rho u_e^2/L_e \sim |\mu\nabla^2\vec{v}| \sim \mu u_e/D^2 , \tag{13.34}$$

de donde

$$\frac{L_e}{D} \sim Re = \frac{\rho u_e D}{\mu} . \tag{13.35}$$

Experimentalmente se encuentra que $L_e/D \simeq 0{,}06Re$; por tanto, la longitud de entrada máxima, para $Re = Re^* \simeq 2300$, es $L_e \simeq 138D$. La caída de presión en esta región de entrada es despreciable frente a la total en todo el conducto de longitud L si

$$\frac{L_e}{L} \sim Re\frac{D}{L} \ll 1 , \quad \frac{\Delta_e(p+\rho U)}{\Delta_L(p+\rho U)} \sim \frac{\rho u_e^2}{\mu u_e L/D^2} \sim Re\frac{D}{L} \ll 1 , \tag{13.36}$$

lo cual coincide con la hipótesis de validez de la Ley de Hagen-Poiseuille.

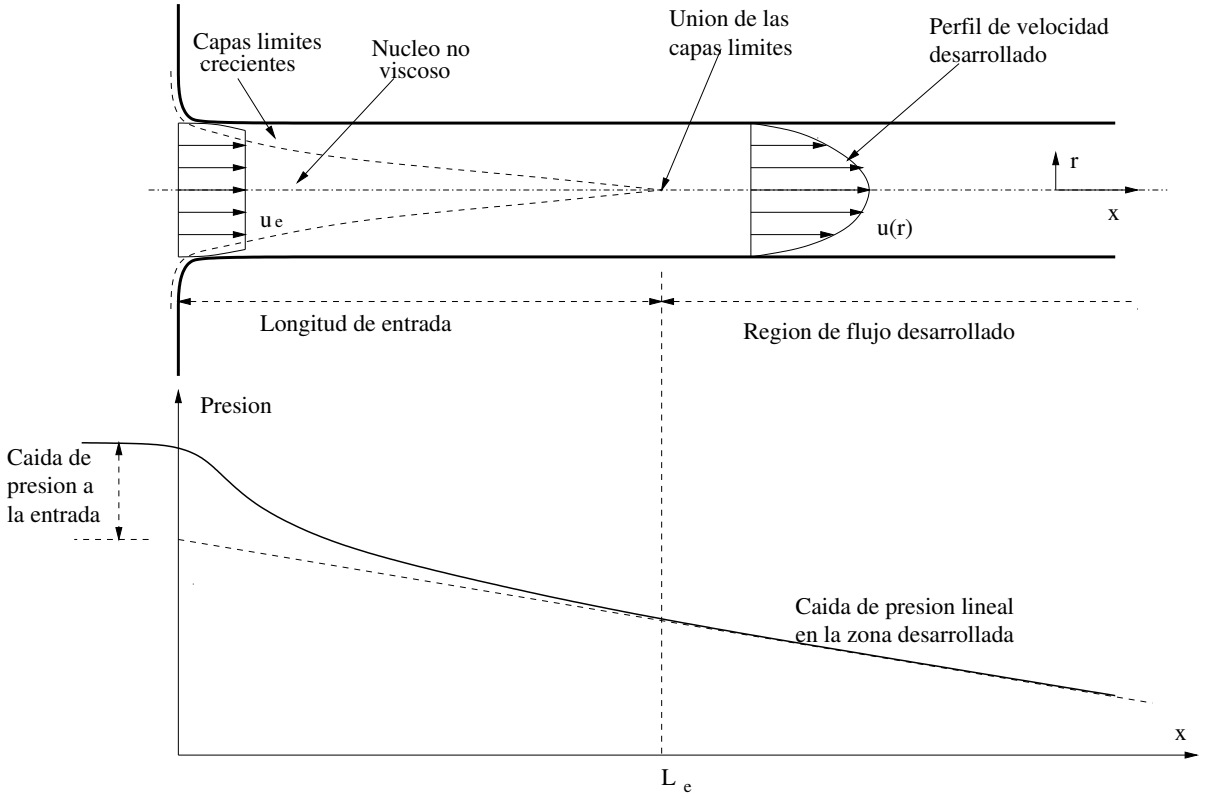


Figura 13.2: Perfil de velocidad y caída de presión en la región de entrada.

En el caso en que L_e sea del orden de L (tubos cortos), la caída de presión en la región de entrada es una fracción importante de la total, siendo necesario obtener los campos de velocidad y de presión en dicha región. Para ello hay que resolver el problema reteniendo los términos convectivos y viscosos en la ecuación de cantidad de movimiento. En un conducto circular, si $\vec{v} = u\vec{e_x} + v\vec{e_r}$, tomando las variables adimensionales

$$\xi = \frac{2x}{DRe}\,, \quad \eta = \frac{2r}{D}\,, \quad \overline{u} = u/u_e\,, \quad \overline{v} = v/u_e\,, \quad \overline{p} = (p + \rho U)/\rho u_e^2\,, \tag{13.37}$$

las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento según el eje x en coordenadas cilíndricas se escriben

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial \xi} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial \eta}(\eta \overline{v}) = 0\,, \tag{13.38}$$

$$\overline{u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial \xi} + \overline{v}\frac{\partial \overline{u}}{\partial \eta} = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial \xi} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\eta \frac{\partial \overline{u}}{\partial \eta}\right)\,, \tag{13.39}$$

$$\xi = 0\,, \quad \overline{u} = 1\,, \quad \overline{v} = 0\,, \quad \overline{p} = \overline{p}_e\,; \quad \eta = 1\,, \quad \overline{u} = \overline{v} = 0\,, \tag{13.40}$$

donde se ha supuesto que el movimiento es estacionario y que $D \ll L$, lo cual hace innecesaria, en primera aproximación y con errores del orden $D^2/L^2 \ll 1$, la ecuación de cantidad de movimiento según la dirección radial. La ecuación (13.39) es parabólica, y el sistema de ecuaciones se resuelve numéricamente sin excesiva dificultad, proporcionando la caída de presión $\overline{p_e} - \overline{p}(\xi)$. Sin embargo, muchas veces se utiliza una estimación de esta caída de presión obtenida mediante la aplicación de las ecuaciones de conservación de la masa y de

cantidad de movimiento a un volumen de control constituido por la pared del conducto, la sección de entrada $x = 0$ donde $u = u_e$, y la sección de salida $x = x$, donde se supone que se ha alcanzado ya el perfil parabólico $u = V_{max}[1 - (2r/D)^2]$. La ecuación de conservación de la masa proporciona:

$$- u_e \pi \frac{D^2}{4} + \int_o^{D/2} V_{max} \left[1 - \left(\frac{2r}{D} \right)^2 \right] 2\pi r dr = 0 \,, \tag{13.41}$$

es decir, $V_{max} = 2u_e$, como ya sabemos. La ecuación de cantidad de movimiento según el eje x da (suponiendo que no hay fuerzas másicas, es decir, el conducto es horizontal):

$$- \rho u_e^2 \pi \frac{D^2}{4} + \int_o^{D/2} 4\rho u_e^2 \left[1 - \left(\frac{2r}{D} \right)^2 \right]^2 2\pi r dr = [p_e - p(x)]\pi \frac{D^2}{4} + \int_o^x \tau_f(x, D/2)\pi D dx \,, \tag{13.42}$$

de donde

$$\frac{p_e - p(x)}{\rho u_e^2/2} = \frac{2}{3} - \frac{8}{\rho D u_e^2} \int_o^x \tau_f(x, D/2) dx \,. \tag{13.43}$$

Obviamente, $\tau_f \equiv \mu(\partial u/\partial r)_{r=D/2}$ no se conoce puesto que para ello habría que resolver el problema (13.38)-(13.40). Pero, aproximadamente, podemos suponer que τ_f viene dado por el perfil de velocidades parabólico, obteniéndose

$$\frac{p_e - p(x)}{\frac{1}{2}\rho u_e^2} = \frac{2}{3} + \frac{64}{Re} \frac{x}{D} \,, \quad Re = \frac{\rho u_e D}{\mu} \,. \tag{13.44}$$

Se observa que el segundo sumando es el mismo que el proporcionado por la Ley de Hagen-Poiseuille [ecuación (13.5)], siendo dominante frente al primero (corrección debida al efecto de entrada) cuando $ReD/x \ll 1$, como ya sabemos. Si se resuelve numéricamente el problema (13.38)-(13.40) se encuentra que $(p_e - p(x))/\frac{1}{2}\rho u_e^2$ se aproxima bastante rápidamente a $k + 64x/(ReD)$ cuando x crece, siendo prácticamente coincidente cuando $64x/(ReD) \simeq 1$, pero con $k \simeq 1{,}16$ en vez de $2/3$ (esta rápida aproximación es debida a que $64 \gg k$).

Referencias.

- G. K. BATCHELOR, 1967. Capítulo 4.
- F.M. WHITE, 2004. Capítulo 6.

Práctica de laboratorio: Experimento de Reynolds

Objetivo, montaje experimental, ecuaciones y definiciones

El objetivo de esta práctica es caracterizar experimentalmente la transición de flujo laminar a turbulento en un conducto. Para ello se utilizan dos técnicas simultáneas: visualización del flujo y medida de la caída de presión a lo largo del conducto. El montaje es en cierto modo similar al que realizó Osborne Reynolds en su famoso experimento, cuyos resultados se publicaron en 1883 (ver figura 13.3).

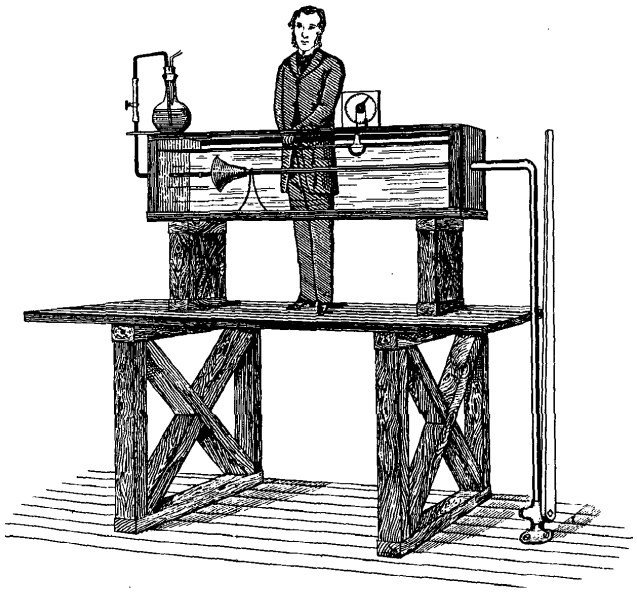


Figura 13.3: Esquema del experimento de Reynolds tomado de su artículo de 1883, cuyo montaje original aún se expone en la Universidad de Manchester.

El esquema del montaje experimental de la práctica se representa en las figuras 13.4 y 13.5.[3] El conducto horizontal es transparente (de metacrilato) para poder visualizar el flujo en su interior. Tiene una toma de presión al comienzo que permite determinar la caída de presión a lo largo del conducto, desde la entrada hasta la salida, donde la presión es la

[3]El montaje experimental ha sido diseñado, construido y puesto a punto por el Dr. D. Carlos del Pino Peñas, el Dr. D. Luis Parras Anguita, D. Juan José Martínez y D. Sergio Pinazo Ortega.

atmosférica (p_a). El diámetro interior del conducto es $D = 19$ mm y su longitud, desde la toma de presión hasta la salida, es de $L = 196$ mm.

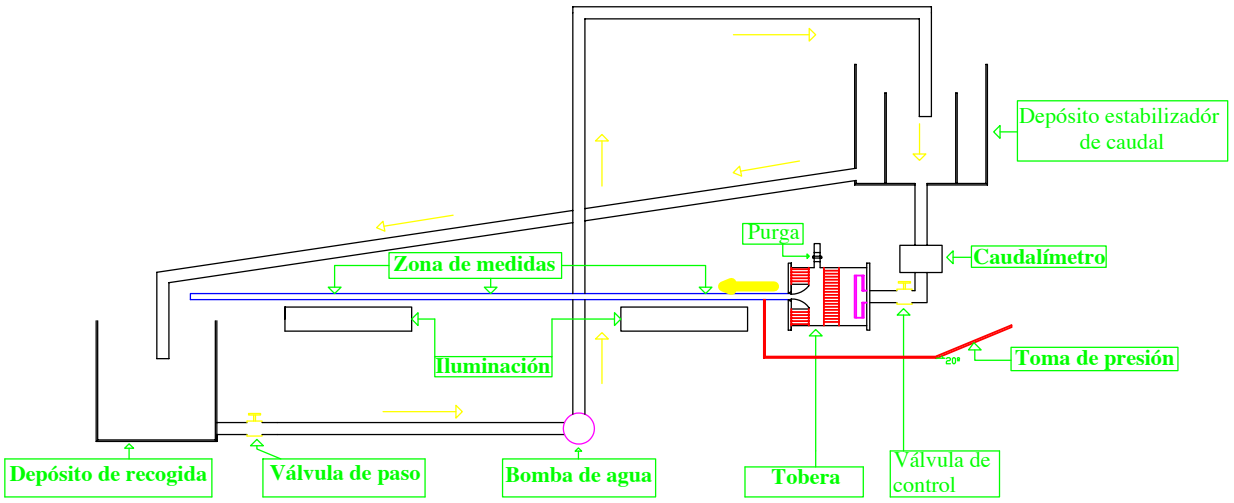


Figura 13.4: Esquema del montaje experimental. El conducto horizontal transparente (azul) tiene un diámetro interior $D = 19$ mm y una longitud, a partir de la toma de presión, $L = 196$ mm.

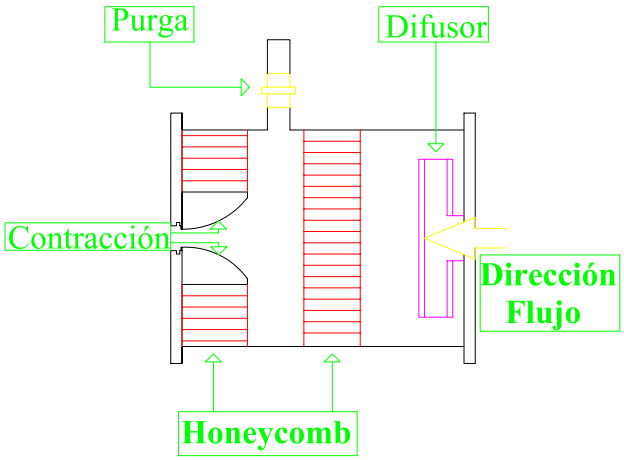


Figura 13.5: Esquema de la tobera a la entrada del conducto.

El agua sale del fondo de un depósito elevado que mantiene un nivel constante de agua en su interior, reduciendo así las fluctuaciones de caudal que pueda originar la bomba. El conducto de salida tiene intercalado un caudalímetro electromagnético[4] que permite una lectura digital del caudal de agua que circula por el conducto para las distintas posiciones de la válvula de regulación de caudal que se encuentra a continuación, entre el caudalímetro y la tobera a la entrada del conducto horizontal de metacrilato.

El objetivo de la tobera es generar un flujo lo más uniforme posible a la entrada del conducto. Esto es esencial para que se pueda visualizar correctamente la transición de flujo laminar a turbulento en el interior del conducto. Como se aprecia en la figura 13.5, el agua

[4]Rango $0 - 2500$ litros/hora, precisión $\pm 0{,}1$ litros/hora.

que llega a la tobera primero se deflecta con un dispositivo cuya finalidad es remansar el flujo todo lo que sea posible en una cámara previa a la contracción de la tobera. En esta cámara de remanso existe una estructura de panal de abeja ('honeycomb') que permite enderezar en gran medida la corriente a la entrada de la contracción de la tobera. De esta manera es más eficaz la función principal de la contracción de uniformizar la corriente a la entrada del conducto. La relación de contracción de la tobera es de 9:1 en área, y el conducto se encuentra conectado a la salida de la contracción mediante una junta estanca. La cámara de remanso tiene en la parte superior un orificio de salida con una válvula para purgar el aire que se pueda acumular en su interior antes de comenzar la realización de la práctica.

Tras pasar por el conducto, el agua cae en un depósito, de donde se extrae del fondo y se recircula mediante una bomba[5] hasta el depósito elevado de regulación de caudal. La instalación contiene también una conexión entre los dos depósitos, que trasvasa el agua que rebosa del nivel constante del depósito de regulación de caudal, y varias válvulas auxiliares.

Para las visualizaciones se utilizan partículas de 'mearlmaid'[6] disueltas en agua, las cuales reflejan muy bien la luz. El conducto se ilumina por debajo mediante dos lámparas que producen una luz intensa (ver Fig. 13.4), que al ser reflejada por estas partículas permiten visualizar la estructura del flujo a lo largo del conducto para los distintos caudales o números de Reynolds. Para aumentar el contraste y mejorar la visualización se ha colocado un fondo negro detrás del conducto. De esta manera podremos detectar si el flujo es laminar o turbulento y así caracterizar el número de Reynolds crítico de la transición de flujo laminar a flujo turbulento, que es el principal objetivo de la práctica. Con esta visualización podremos caracterizar también los distintos regímenes intermitentes intermedios que ocurren a lo largo del conducto durante la transición de flujo laminar a turbulento. Conviene indicar que este tipo de visualización difiere de la que originalmente utilizó Reynolds, consistente en inyectar un colorante en el centro de la entrada del conducto mediante un tubo muy fino, y que todavía se utiliza en muchos laboratorios docentes de Mecánica de Fluidos que dispone de esta práctica.

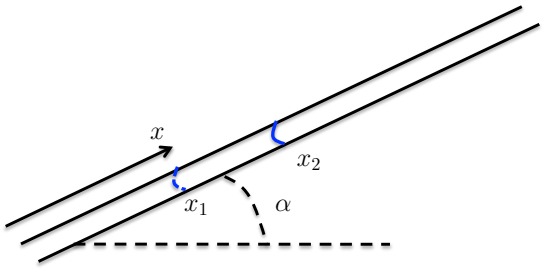


Figura 13.6

Para medir la presión se utiliza un manómetro de agua consistente en un tubo inclinado un ángulo $\alpha = 20^o$ en relación a la horizontal (ver Fig. 13.6). Si x_1 y x_2 son las posiciones del menisco de agua en el manómetro para dos caudales Q_1 y Q_2 que circulan por el conducto, la diferencia de las caídas de presión en el conducto para esos dos caudales viene dada por

$$(\Delta p)_2 - (\Delta p)_1 \equiv (p_2 - p_a) - (p_1 - p_a) = \rho g \,\mathrm{sen}\alpha (x_2 - x_1)\,, \tag{13.45}$$

[5]Bomba centrífuga de 0,28 kW de potencia nominal y un caudal máximo efectivo de 120 litros/minuto.

[6]Kalliroscope AQ-1000, que se comercializan como uno de los ingredientes para fabricar sustratos de maquillajes.

donde ρ es la densidad del agua y g la aceleración de la gravedad. El ángulo de inclinación α del manómetro se ha elegido pequeño para aumentar su resolución, ya que las diferencias de presión son relativamente muy pequeñas cuando el flujo es laminar.

Además de medir la presión a la entrada del conducto y de visualizar el flujo para cada caudal, durante el desarrollo de la práctica es necesario medir la temperatura del agua para poder así conocer la densidad y la viscosidad del agua. Para su cálculo se utilizarán las siguientes expresiones semiempíricas:[7]

$$\rho(kg/m^3) \simeq 1000 - 0{,}0178|T^oC - 4^oC|^{1{,}7} \pm 0{,}2\,\%\,, \tag{13.46}$$

$$\ln\frac{\mu}{\mu_0} \simeq -1{,}704 - 5{,}30z + 7{,}003z^2\,, \quad z = \frac{273K}{TK}\,, \quad \mu_0 = 1{,}788\times 10^{-3} kg/(ms)\,. \tag{13.47}$$

Muy particularmente, es esencial conocer la viscosidad μ con precisión, que depende fuertemente de la temperatura, para poder calcular correctamente el número de Reynolds,

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu}\,, \tag{13.48}$$

donde la velocidad media V está relacionada con el caudal Q mediante

$$V = \frac{Q}{\pi D^2/4}\,. \tag{13.49}$$

Realización de la práctica y presentación de resultados

Durante la práctica se irá variando el caudal que circula por el conducto, abriendo progresivamente la válvula de regulación de caudal, y se irá midiendo la caída de presión a lo largo del conducto. Simultáneamente, se visualizará el flujo mediante la iluminación de las partículas inoculadas en el agua para detectar el paso de régimen laminar a turbulento.

Primeramente se determinará la posición x_0 del manómetro correspondiente a la presión atmosférica, abriendo a la atmósfera el otro extremo del tubo inclinado antes de conectarlo a la entrada del conducto. Esta posición permitirá obtener la caída de presión Δp en el conducto para cada caudal mediante (13.45). También se medirá la temperatura del agua para determinar su densidad y viscosidad. No obstante, la temperatura se medirá para cada caudal para comprobar que la variación es pequeña a lo largo de la práctica y, en caso contrario, recalcular la densidad y la viscosidad que se necesitan en el número de Reynolds.

Se comenzará con la válvula de regulación de caudal prácticamente cerrada para que el número de Reynolds de inicio sea lo más bajo posible.

Para cada posición de la válvula de regulación de caudal se realizarán y anotarán las siguientes mediciones y observaciones:

- Lectura del caudal Q en el caudalímetro. Se esperará a que se estabilice el caudal y se anotarán los valores máximo y mínimo (aproximadamente) para poder estimar los errores aproximados de la medida.[8]

[7] WHITE, 2004

[8] No se pretende que el estudiante realice un análisis riguroso de los errores experimentales, que alargaría mucho la realización de la práctica. Simplemente que pueda tener una idea aproximada de los márgenes de error de cara a la comparación con los resultados teóricos.

- Lectura de la posición x del manómetro. Igualmente, se esperará a que se estabilice el caudal y se anotarán los valores máximo y mínimo (aproximadamente) para poder estimar los errores aproximados de la medida.
- Descripción del flujo. Para ello se observarán las distintas secciones iluminadas del conducto y se anotará la naturaleza del flujo: laminar, intermitente, turbulento ....
- Temperatura T.

Para anotar estas medidas y obtener la caída de presión y el número de Reynolds se puede utilizar una tabla como la que se proporciona en el anexo de esta memoria de práctica. Los incrementos de caudal tienen que ser muy pequeños al principio para que se pueda determinar con cierta precisión el número de Reynolds crítico que marca la transición de flujo laminar a turbulento. Una vez superado suficientemente el Reynolds crítico ya se podrán espaciar más los caudales en las sucesivas medidas.

Tras la realización de la práctica, el estudiante debe presentar la tabla con las medidas y observaciones realizadas y los siguientes resultados:

- Número Reynolds crítico.
- Figura donde se representen los valores medidos de Δp frente a Q. Se deberán tomar suficientes puntos para que se aprecie una región lineal por debajo del caudal crítico y una región más amplia de flujo turbulento. Incluir barras de errores (aproximadas).
- Figura donde se represente la relación anterior de forma adimensional y la comparación con los resultados teóricos. Para ello se utilizará el coeficiente de fricción de Fanning [ver ecuaciones (13.3)-(13.5)],

$$\lambda \equiv 4\frac{\tau_f}{\frac{1}{2}\rho V^2} = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho V^2}\frac{D}{L}\,, \tag{13.50}$$

y se representará frente al número de Reynolds. Para el régimen laminar, la Ley de Hagen-Poiseuille nos dice que [ver (13.5)]

$$\lambda = \frac{64}{Re}\,. \tag{13.51}$$

En régimen turbulento, y para un conducto hidráulicamente liso, se verá en la última lección que la función $\lambda(Re)$ viene dada implícitamente mediante la expresión

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \simeq 0{,}88 \ln\left(Re\sqrt{\lambda}\right) - 0{,}8\,, \tag{13.52}$$

que para $Re < 10^5$ se puede aproximar por la siguiente relación debida a Blasius

$$\lambda \simeq 1{,}02\,(\log_{10} Re)^{-2{,}5}\,. \tag{13.53}$$

Lectura (avanzada) sugerida:

Experimental Studies of Transition to Turbulence in a Pipe. Tom Mullin. *Annual Review of Fluid Mechanics,* vol. 43, p.1 (2011).

Anexo: Hoja de toma de datos

Temperatura del agua:

Densidad del agua: Viscosidad:

Posición inicial del manómetro x_0:

Q (l/s)	T (^{o}C)	Re	x (mm)	$x - x_0$ (mm)	Δp (Pa)	Descripción del flujo
**********	**********	**********	**********	**********	**********	

Ejercicios de movimientos unidireccionales y de movimiento en conductos de líquidos

Ejercicios resueltos

1. Obtener el perfil de velocidad del movimiento unidireccional en una capa de espesor constante h de un líquido de densidad ρ y viscosidad μ que se mueve por acción de la gravedad sobre un plano inclinado un ángulo α en relación a la horizontal. Calculen también el caudal por unidad de longitud y el esfuerzo de fricción sobre el plano inclinado. Comparen estos resultados con los del movimiento de Poiseuille entre dos placas separadas una distancia h.

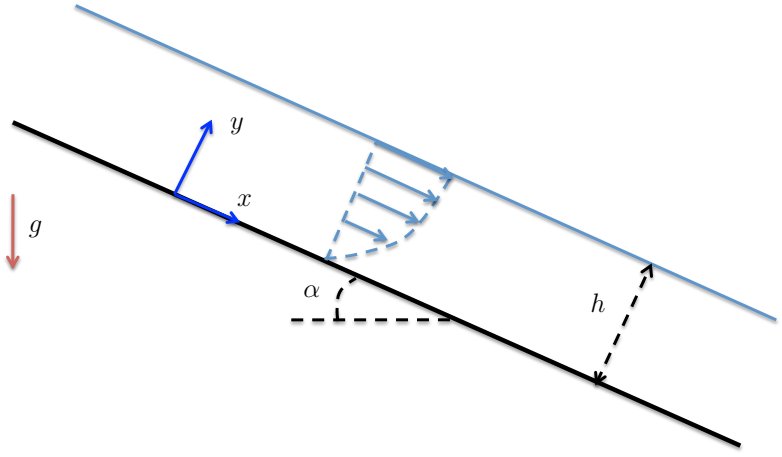


Figura 13.7

Solución.

Tenemos un movimiento unidireccional, $\vec{v} = u\vec{e}_x$ (ver figura 13.7 para las coordenadas), incompresible, $\nabla \cdot \vec{v} = \partial u/\partial x = 0$, y estacionario ($h$ constante), por lo que $u = u(y)$, que satisface la ecuación de cantidad de movimiento según x (12.15):

$$0 = p_l + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \,. \tag{13.54}$$

En este caso,

$$p_l \equiv -\frac{\partial(p+\rho U)}{\partial x} = -\frac{\partial(p+\rho g z)}{\partial x} = \rho g \,\mathrm{sen}\alpha\,, \tag{13.55}$$

donde z es la coordenada vertical y se ha hecho uso de la ecuación de cantidad de movimiento según y, que nos dice que la presión reducida $p+\rho g z$ no depende de y, siendo, por tanto, $p+\rho g z = p_a + \rho g z_s(x)$, donde p_a es la presión atmosférica y $z_s(x)$ la altura de la superficie libre del líquido en el valor de x correspondiente; $dz_s/dx = -\mathrm{sen}\alpha$.

La ecuación (13.54) se tiene que resolver con las siguientes condiciones de contorno:

$$y = 0\,, \quad u = 0\,; \tag{13.56}$$

$$y = h\,, \quad u = u_a\,, \quad \mu\frac{\partial u}{\partial y} = \mu_a \frac{\partial u_a}{\partial y}\,, \tag{13.57}$$

donde el subíndice a hace referencia al aire por encima de la capa líquida. Dado que μ_a suele ser mucho menor que μ (si el líquido fuese agua, μ_a/μ sería, aproximadamente, una centésima), con errores del orden de $\mu_a/\mu \ll 1$ podríamos aproximar la segunda condición de contorno por

$$y = h\,, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0\,. \tag{13.58}$$

Integrando una vez (13.54),

$$\frac{\partial u}{\partial y} = C_1 - \frac{p_l}{\mu} y\,, \tag{13.59}$$

donde, de acuerdo con (13.58), la constante de integración vale $C_1 = \frac{p_l}{\mu}h$. Integrando otra vez y haciendo uso de la condición de contorno (13.56), se llega al perfil de velocidad

$$u = \frac{p_l}{\mu} y\left(h - \frac{y}{2}\right) = \frac{\rho g \,\mathrm{sen}\alpha}{\mu} y\left(h - \frac{y}{2}\right)\,. \tag{13.60}$$

El caudal por unidad de longitud sería

$$q = \int_0^h u dy = \frac{p_l}{\mu}\frac{h^3}{3} = \frac{\rho g \,\mathrm{sen}\alpha}{\mu}\frac{h^3}{3}\,. \tag{13.61}$$

Obsérvese que este caudal es cuatro veces mayor que el correspondiente al movimiento de Poiseuille entre dos placas separadas una distancia h para el mismo valor de p_l [ecuación (12.19)].

Por último, el esfuerzo de fricción sobre la superficie inclinada es

$$\tau_f = \tau'_{xy}(y=0) = \mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = p_l h = \rho g \,\mathrm{sen}\alpha\, h\,, \tag{13.62}$$

que es el doble del correspondiente a la corriente de Poiseuille entre dos placas planas (12.18) para el mismo p_l.

2. Se desea obtener el caudal Q de descarga de un depósito de sección A, que contiene un líquido de densidad ρ y viscosidad μ inicialmente hasta una altura H_0, a través de un conducto horizontal que sale del fondo del depósito, de sección circular con diámetro D y de longitud $L \gg D$ (ver Fig. 13.8), en el supuesto de que las fuerzas viscosas sean dominantes en el movimiento del líquido en el conducto. Den los criterios de validez de esta suposición y comenten los límites de validez de la expresión $Q(t)$ obtenida.

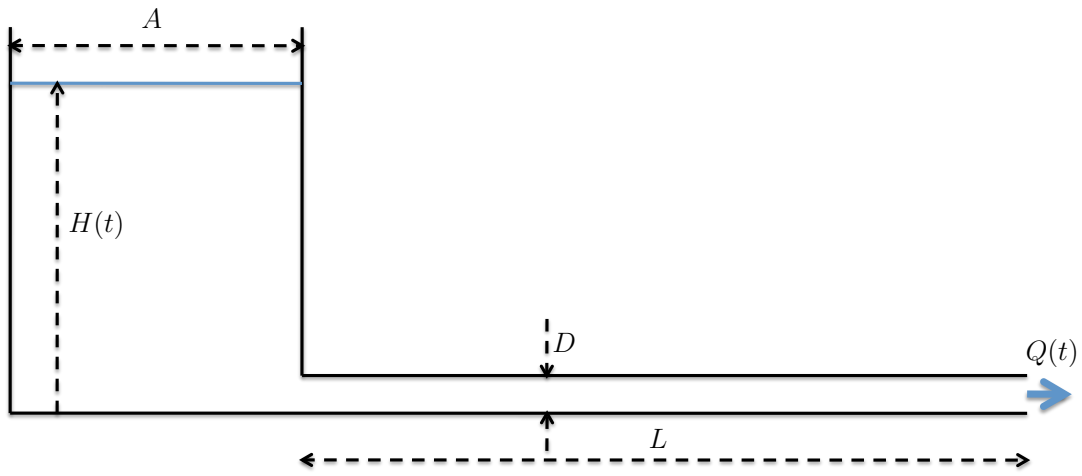


Figura 13.8

Solución.

Como el conducto es horizontal, las fuerzas másicas asociadas a la gravedad no intervienen en el movimiento dentro del conducto y $p_l = -\partial p/\partial x$, donde x es la coordenada a lo largo del conducto. Para poder aplicar la Ley de Hagen-Posieuille (13.1),

$$Q = -\frac{\pi D^4}{128\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\,, \tag{13.63}$$

se tienen que verificar los requisitos $D/L \ll 1$, ya especificado en el enunciado, y (13.14)-(13.15),

$$Re\frac{D}{L} = \frac{VD^2}{\nu L} \ll 1\,, \quad \frac{D^2}{\nu t_o} \ll 1\,, \tag{13.64}$$

con $\nu = \mu/\rho$. El primero de los requisitos (13.64) también nos garantiza que podamos despreciar la caída de presión en la región de entrada del conducto [ver (13.36)] donde no vale (13.63). Hasta que no se plantee la solución con más detalle, no se podrá estimar la velocidad característica V (velocidad media en el conducto) y el tiempo característico t_o, y así poder escribir los requisitos (13.64) en términos de los datos del problema.

Como Q no depende de x por conservación de la masa (ρ es constante), y el diámetro D del conducto es constante, (13.63) se puede integrar fácilmente:

$$p(x) = p(0) - \frac{128\mu Q}{\pi D^4}\,x\,. \tag{13.65}$$

Para calcular la presión a la entrada del conducto, $p(0)$, tendremos en cuenta que la sección del depósito es mucho mayor que la del conducto, $A \gg D^2$, de forma que el movimiento del líquido dentro del depósito es despreciable y se puede suponer fluidoestática en su interior para cada instante t, en el que la altura del líquido en el depósito es H:

$$p + \rho g z = \text{constante} = p_a + \rho g H = p(0)\,, \tag{13.66}$$

donde el origen de la coordenada vertical z se ha tomado en el fondo del depósito.

Evidentemente, esto no es cierto en la región del depósito cerca de la entrada del conducto, donde el líquido va adquiriendo velocidad hasta entrar en él. Pero en esta región, de tamaño del orden del diámetro del conducto, la caída de presión es pequeña comparada con la caída de presión a lo largo del conducto, por la misma razón por la que se ha despreciado la caída de presión en la región de entrada dentro del conducto de longitud $L_e \ll L$. De esta forma, se puede utilizar $p(0)$ como la presión a la entrada del conducto en primera aproximación (ver figura 13.9). Por otro lado, al utilizar (13.66) se está suponiendo que el tiempo característico de descarga del depósito t_o es mucho mayor que el tiempo de residencia del líquido en el conducto L/V, pues se supone que $p(0)$ varía con el tiempo muy lentamente en comparación con el tiempo de residencia, lo cual se cumple si el volumen del depósito es mucho mayor que el volumen del conducto, $H_0 A/(D^2 L) \gg 1$.

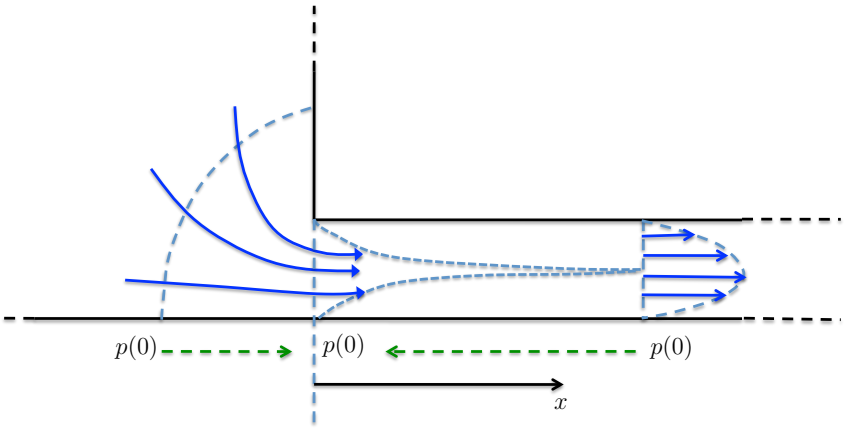


Figura 13.9: Región de entrada del conducto.

Sustituyendo (13.66) en (13.65) y teniendo en cuenta la otra condición de contorno para la presión,

$$p(x = L) = p_a\,, \tag{13.67}$$

podemos obtener el caudal de descarga en función de la altura H del líquido en el depósito existente en ese instante,

$$Q = \frac{\pi D^4 \rho g H}{128 \mu L}\,. \tag{13.68}$$

Para obtener $Q(t)$, debemos calcular previamente $H(t)$ mediante la ecuación de conservación de la masa en el depósito aplicada a un volumen de control (no

estacionario) consistente en el volumen de líquido contenido en el depósito:

$$\rho A\frac{dH}{dt}+\rho Q=0\,. \tag{13.69}$$

Es decir, la disminución de masa de líquido en el depósito es igual, en cada instante, al gasto másico (flujo convectivo de masa) que sale por el conducto o, dividiendo por la densidad (constante), la disminución del volumen de líquido en el depósito es igual, en cada instante, al caudal que sale por el conducto. Sustituyendo $Q(H)$ de (13.68), se obtiene una ecuación diferencial ordinaria de primer orden para $H(t)$:

$$A\frac{dH}{dt}=-\frac{\rho g H\pi D^4}{128\mu L}\,, \tag{13.70}$$

que se debe resolver con la condición inicial

$$H(t=0)=H_0\,. \tag{13.71}$$

Pero antes de resolver este problema, es conveniente adimensionalizarlo por dos motivos: para simplificarlo y para obtener el tiempo característico t_o sin necesidad de resolverlo. Para ello definimos las variables adimensionales

$$\eta=\frac{H}{H_0}\,,\quad \tau=\frac{t}{t_o}\,, \tag{13.72}$$

donde η es de orden unidad (varía entre la unidad y cero) y t_o, desconocido en principio, se elige de manera que τ sea también de orden unidad. Así, t_o será, efectivamente, el tiempo característico de nuestro problema (el orden de magnitud del tiempo de descarga del depósito). Sustituyendo (13.72) en (13.70)-(13.71) se obtiene t_o imponiendo que ambos términos de la ecuación (13.70) sean del mismo orden. De hecho elegimos t_o de forma que simplifique al máximo la ecuación, absorbiendo en él todas las constantes numéricas:

$$\frac{d\eta}{d\tau}=-\eta\,,\quad \eta(\tau=0)=1\,, \tag{13.73}$$

$$t_o=\frac{128\mu LA}{\rho g\pi D^4}\,. \tag{13.74}$$

Obsérvese que en (13.73) no hay parámetro alguno, por lo que la solución adimensional será universal, válida para cualquier conducto, cualquier depósito y cualquier líquido, y se podrá particularizar para cada caso concreto sin más que dashacer los cambios de variables de la adimensionalización. Más importante aún es el hecho de que podamos saber el orden de magnitud del tiempo de descarga sin necesidad de resolver la ecuación, que en este caso concreto tiene solución sencilla (como veremos a continuación), pero que la mayoría de problemas más complejos habría que resolver numéricamente. Esta estimación es, desde un punto de vista ingenieril, más importante aún que la solución exacta del problema, pues interesa más saber que la descarga se produce en segundos, días o años, que si realmente tarda, pongamos por caso, 2,1 segundos, 1,3 días o 0,74 años.

Con t_o estimado, podemos además escribir el segundo requisito (13.64) en términos de los datos del problema y así descartar el resolver la ecuación si no se verifica. Concretamente, quedaría

$$\frac{D^2}{\nu t_o} \sim \frac{\pi}{128}\frac{\rho^2 g D^6}{\mu^2 L A} \ll 1\,, \tag{13.75}$$

donde se ha retenido la constante numérica en el orden de magnitud por no ser de orden unidad. El otro requisito (13.64) también se puede escribir ya en términos de los datos del problema si estimamos el orden de magnitud de V teniendo en cuenta (13.68):

$$V = \frac{Q}{\pi D^2/4} \sim \frac{1}{32}\frac{\rho g D^2 H_0}{\mu L}\,, \tag{13.76}$$

$$\frac{V D^2}{\nu L} \sim \frac{1}{32}\frac{\rho^2 g D^4 H_0}{\mu^2 L^2} \ll 1\,. \tag{13.77}$$

Este requisito es más fuerte que el de casi-estacionariedad (13.75), pues el parámetro adimensional en (13.77) es del orden de $H_0 A/(D^2 L)$ veces mayor que el que aparece en (13.75), y éste es un número muy grande si el volumen del depósito es mucho mayor que el del conducto, como se ha supuesto antes. Así, pues, los requisitos de validez de la solución que se escribe a continuación son: $D/L \ll 1$, $H_0 A/(D^2 L) \gg 1$ y (13.77).

La solución de (13.73) se escribe

$$\eta = e^{-\tau} \quad \text{o} \quad H = H_0 e^{-\frac{\rho g \pi D^4}{128 \mu L A}\, t}\,. \tag{13.78}$$

Esta solución exponencial le da un significado físico adicional al tiempo característico t_o: es el tiempo necesario para que la altura del líquido en el depósito baje hasta H_0/e; es decir, para que el depósito se vacíe alrededor de un 60 %.

Una vez obtenido $H(t)$ se puede calcular $Q(t)$ de (13.68) o de (13.69):

$$Q = \frac{\rho g \pi D^4 H_0}{128 \mu L} e^{-\frac{\rho g \pi D^4}{128 \mu L A}\, t}\,. \tag{13.79}$$

Esta solución es válida si se cumplen los requisitos anteriormente comentados. Aún así, la solución valdría hasta que H se hace del orden de D, pues cuando se llega a esa altura la suposición hidrostática del depósito deja de valer. Es decir, aunque se cumplan todos los requisitos dados anteriormente, la solución (13.78)-(13.79) no describe bien la fase final de la descarga del depósito en la que $H \sim D$. Obviamente, esto resuelve la paradoja de la solución (13.78), que necesita un tiempo infinito para que H se anule.

Problemas propuestos

1. Una cinta transportadora inclinada un ángulo α se utiliza para elevar un líquido de densidad ρ y viscosidad μ (figura 13.10). Suponiendo que la velocidad de la cinta es V, que las fuerzas de viscosidad son dominantes en el movimiento del líquido y que la altura del mismo sobre la cinta es constante e igual a h, se pide:

a) Perfil de velocidad del líquido. Dibújelo y obtenga el valor de h para el cual la velocidad del líquido en la superficie libre es nula.

b) Caudal de líquido transportado por unidad de anchura de la cinta. ¿Para qué valor de h se hace cero el caudal?

c) Si la longitud y anchura de la cinta son a y b, respectivamente, ¿qué potencia hace falta para mover la cinta transportadora?

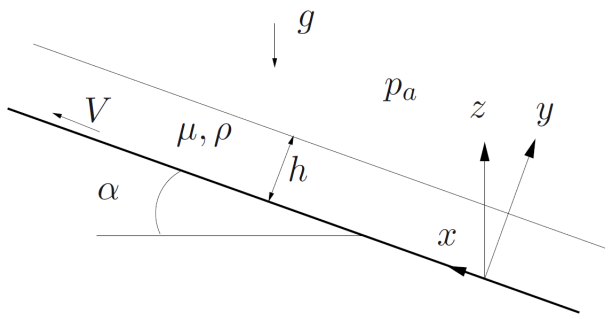


Figura 13.10

2. Por acción de la gravedad dos líquidos inmiscibles de densidades $\rho_1 > \rho_2$ y viscosidades μ_1 y μ_2 fluyen sobre un plano inclinado un ángulo α en relación a la horizontal. Suponiendo que el movimiento es unidireccional, con espesores h_1 y h_2 constantes (ver figura 13.11), se pide:

a) Perfiles de velocidad en cada película líquida en función de sus espesores h_1 y h_2.

b) Si q_1 y q_2 son los caudales de cada líquido por unidad de longitud transversal al movimiento, calculen los espesores h_1 y h_2.

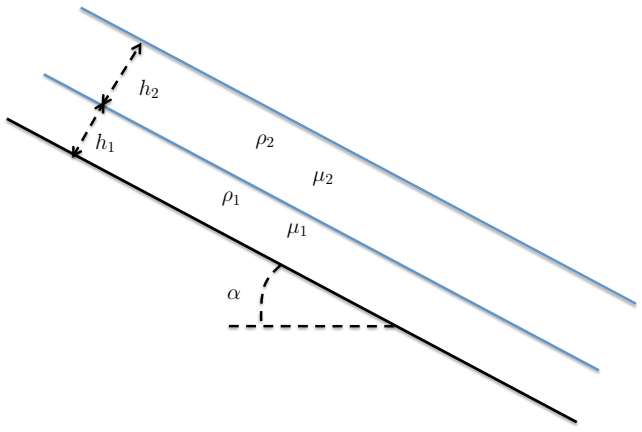


Figura 13.11

3. Para modelar el movimiento de un glaciar se considera el flujo unidireccional y estacionario sobre un plano de inclinación constante α de un fluido no newtoniano,

que verifica la siguiente relación entre el esfuerzo de fricción $\tau(\equiv \tau'_{xy})$ y el gradiente de velocidad:

$$\tau^n = \mu \frac{du}{dy},$$

donde u es la velocidad en la dirección x (única componente no nula), y es la coordenada perpendicular al plano inclinado, n es una constante y μ es otra constante que coincidiría con la viscosidad si el exponente n fuese la unidad. Suponiendo que el hielo es incompresible y, por supuesto, que las fuerzas de inercia son despreciables frente a las fuerzas viscosas, se pide:

a) Esfuerzo τ en función de y.

b) Perfil de velocidad $u(y)$. Como condición de contorno en la superficie ($y = 0$) supongan que la velocidad no es nula, sino que existe un cierto deslizamiento relacionado con el esfuerzo mediante la relación $\nu u(0) = \tau^m(0)$, donde ν es una constante y $m = (n+1)/2$.

c) Caudal por unidad de longitud.

Nota: experimentalmente se encuentra que n está entre 3 y 4.

4. Dos depósitos bidimensionales (infinitos en la dirección perpendicular al papel, ver figura 13.12) de anchura L y altura H_0, uno abierto a la atmósfera y el otro cerrado, están conectados entre sí a través de un canal bidimensional de longitud $2L$ formado por dos placas planas paralelas separadas a una distancia $h \ll L$. Inicialmente, la altura del líquido (cuya densidad es ρ y su viscosidad μ) en el depósito abierto a la atmósfera es H_0, mientras que en el cerrado es $H_0/2$, siendo la presión inicial en este último depósito la atmosférica p_a, por lo que, tras dejar pasar el líquido a través del canal, este fluye del depósito abierto al cerrado. Se pide:

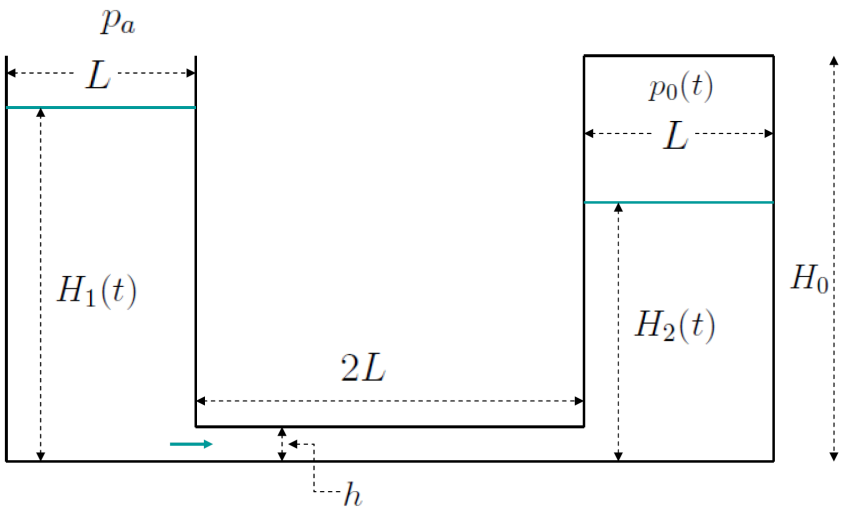


Figura 13.12

a) Escriban, en función de la altura del depósito abierto $H_1(t)$ (y, en su caso, también de su derivada temporal), la altura y presión del depósito cerrado, $H_2(t)$ y $p_0(t)$, y el

caudal por unidad de longitud transversal que circula por el canal. Supongan que el gas contenido en el depósito cerrado se comporta idealmente y que su temperatura permanece constante en todo el proceso.

b) Calculen el valor final de H_1.

c) Suponiendo que en el movimiento casi-unidireccional del líquido a través del canal las fuerzas de viscosidad son dominantes frente a las inerciales, obtengan una ecuación diferencial para $H_1(t)$.

d) Hallen $H_1(t)$ en el límite en que $p_a/(\rho g H_0) \ll 1$. Comprueben que el valor final de H_1 concuerda con el obtenido en el apartado *b*) para este límite.

e) Escriban en función de los datos del problema las condiciones que deben cumplirse para que se verifique la hipótesis hecha en el apartado *c*).

5. En el interior de una cavidad bidimensional de longitud L y altura $D \ll L$ (ver figura 13.13; es infinita en la dirección z perpendicular al papel), circula un líquido de viscosidad μ por acción de la pared inferior de la cavidad, que se mueve con velocidad constante V. Suponiendo que las fuerzas viscosas son dominantes en el movimiento casi unidireccional del líquido, se pide:

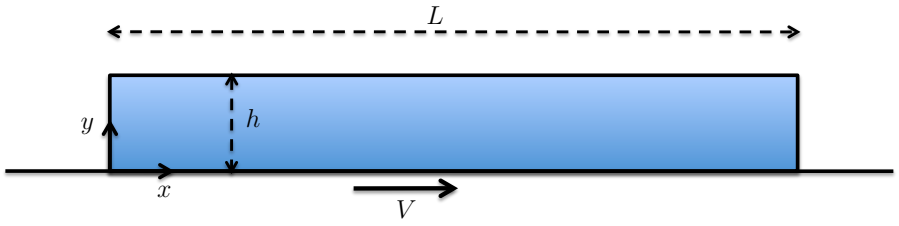


Figura 13.13

a) Perfil de la componente x de la velocidad.

b) Fuerza por unidad de longitud en la dirección z que hay que ejercer sobre la placa inferior para que se mueva con velocidad V.

c) Condiciones que se deben cumplir para que las fuerzas viscosas sean dominantes.

6. Considere un volumen V líquido de densidad ρ y viscosidad μ contenido en un manómetro en forma de U como el representado en la figura 13.14. A partir de la posición de reposo se aplica una diferencia de presiones y el líquido es forzado a moverse hacia una nueva posición de equilibrio. Suponiendo que el movimiento es con viscosidad dominante, calcular la evolución del líquido hacia la posición de equilibrio. Den también el orden de magnitud del tiempo que tarda en alcanzarse la posición de equilibrio y los criterios para que la solución anterior sea válida.

7. Para medir experimentalmente la viscosidad de un líquido se utiliza un dispositivo como el de la figura 13.15, en el cual, el líquido cuya viscosidad se quiere determinar se vierte en el depósito de sección A y se hace descargar por el conducto de diámetro D ($D^2 \ll A$) y longitud $L \gg D$. La medición experimental consiste en determinar el tiempo t_o que tarda el líquido en descender desde un cierto nivel h_1 marcado en el depósito hasta otro

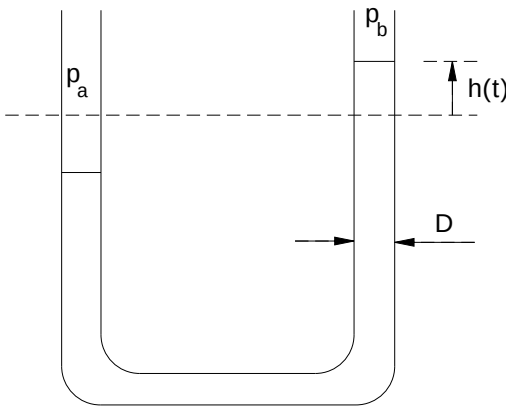


Figura 13.14

$h_2 < h_1$. Suponiendo que las fuerzas de viscosidad son dominantes en el movimiento del líquido, se pide:

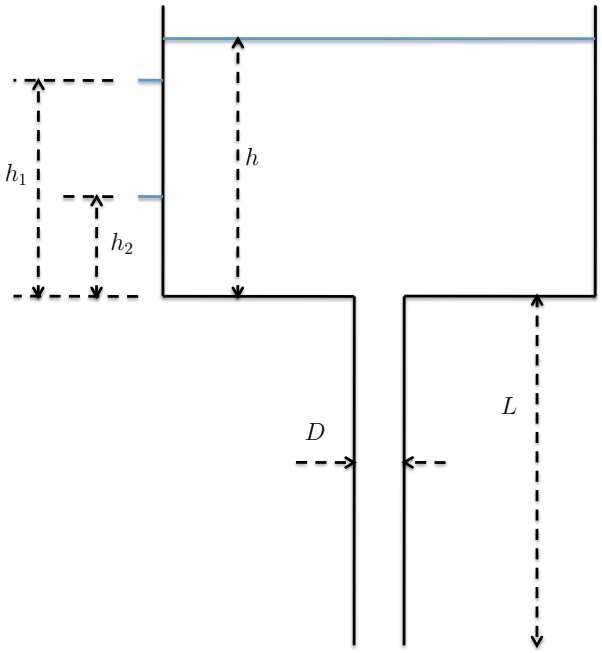


Figura 13.15

a) Viscosidad del líquido en función del valor medido t_o y de los datos.

b) ¿Qué relación debe verificar la viscosidad determinada para que el resultado de la medición sea fiable?

8. Se desea estudiar el proceso de descarga del depósito esquematizado en la figura 13.16 cuando gira con velocidad angular Ω constante. La descarga se efectúa a través de un conducto de longitud $R_e - R_o$ y diámetro $D \ll (R_e - R_o)$.

   Supongan que en el movimiento del líquido en el conducto son dominantes las fuerzas de viscosidad. Supongan también que el volumen del depósito es lo suficientemente grande

en relación al del conducto para que el movimiento del líquido en el conducto sea casi estacionario y el líquido en el depósito gire como un sólido rígido.

Se pide:

a) Ecuación de la superficie y distribución de presiones en el depósito.

b) Caudal en el conducto como función de $H(t)$.

c) Calcular $H(t)$.

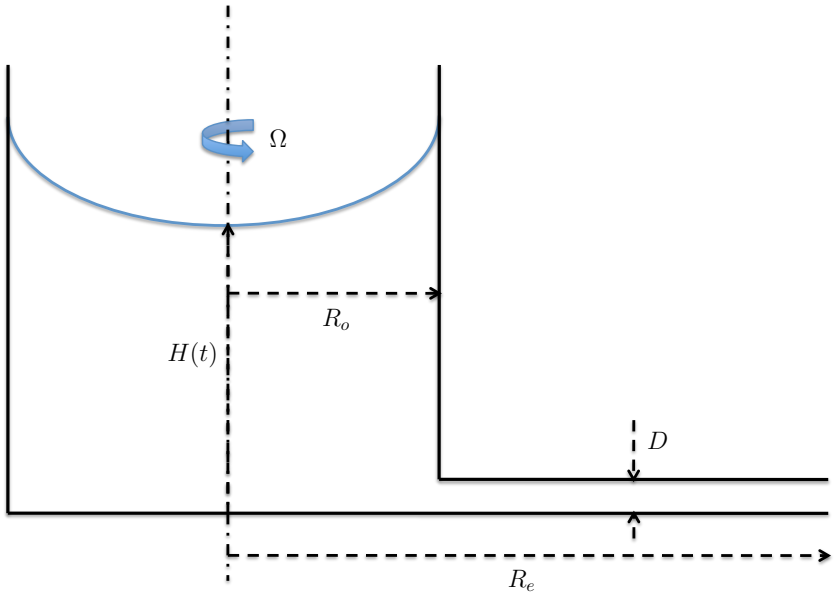


Figura 13.16

9. De un depósito de sección A sale un líquido de densidad ρ y viscosidad μ a través de un conducto de longitud L y diámetro D que tiene forma de "L"(ver figura 13.17). El conducto gira alrededor de su eje vertical con una velocidad angular constante Ω. (En la unión entre el conducto y el depósito existe un rodamiento estanco, de manera que el depósito no gira.)

   Suponiendo que las fuerzas viscosas son dominantes en el movimiento del líquido en el conducto, se pide:

   a) Altura H de la superficie del líquido en el depósito en función del tiempo. En $t = 0$, $H = H_0$.

   b) Condiciones que se deben verificar, en función de los datos del problema, para que la solución sea válida.

10. Un depósito de sección A es alimentado con un caudal constante Q_o de un líquido de densidad ρ y viscosidad μ. El depósito posee una tubería de desagüe de diámetro D y longitud $L \gg D$ (ver figura 13.18) que dispone de una válvula. Cuando la altura del líquido en el depósito es h_o, se abre la válvula de la tubería de desagüe y, manteniéndose la alimentación del depósito con el caudal constante Q_o, comienza a salir el líquido

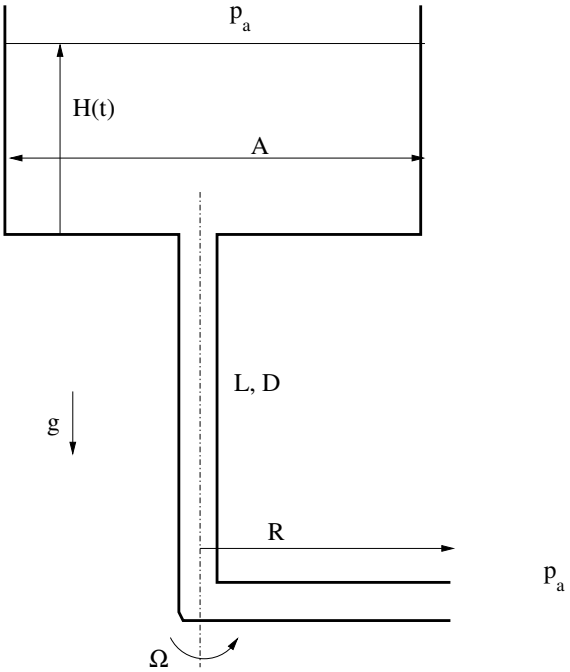


Figura 13.17

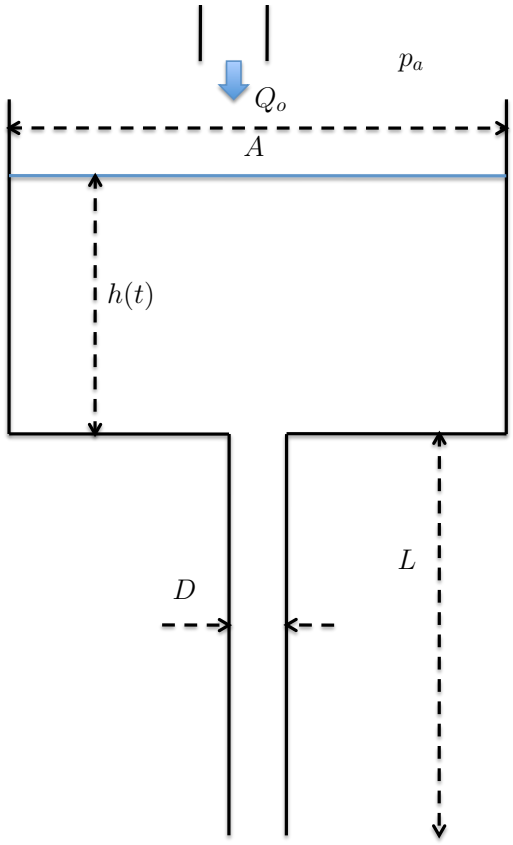


Figura 13.18

del depósito. Suponiendo que en el movimiento del líquido en el conducto de desagüe dominan las fuerzas viscosas, se pide:

a) Ecuación diferencial que determina la evolución de la altura $h(t)$ del líquido en el depósito.

b) Altura final h_f que adquiere el líquido en el depósito. ¿Qué condición debe verificar Q_o para que al final del proceso quede líquido en el depósito?

c) Integren la ecuación del apartado *a*). Escriban el orden de magnitud del tiempo que tarda en alcanzarse la altura final h_f.

d) Condiciones que se deben verificar para que, como se ha supuesto, las fuerzas viscosas sean dominantes en el movimiento. Suponiendo que el líquido es agua ($\nu = 10^{-6}$ m^2/s) y que $L = 10$ m, hagan uso de una de estas condiciones junto con la obtenida para Q_o en el apartado *b*) y den un valor límite en relación al cual el diámetro del conducto debe ser mucho menor.

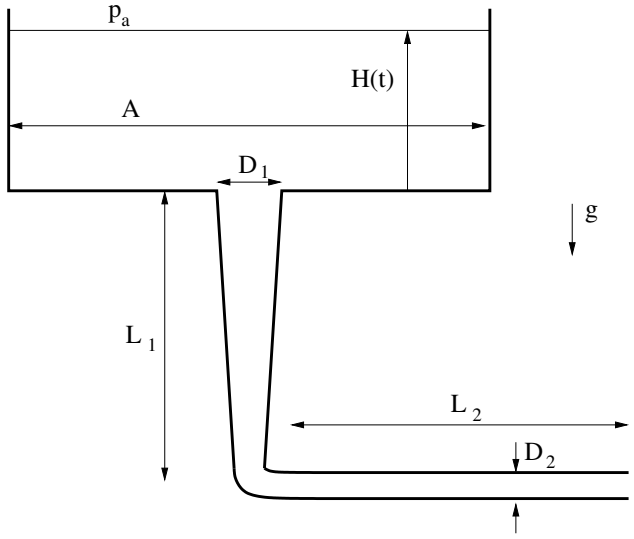


Figura 13.19

11. Un depósito de sección A que contiene un líquido de densidad ρ y viscosidad μ, inicialmente hasta una altura H_0, descarga a través de un conducto que consta de dos tramos (ver figura 13.19): uno vertical de sección variable, cuyo diámetro varía linealmente desde D_1 hasta $D_2 (< D_1)$ en una longitud $L_1 \gg D_1$, y otro horizontal de sección constante y diámetro D_2 con longitud $L_2 \gg D_2$. Suponiendo que las fuerzas viscosas son dominantes en el movimiento del líquido en el conducto, se pide:

a) Hallen la evolución temporal de la altura del líquido en el depósito, $H(t)$. Supongan despreciable la caída de presión en la unión entre los tramos del conducto comparada con la caída de presión en cada tramo.

b) Criterios que se deben cumplir, en función de los datos, para que la solución obtenida sea válida.

12. Se desea estudiar el proceso de descarga de dos líquidos inmiscibles de viscosidades μ_1 y μ_2 y densidades ρ_1 y ρ_2 a través de un conducto vertical de diámetro D y longitud l_1+l_2. El extremo superior del conducto está abierto a la atmósfera y el extremo inferior está inicialmente cerrado, ocupando el líquido 1 una altura l_1 y el líquido 2 una altura l_2 (ver figura 13.20). En $t=0$ se abre el extremo inferior del conducto y, por acción de la gravedad, comienza el proceso de descarga.

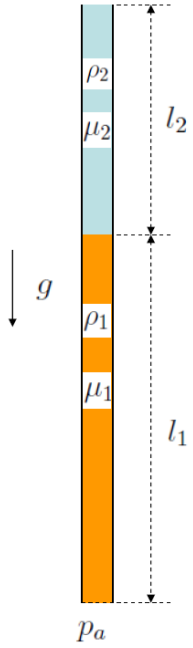


Figura 13.20

Suponiendo que las fuerzas viscosas son dominantes frente a la inercia en el movimiento de los dos líquidos (den los criterios correspondientes), obtener la evolución en el tiempo de la interfase entre los dos fluidos y de la superficie libre del líquido 2. Obtengan los tiempos de descarga de cada líquido.

13. Un conducto circular de diámetro D y longitud $L \gg D$ se encuentra en posición vertical y tiene su extremo superior tapado y el inferior abierto a la atmósfera (figura 13.21). En el interior del conducto hay un líquido de densidad ρ y viscosidad μ. Si la longitud del conducto es inferior a una cierta longitud L^*, el líquido se mantiene en el interior del cilindro por acción de la presión atmosférica. Sin embargo, si $L > L^*$ parte del líquido saldrá por el extremo inferior del conducto hasta alcanzar una nueva posición de equilibrio. Se pide:

    a) Longitud L^*. Supongan que la presión de vapor del líquido es prácticamente nula comparada con la atmosférica.

    b) Si $L > L^*$, escriban la ecuación diferencial que describe el movimiento de la superficie de separación x_s entre líquido y vapor (ver figura 13.21) en el tiempo. Supongan que las fuerzas de viscosidad son dominantes en el movimiento del líquido (den los criterios para que esto sea cierto).

    c) Integren la ecuación anterior y den el valor final de x_s.

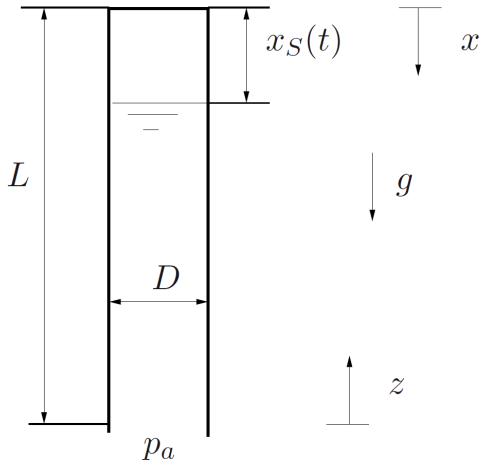


Figura 13.21

14. Un conducto de longitud L y sección circular como el indicado en la figura 13.22 está inicialmente lleno de un líquido de densidad ρ y viscosidad μ. El radio de la sección varía linealmente entre el valor mínimo R_0 y el máximo $2R_0$ ($R_0 \ll L$). En un instante determinado el líquido comienza a descargar bajo la acción de la gravedad. Estudiar el proceso de descarga en el supuesto de fuerzas de viscosidad dominantes. En particular, den los criterios matemáticos para que esto suceda y obtengan la ecuación diferencial y las condiciones de contorno que gobiernan la altura de la superficie como función del tiempo.

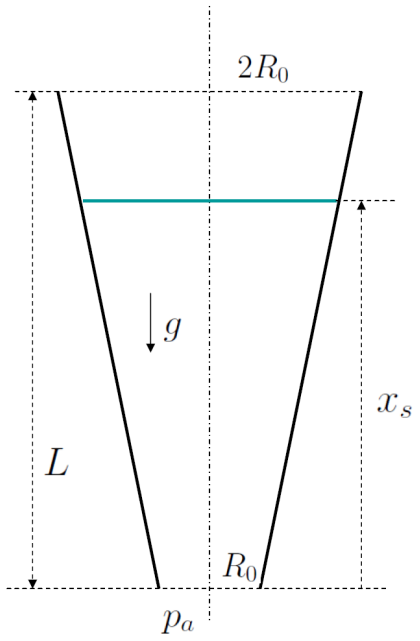


Figura 13.22

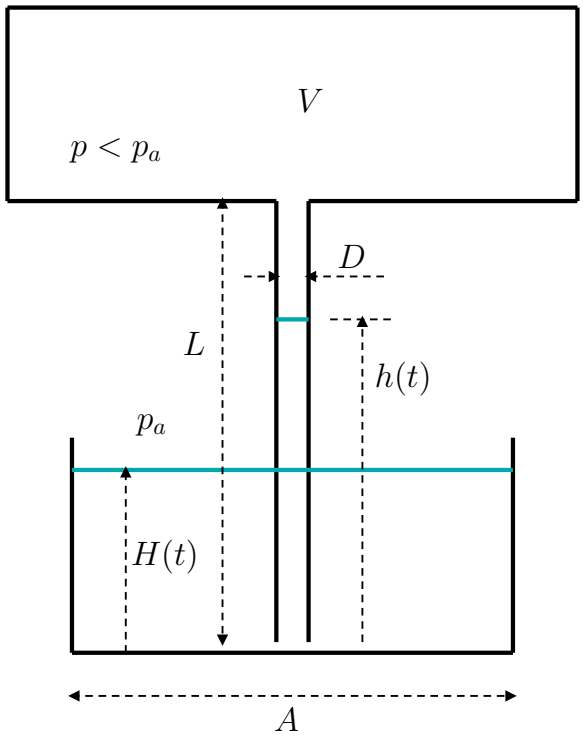


Figura 13.23

15. Un líquido de densidad ρ y viscosidad μ es succionado a través de un conducto de diámetro D y longitud L desde un depósito abierto a la atmósfera de sección A a otro depósito cerrado de volumen V (ver figura 13.23). Para que la succión sea posible, la presión en el depósito cerrado es, por supuesto, menor que la atmosférica. La altura inicial del líquido en el depósito abierto es H_0 y la presión inicial en el depósito cerrado es p_0. En el movimiento del líquido en el conducto se supone que las fuerzas de viscosidad son dominantes (den al final los criterios para que esto sea cierto). El proceso se divide en dos etapas:

    a) En una primera etapa, el líquido asciende por el conducto hasta llegar al depósito superior. Hallen la altura $h(t)$ del líquido en función del tiempo. Supongan que en esta primera etapa la altura del líquido en el depósito inferior y la presión en el depósito superior permanecen prácticamente constantes e iguales a H_0 y p_0, respectivamente. ¿Qué condición tiene que verificar p_0 para que el líquido llegue hasta el depósito superior? Interpreten físicamente esta condición. Escriban también el tiempo t_s que tarda el líquido en llegar al depósito superior.

    b) Para $t > t_s$, se va llenando el depósito de arriba. Suponiendo que en este proceso de llenado el gas contenido en el depósito superior permanece isotermo, escriban la ecuación diferencial que proporciona la disminución de la altura H con el tiempo. Resuelvan esta ecuación en el límite $AH_o \ll V$.

16. Por un conducto circular de longitud infinita y radio R circulan dos líquidos de densidades ρ_1 y ρ_2 y viscosidades μ_1 y μ_2, respectivamente, por la acción de un gradiente

de presión reducida constante p_l. El líquido 1 ocupa la región central hasta un radio R_1 y el líquido 2 la región anular restante (ver figura 13.24). Se desea averiguar bajo qué condiciones el caudal del líquido 1 es mayor que el que tendría si circulara solo por el conducto. En particular se pide:

a) Perfiles de velocidad y caudales de cada uno de los líquidos.

b) Escriban la relación entre el caudal Q_1 del líquido 1 y el caudal Q que tendría este líquido si ocupara toda la sección del conducto en función de los parámetros adimensionales $\alpha \equiv R_1/R$ y $\beta \equiv \mu_1/\mu_2$. Simplifiquen esta relación en el caso en que $\alpha = 1 - \epsilon$ con $\epsilon \ll 1$ (es decir, $R_1 = R - h$, $h/R \equiv \epsilon \ll 1$), y escriban la condición que tiene que satisfacer la relación de viscosidades β para que $Q_1 > Q$.

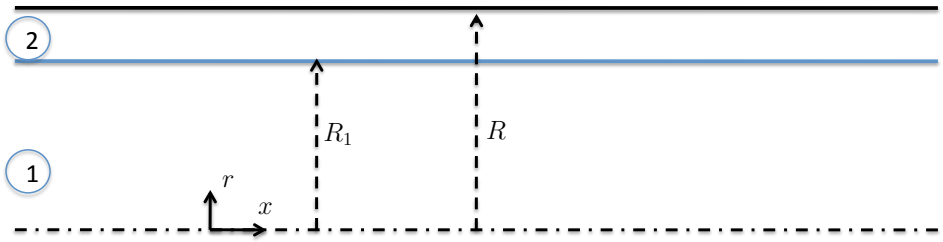


Figura 13.24

17. Se desea averiguar cómo descarga a través de un conducto de diámetro D y longitud $L \gg D$ un fluido no newtoniano cuya componente relevante del tensor de esfuerzos viscosos viene dada, en coordenadas cilíndricas (r, θ, x), siendo x la dirección a lo largo del conducto, por

$$\tau'_{xr} = -m \left(-\frac{\partial u}{\partial r} \right)^n ,$$

donde m y n son constantes conocidas y u es la componente de la velocidad según x. En particular, se pide:

a) Suponiendo que las fuerzas viscosas son dominantes, hallen la ley equivalente a la de Hagen-Poiseuille para este tipo de fluido que proporciona el caudal Q en función de p_l.

b) Evolución temporal de $l(t)$ suponiendo que $l(0) = L$ (ver figura 13.25).

18. Se desea conocer cómo descarga un fluido no newtoniano del tipo de *Plástico de Bingham* a través de un conducto vertical de sección circular de radio R y longitud $L \gg R$. Este tipo de fluido se comporta como Newtoniano por encima de un cierto esfuerzo umbral τ_0, de forma que la componente relevante del tensor de esfuerzos para nuestro problema es

$$\tau'_{xr} = -\tau_0 + \mu \frac{\partial u}{\partial r} , \tag{13.80}$$

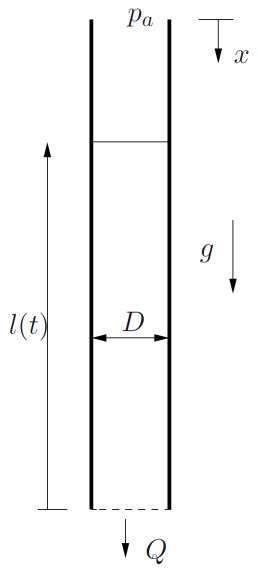


Figura 13.25

donde u es la única componente de la velocidad ($\vec{v} = u\vec{e}_x$) y μ es la viscosidad. Para $|\tau'_{xr}| > \tau_0$, el fluido *fluye* de acuerdo con el esfuerzo (13.80), mientras que para $|\tau'_{xr}| < \tau_0$, se tiene $\partial u/\partial r = 0$. En el presente flujo en el conducto, esto quiere decir que, si R es suficientemente grande, el perfil de velocidad es constante para $r < r_0$ (ver detalle en la figura 13.26), donde r_0 es un radio que depende de τ_0. Suponiendo flujo unidireccional, se pide:

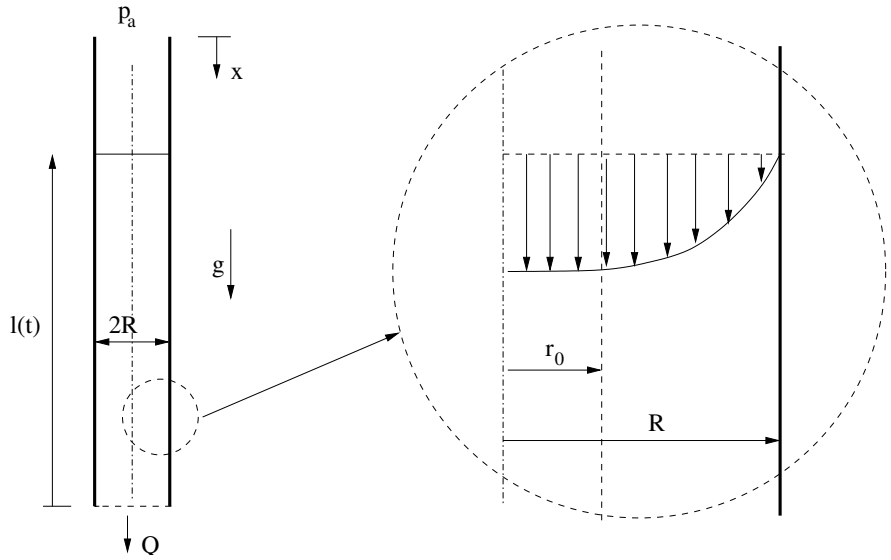


Figura 13.26

a) Distribución radial del esfuerzo, $\tau'_{xr}(r)$. Para ello escriban la ecuación de cantidad de movimiento en la dirección x y sustituyan $p_l \equiv -\partial(p + \rho g z)/\partial x$ por su correspondiente valor en este problema (ρ es la densidad constante del fluido y g es la aceleración de la gravedad).

b) Valor de r_0. ¿Cuál es el mínimo radio R, en función de τ_0, ρ y g, para que el fluido *fluya* conducto abajo?

c) Perfil de velocidad $u(r)$.

d) Caudal Q.

e) Posición $l(t)$ de la superficie libre en función del tiempo.

19. Cuando la temperatura atmosférica es muy baja, es posible transportar petróleo crudo a través de un oleoducto con una caída de presión aceptable debido a que el calor generado por la disipación viscosa disminuye considerablemente la viscosidad (la figura 13.27 muestra la viscosidad μ en función de la temperatura). Suponiendo que el flujo es laminar e incompresible (Poiseuille), que la temperatura es constante transversalmente en el conducto de diámetro D, y que la pérdida de calor q a través de las paredes del conducto hacia el exterior, por unidad de longitud del conducto, se puede aproximar mediante la fórmula

$$q = k(T - T_a)\pi D\,, \tag{13.81}$$

donde T es la temperatura media del crudo y T_a es la temperatura ambiente, se pide:

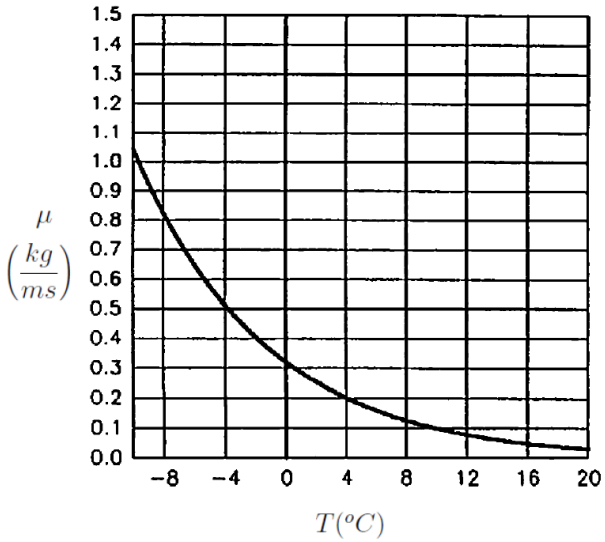


Figura 13.27

a) Calcular la función de disipación viscosa $\Phi(r)$ suponiendo que el caudal que circula por el oleoducto es Q.

b) Determinen la energía disipada por unidad de tiempo y longitud del conducto.

c) Para que el flujo sea independiente de la coordenada axial como se ha supuesto, la energía disipada debe ser transferida al medio circundante. La condición de que este flujo tiene que ser igual a (13.81) proporciona una relación entre la viscosidad del crudo y la temperatura T (dados D y Q; ver datos). Dibuje esta relación en la figura y encuentre la temperatura T y la viscosidad μ.

d) Halle la caída de presión por unidad de longitud.

DATOS: $Q = 2{,}4$ m^3/s, $D = 1$ m, $T_a = -40^o$C, $k = 0{,}8$ W/(m^2 K).

20. Se desea estudiar el proceso de expulsión de un fluido no newtoniano (un alquitrán, por ejemplo) a través de un conducto empujado por un fluido newtoniano (agua, por ejemplo). Para ello supongan una configuración como la de la figura 13.28, en la que un conducto horizontal de radio R sale de un depósito que contiene agua (el fluido newtoniano, de viscosidad μ y densidad ρ) a presión, de forma que la presión a la entrada del conducto permanece constante e igual a $p_0 > p_a$. En un cierto instante t, el agua llega hasta una sección x del conducto, mientras que el fluido no newtoniano ocupa la región del tubo entre esa sección y la sección $x + l$ del conducto (ver figura 13.28; más allá de $x + l$ el conducto contiene aire, cuya fricción con el tubo es despreciable). Inicialmente, $x(t = 0) = x_0$. ($x_0, l \gg R$.) Suponiendo que las fuerzas de fricción viscosa dominan el movimiento de ambos fluidos y que el no newtoniano obedece a una ley de esfuerzos del tipo

$$\tau'_{xr} = (-\eta) \left(-\frac{\partial u}{\partial r} \right)^n , \tag{13.82}$$

donde η y n son constantes, se pide:

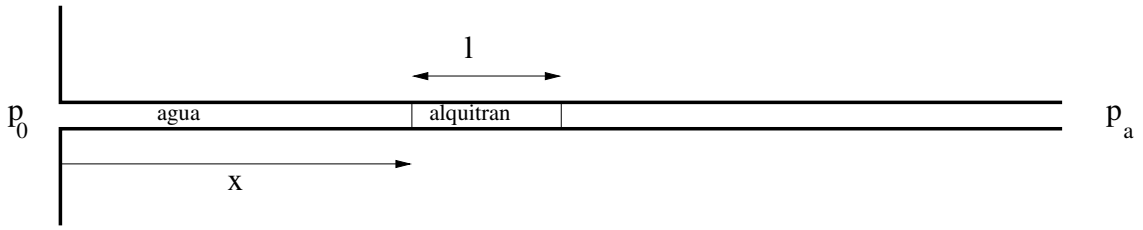


Figura 13.28

a) Hallar el equivalente a la Ley de Hagen-Poiseuille (relación entre el caudal Q y el gradiente de la presión p_l) para el fluido no newtoniano. Por simplicidad, supongan que $n = 1/2$ en (13.82). Utilicen también el radio del conducto, R, en vez de su diámetro.

b) Ecuación diferencial que gobierna el avance del alquitrán, $x(t)$.

21. Para obtener la viscosidad de un líquido de densidad ρ mediante un viscosímetro de disco y plato se coloca una capa del líquido de espesor h sobre el plato y se hace girar sobre ella un disco de radio R con una velocidad angular Ω constante (ver figura 13.29). La medida del par necesario para hacer girar el disco proporciona la viscosidad μ si todas las demás magnitudes son conocidas. Suponiendo que el movimiento del líquido debajo del disco es prácticamente circunferencial, $\vec{v} = u\vec{e}_\theta$, se pide:

a) Perfil de velocidad $u(r, z)$.

b) Par P necesario para hacer girar el disco y, por tanto, viscosidad del líquido si P es medido.

c) Distribución de presión $p(r, z)$ debajo del disco (desprecien la contribución de la gravedad).

d) ¿Cuál es la velocidad angular máxima, Ω_{max}, para que el líquido no cavite debajo del disco? Desprecien la presión de vapor del líquido frente a la atmosférica.

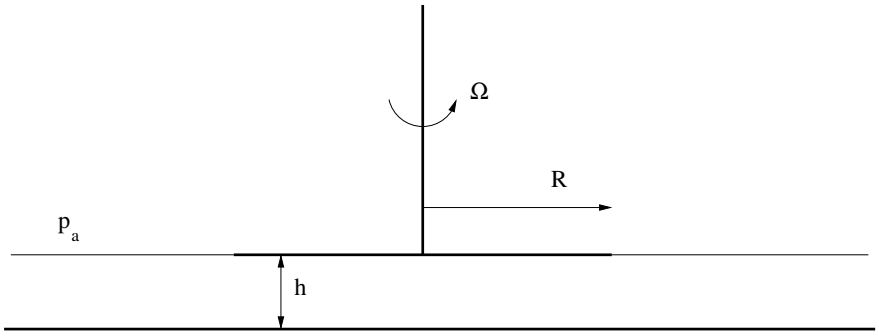


Figura 13.29

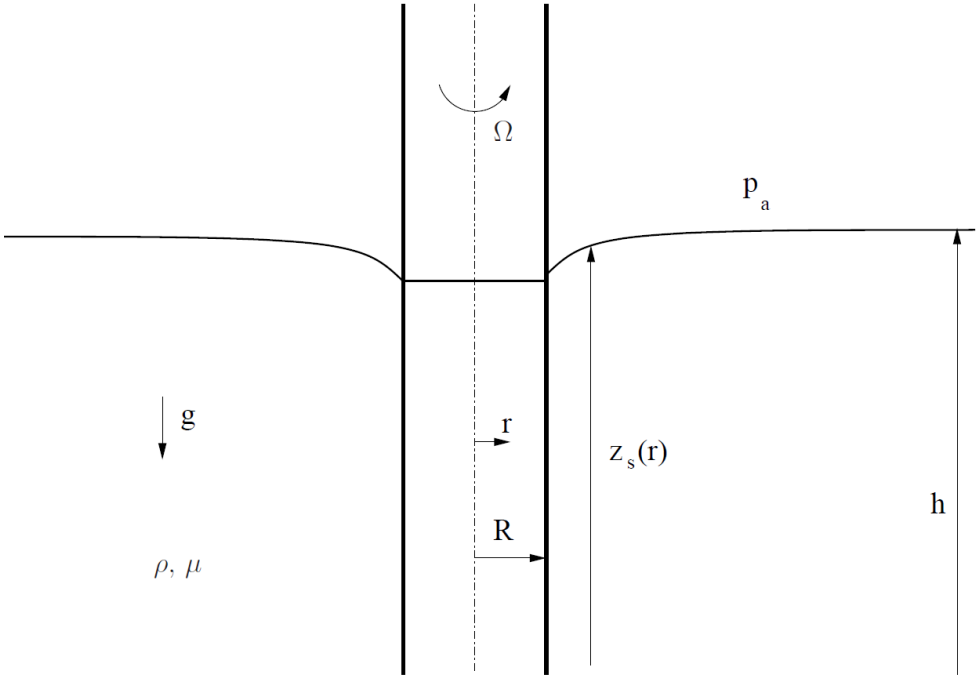


Figura 13.30

22. Un cilindro vertical de radio R, inmerso hasta una profundidad h en un líquido de densidad ρ y viscosidad μ, gira alrededor de su eje con velocidad angular Ω, produciendo un movimiento giratorio en el líquido. Suponiendo que este movimiento es puramente circunferencial, $\vec{v} = u\vec{e}_\theta$, y que se ha llegado a un estado estacionario, se pide:

   a) Forma que adquiere la superficie libre del líquido $z = z_s(r)$ (ver figura 13.30).

   b) Par necesario para hacer girar el cilindro (obviamente teniendo en cuenta solo la fricción con el líquido, despreciando la del aire de la parte superior).

23. Se desea averiguar la forma $Z(r)$ de la superficie libre de un líquido cuando éste gira con una cierta velocidad. En particular, supongan que el movimiento del líquido es puramente circunferencial, $\vec{v} = u(r)\vec{e}_\theta$, con $u(r)$ dado por un vórtice de Rankine,

$$u(r) = \begin{cases} K/r\,, & r \geq R\,, \\ (Kr)/R^2\,, & r < R\,, \end{cases}$$

donde K es una constante ($K = \Gamma/2\pi$, siendo Γ la circulación lejos del eje de giro). Calculen el campo de presión $p(r, z)$ y la forma de la superficie libre $Z(r)$.

24. Un vórtice o torbellino de Burgers tiene un campo de velocidad en coordenadas cilíndricas (r, θ, z) de la forma:

$$\vec{v} = -\frac{\alpha}{2} r\vec{e}_r + f(r)\vec{e}_\theta + \alpha z\vec{e}_z\,,$$

donde α es una constante conocida y $f(r)$, la componente azimutal de la velocidad, es una función que se deberá determinar junto con el campo de presiones $p(r, z)$. Para ello procedan de la siguiente forma:

a) Comprueben en primer lugar que se trata de un movimiento incompresible y hallen la función de corriente.

b) Suponiendo que la viscosidad es constante, escriban la componente según la coordenada θ de la ecuación de cantidad de movimiento y resuelvan la ecuación diferencial resultante para $f(r)$. Supongan que la circulación para $r \to \infty$ es Γ.

c) Escriban las otras dos componentes de la ecuación de cantidad de movimiento y hallen la dependencia según r y z de la presión.

d) Calculen la vorticidad.

CAPÍTULO 14

Movimiento alrededor de cuerpos con número de Reynolds pequeño

14.1. Ecuaciones de Stokes

En esta lección se considerará el flujo de un fluido incompresible [i.e., se verifican las condiciones (9.27) y (9.31)] alrededor de cuerpos cuando las fuerzas de viscosidad son dominantes frente a las de inercia.

En general, las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento y las condiciones iniciales y de contorno que gobiernan el movimiento de un fluido incompresible alrededor de un cuerpo definido por la superficie $S(\vec{x},t)=0$, referidas a unos ejes que se mueven con él, son (ver figura 14.1):

$$\nabla\cdot\vec{v}=0\,, \tag{14.1}$$

$$\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\rho\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}=-\nabla p+\mu\nabla^2\vec{v}+\rho(\vec{g}-\vec{a_o})\,,\quad \vec{g}=-g\vec{e}_z\,; \tag{14.2}$$

$$t=0\,,\quad \vec{v}=\vec{v}_o\,;\quad |\vec{x}|\to\infty\,,\quad \vec{v}=\vec{V}_\infty\,,\quad p=p_{\infty,o}-\rho g z\,; \tag{14.3}$$

$$S(\vec{x},t)=0\,,\quad \vec{v}=\vec{\Omega}\wedge\vec{x}\,; \tag{14.4}$$

donde se ha supuesto que la viscosidad permanece constante (variaciones de temperatura poco importantes). Lejos del cuerpo, el fluido se mueve con velocidad $\vec{V}_\infty$ en relación a los ejes ligados a él, siendo $\vec{a}_o=-d\vec{V}_\infty/dt$ la aceleración de este sistema de referencia con respecto a uno inercial en el que el fluido *no perturbado* por el cuerpo está en reposo o se mueve con velocidad uniforme; como consecuencia, la distribución de presión lejos del cuerpo es la hidrostática, donde $p_{\infty,o}$ es una constante. Sobre la superficie, la velocidad es $\vec{\Omega}\wedge\vec{x}$, donde $\vec{\Omega}(t)$ es la velocidad angular de giro del cuerpo (los ejes, aunque móviles con el cuerpo, se mueven paralelamente a sí mismos).

Es conveniente descomponer la presión en dos sumandos, uno correspondiente a la presión hidrostática y el otro a las variaciones de presión generadas por el movimiento, lo cual se

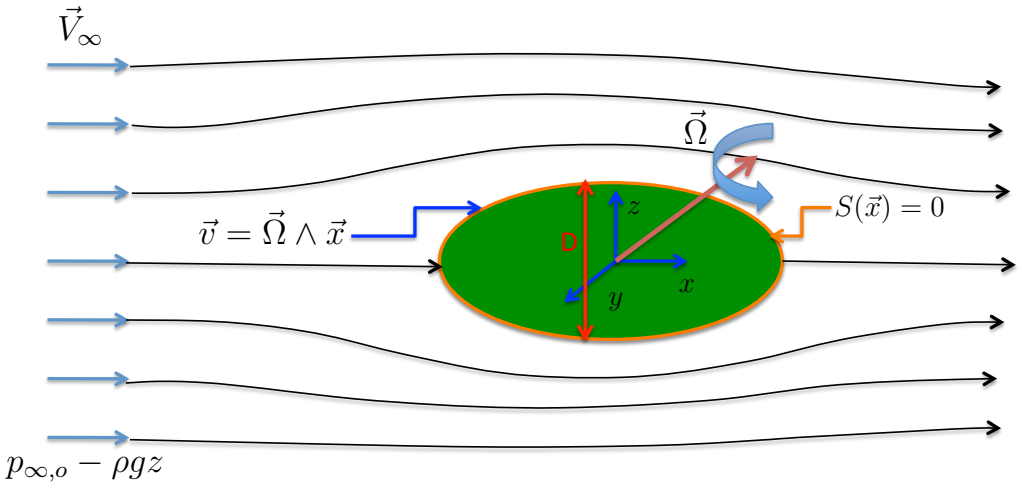


Figura 14.1: Movimiento fluido alrededor de un cuerpo.

puede hacer debido a que la ecuación de cantidad de movimiento es lineal en relación a la presión. Es decir, definimos

$$p \equiv p_h + p_d \,, \tag{14.5}$$

donde

$$-\nabla p_h + \rho \vec{g} = 0 \tag{14.6}$$

y

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla p_d + \mu \nabla^2 \vec{v} + \rho \frac{d\vec{V}_\infty}{dt} \,, \tag{14.7}$$

cuya suma es (14.3). Consecuentemente,

$$p_h = p_{\infty,o} - \rho g z \,, \tag{14.8}$$

y la fuerza debida a la presión que el fluido ejerce sobre el cuerpo se descompone en la fuerza de flotabilidad de Arquímedes (sección 11.4) y la resistencia de presión (también llamada de forma, ver lección 19) originada por el movimiento del fluido:

$$\vec{F}_p = -\int_s p_h \vec{n} ds - \int_s p_d \vec{n} ds = -\rho \vec{g} V - \int_s p_d \vec{n} ds \,, \tag{14.9}$$

donde V es el volumen del cuerpo y $\vec{n}$ es la normal hacia fuera de S. La fuerza total que el fluido ejerce sobre el cuerpo es suma de (14.9) y la fuerza de fricción viscosa:

$$\vec{F} = \vec{F}_f + \vec{F}_p = \int_S \overline{\overline{\tau}}' \cdot \vec{n} ds - \rho \vec{g} V - \int_S p_d \vec{n} ds \,; \tag{14.10}$$

la fuerza *puramente* de resistencia, que se opone al movimiento del cuerpo, es:

$$\vec{F}_r = \int_s \overline{\overline{\tau}}' \cdot \vec{n} ds - \int_s p_d \vec{n} ds \,. \tag{14.11}$$

En el límite en que

$$Re = \frac{\rho D V_\infty}{\mu} \ll 1\,, \quad ReSt = \frac{\rho D V_\infty}{\mu}\frac{D}{V_\infty t_o} = \frac{\rho D^2}{\mu t_o} \ll 1\,, \tag{14.12}$$

donde D es una longitud característica del cuerpo y t_o un tiempo característico (de variación de V_∞ y/o Ω), los términos $\rho\partial\vec{v}/\partial t$, $\rho\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}$ y $\rho d\vec{V}_\infty/dt$ son despreciables frente al término viscoso $\mu\nabla^2\vec{v}$, y el problema viene gobernado, en primera aproximación, por:

$$\nabla\cdot\vec{v} = 0\,, \tag{14.13}$$

$$-\nabla p_d + \mu\nabla^2\vec{v} = 0\,, \tag{14.14}$$

$$|\vec{x}| \to \infty\,, \quad \vec{v} = \vec{V}_\infty\,, \quad p_d = 0\,, \tag{14.15}$$

$$S(\vec{x},t) = 0\,, \quad \vec{v} = \vec{\Omega}\wedge\vec{x}\,. \tag{14.16}$$

Las ecuaciones (14.13)-(14.14), que son el límite de las ecuaciones de Navier-Stokes para movimientos *lentos* o *reptantes,* se suelen denominar ecuaciones de Stokes, quien resolvió este problema para el movimiento alrededor de una esfera que se mueve con velocidad constante V_∞ (sin giro) en 1851 (ver sección siguiente). Obsérvese que aunque estas ecuaciones son análogas a las consideradas en las lecciones precedentes, allí los términos convectivos eran despreciables debido, principalmente, a la casi unidireccionalidad del movimiento, mientras que aquí el movimiento es esencialmente *tridimensional* [compárese las condiciones (14.12) con, por ejemplo, (13.14)-(13.15)].

Las ecuaciones de Stokes se suelen escribir separando p_d y $\vec{v}$. Para ello se tiene en cuenta que [ecuación (2.64)]

$$\nabla^2\vec{v} = \nabla(\nabla\cdot\vec{v}) - \nabla\wedge(\nabla\wedge\vec{v}) = -\nabla\wedge(\nabla\wedge\vec{v})\,, \tag{14.17}$$

donde se ha hecho uso de (14.13). Por tanto, (14.14) se puede escribir

$$\nabla p_d + \mu\nabla\wedge\nabla\wedge\vec{v} = 0\,. \tag{14.18}$$

Tomando la divergencia de esta ecuación,

$$\nabla^2 p_d = 0\,, \tag{14.19}$$

mientras que tomando el rotacional

$$\nabla\wedge\nabla\wedge\nabla\wedge\vec{v} = 0 \qquad \text{o} \qquad \nabla\wedge\nabla\wedge\vec{\omega} = -\nabla^2\vec{\omega} = 0\,, \tag{14.20}$$

que son dos ecuaciones donde la presión y la velocidad (o la vorticidad) entran por separado [en (14.20) se ha hecho uso de $\nabla\cdot\vec{\omega} \equiv \nabla\cdot(\nabla\wedge\vec{v}) = 0$]. Obsérvese que en ambos casos el problema se reduce a resolver una ecuación de Laplace. Normalmente se resuelve (14.20), puesto que las condiciones de contorno suelen venir expresadas en términos de la velocidad; una vez obtenida $\vec{v}$, se sustituye en (14.14) y se obtiene la distribución de presión. En algunos problemas, sin embargo, las condiciones de contorno se expresan más fácilmente en términos de la presión, por lo que se procede a la inversa: se resuelve (14.19) y se sustituye en (14.14) para obtener $\vec{v}$. En cuanto a las condiciones de contorno, éstas se pueden tratar por separado basándose en la linealidad del problema, que admite superposición. Por ejemplo, el problema

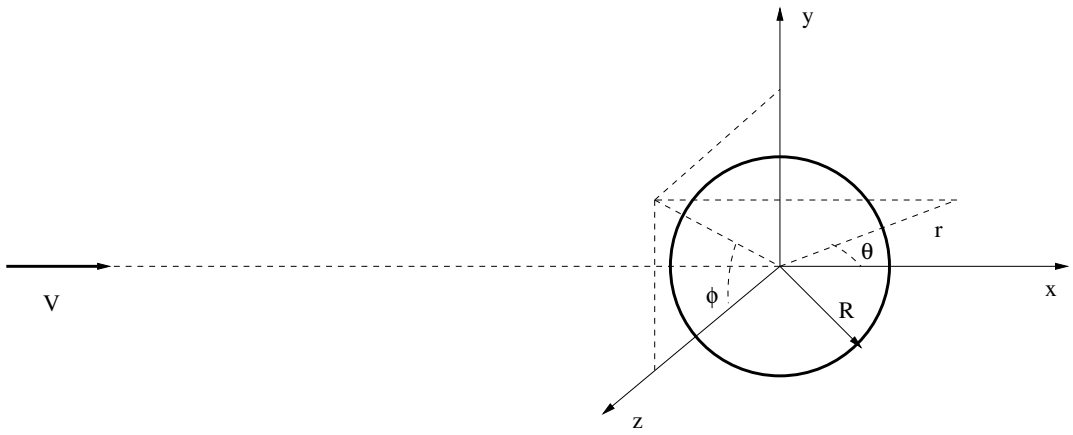


Figura 14.2: Coordenadas en el flujo alrededor de una esfera.

(14.13)-(14.16) se puede resolver definiendo $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, donde $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ satisfacen las ecuaciones de Stokes (17.13)-(17.14), y las condiciones de contorno son

$$|\vec{x}| \to \infty\,, \quad \vec{v}_1 = \vec{V}_\infty\,; \quad S(\vec{x},t) = 0\,, \quad \vec{v}_1 = 0\,; \tag{14.21}$$

$$|\vec{x}| \to \infty\,, \quad \vec{v}_2 = \vec{0}\,; \quad S(\vec{x},t) = 0\,, \quad \vec{v}_2 = \vec{\Omega} \wedge \vec{x}\,. \tag{14.22}$$

Esto permite obtener soluciones de movimientos complejos sin más que sumar soluciones de problemas más sencillos.

14.2. Movimiento alrededor de una esfera. Ley de Stokes

Consideremos el flujo con viscosidad dominante alrededor de una esfera de radio R que se mueve con velocidad constante V en la dirección $-\vec{e}_x$ (o la esfera está fija y sobre ella pasa una corriente que en $|x| \to \infty$ vale $V\vec{e}_x$). De acuerdo con lo visto anteriormente, el problema a resolver es:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0\,, \quad \nabla \wedge \nabla \wedge \nabla \wedge \vec{v} = 0 \quad (\text{o} \quad \nabla^2 \vec{\omega} = 0\,)\,, \tag{14.23}$$

$$|\vec{x}| \to \infty\,, \quad \vec{v} = V\vec{e}_x\,; \quad |\vec{x}| = R\,, \quad \vec{v} = 0\,. \tag{14.24}$$

Obviamente, este problema se resuelve más fácilmente en coordenadas esféricas (r, θ, φ) (ver figura 14.2). Como el movimiento tiene simetría con respecto al eje x (nada depende de la coordenada azimutal φ siendo, además, $v_\varphi = 0$), es posible escribir $\vec{v}$ en términos de una función de corriente ψ (ver sección 3.7):

$$\vec{v} \equiv \nabla \wedge \left(\frac{\psi}{r \sin\theta}\vec{e}_\varphi\right), \tag{14.25}$$

de donde

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\,, \quad v_\theta = -\frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial \psi}{\partial r}\,; \tag{14.26}$$

de esta forma, la ecuación de continuidad,

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta v_\theta) = 0\,, \tag{14.27}$$

se satisface automáticamente. Obsérvese que la definición de la función de corriente no es única. La elección dada por (14.26) se suele denominar **función de corriente de Stokes.** En términos de ψ, el vector vorticidad se escribe

$$\vec{\omega} = \nabla \wedge \vec{v} = \nabla \wedge (\nabla \wedge \psi \vec{e}_\varphi) = -\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)\right]\vec{e}_\varphi\,, \tag{14.28}$$

que solo tiene componente según $\vec{e}_\varphi$. Consecuentemente, la ecuación de cantidad de movimiento $\nabla^2\vec{\omega} = 0$ se convierte en la siguiente ecuación escalar para ψ:

$$E^2(E^2\psi) = 0\,, \quad E^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\,, \tag{14.29}$$

que es una ecuación en derivadas parciales de cuarto orden.

En coordenadas esféricas, las condiciones de contorno (14.24) se escriben

$$r = R\,, \quad v_r = v_\theta = 0\,, \tag{14.30}$$

$$r \to \infty\,, \quad v_r \to V\cos\theta\,, \quad v_\theta \to -V\sin\theta\,, \tag{14.31}$$

que proporcionan las siguientes condiciones de contorno para ψ:

$$r = R\,, \quad \frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{\partial\psi}{\partial\theta} = 0\,, \tag{14.32}$$

$$r \to \infty\,, \quad \psi \to \frac{V}{2}r^2\sin^2\theta + \text{constante}\,. \tag{14.33}$$

Tenemos, pues, tres condiciones de contorno, siendo la ecuación (14.29) de cuarto orden, lo cual es una consecuencia de que al utilizar la función de corriente se ha introducido una derivada más. Sin embargo, por la misma razón, para hallar $\vec{v}$, cualquier constante aditiva de ψ es irrelevante, por lo que podemos hacer la constante que aparece en (14.33) igual a cero, y el problema ya tiene el número correcto de condiciones de contorno.

Este problema admite separación de variables: Sugerido por (14.33), donde aparece la única dependencia de las condiciones de contorno en θ, escribimos

$$\psi(r,\theta) = f(r)\sin^2\theta\,, \tag{14.34}$$

que sustituido en (14.29) y (14.32)-(14.33) proporciona

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r^2}\right)\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r^2}\right)f = 0\,, \tag{14.35}$$

$$r = R\,, \quad f = \frac{df}{dr} = 0\,; \quad r \to \infty\,, \quad f \to Vr^2/2\,. \tag{14.36}$$

La ecuación del tipo denominado de Euler (14.35) admite soluciones potenciales para r. En efecto, ensayando la solución $f \sim r^n$, se encuentra que admite los valores $n = 2, -1, 4$ y 1. Así, la solución general de (14.35) es

$$f = A_1 r^2 + \frac{A_2}{r} + A_3 r^4 + A_4 r\,, \tag{14.37}$$

donde las $A_i, i = 1, 2, 3, 4$, son constantes arbitrarias. Para que la dependencia de $f(r)$ cuando $r \to \infty$ sea de la forma $f \sim r^2$, A_3 tiene que ser nula. Las otras tres constantes se calculan de las condiciones (14.36), obteniéndose

$$\psi = \frac{VR^2}{2}\left[\frac{r^2}{R^2} + \frac{1}{2}\frac{R}{r} - \frac{3}{2}\frac{r}{R}\right]\sin^2\theta\,, \tag{14.38}$$

de donde

$$v_r = \left[1 + \frac{1}{2}\frac{R^3}{r^3} - \frac{3}{2}\frac{R}{r}\right]V\cos\theta\,, \quad v_\theta = -\left[1 - \frac{1}{4}\frac{R^3}{r^3} - \frac{3}{4}\frac{R}{r}\right]V\sin\theta\,. \tag{14.39}$$

Por otra parte, sustituyendo en

$$\nabla p_d = \mu\nabla^2\vec{v}\,; \quad r \to \infty\,, \quad p_d \to 0\,, \tag{14.40}$$

se llega a

$$p_d = -\frac{3\mu V R\cos\theta}{2r^2}\,. \tag{14.41}$$

La fuerza de resistencia que el fluido ejerce sobre la esfera tiene la dirección del movimiento y, obviamente, se opone a él: $\vec{F}_r = F_r\vec{e}_x$,

$$F_r = 2\pi\int_o^\pi [(-p_d + \tau'_{rr})\cos\theta - \tau'_{r\theta}\sin\theta]_{r=R}R^2\sin\theta d\theta\,. \tag{14.42}$$

Sustituyendo

$$(\tau'_{rr})_{r=R} = 2\mu\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)_{r=R} = 0\,, \tag{14.43}$$

$$(\tau'_{r\theta})_{r=R} = \mu\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right]_{r=R} = -\frac{3\mu V\sin\theta}{R}\,, \tag{14.44}$$

y (14.41) en (14.42) se obtiene

$$F_r = 6\pi\mu V R\,, \tag{14.45}$$

que es conocida como la **Ley de Stokes** para la fuerza de resistencia de una esfera a bajos números de Reynolds. Se observa que la fricción viscosa $\tau'_{r\theta}$ es responsable de 2/3 de la resistencia, mientras que las fuerzas de presión son responsables del tercio restante. Experimentalmente se encuentra que esta ley es aproximadamente válida incluso hasta $Re \simeq 1$ (ver figura 14.3 más abajo). Esta ley se suele escribir en forma adimensional en términos del coeficiente de resistencia,

$$C_D \equiv \frac{F_r}{\frac{1}{2}\rho V^2\pi R^2}\,, \tag{14.46}$$

de forma que,

$$C_D = \frac{24}{Re}\,, \tag{14.47}$$

donde

$$Re = \frac{2RV\rho}{\mu}\,. \tag{14.48}$$

A la fuerza de resistencia anterior hay que añadir la fuerza de flotabilidad de Arquímedes, que actúa en dirección opuesta a la gravedad $\vec{F}_h = (\rho g 4\pi R^3/3)\vec{e}_z$. Un problema práctico de cierta relevancia es la **sedimentación** de partículas (más o menos) esféricas. En este caso, a la fuerza de la gravedad que hace caer a la partícula, $-(\rho_p g 4\pi R^3/3)\vec{e}_z$, donde ρ_p es la densidad de la partícula, se le oponen la fuerza de Arquímedes y la fuerza de resistencia fluidomecánica, que viene dada por la Ley de Stokes (14.45) si se verifican las condiciones (14.12). La ecuación que gobierna la velocidad de sedimentación de la partícula, $-V\vec{e}_z$, es:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_p \frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi R^3(\rho_p - \rho)g - 6\pi\mu V R\,. \tag{14.49}$$

Obsérvese que aunque en este caso $V = V(t)$, si se cumple que $\rho R^2/\mu t_o \ll 1$, donde t_o es un tiempo característico de variación de V (ver más adelante), la fuerza de resistencia dada por la Ley de Stokes sigue siendo aproximadamente válida. Se llama **velocidad terminal** a la velocidad constante que se alcanza cuando las fuerzas que ejerce el fluido sobre la partícula igualan al peso de la misma:

$$\frac{4}{3}\pi R^3(\rho_p - \rho)g - 6\pi\mu V_t R = 0\,, \quad V_t = \frac{2(\rho_p - \rho)R^2 g}{9\mu}\,. \tag{14.50}$$

La determinación experimental de esta velocidad terminal, que es válida independientemente de la duración t_o del transitorio, siempre que las fuerzas viscosas dominen en el movimiento alrededor de la esfera, será el objeto de la práctica de laboratorio que se describe a continuación de esta lección. Su medición constituye también un procedimiento usado frecuentemente para determinar la viscosidad de un líquido (viscosímetro de 'bola').

Definiendo las variables adimensionales

$$v = \frac{V}{V_t}\,, \quad \tau = \frac{t}{t_o}\,, \tag{14.51}$$

si la partícula parte del reposo, el problema queda

$$\frac{2\rho_p R^2}{9\mu t_o}\frac{dv}{d\tau} = 1 - v\,, \quad v(\tau = 0) = 0\,. \tag{14.52}$$

Definiendo

$$t_o = \frac{2\rho_p R^2}{9\mu}\,, \tag{14.53}$$

todos los términos son del orden unidad, por lo que $t_o \sim \rho_p R^2/\mu$. Esto nos dice que (14.49) [o (14.52)] es válida, de acuerdo con la condición $t_o \gg \rho R^2/\mu$, si $\rho_p \gg \rho$. La solución es

$$v = 1 - e^{-\tau}\,, \tag{14.54}$$

de forma que cuando $t = t_o = 2\rho_p R^2/9\mu$ ($\tau = 1$), v ha alcanzado el sesenta por ciento de su valor final ($v = 1, V = V_t$), aproximadamente. Si $\rho_p \sim \rho$, o $\rho_p < O(\rho)$, la solución anterior no es válida puesto que la Ley de Stokes deja de ser válida. Para hallar la fuerza de resistencia habría que resolver la ecuación de cantidad de movimiento reteniendo la aceleración local, $\rho\partial\vec{v}/\partial t$, y la fuerza de inercia asociada a la aceleración del sistema de referencia, $-\rho d\vec{V}/dt$ [ecuación (14.7); por supuesto, se supone que $Re \ll 1$ para que el término convectivo no

cuente]. Como el problema es lineal, esto daría lugar a una fuerza de resistencia que constaría de tres términos: uno de ellos sería la Ley de Stokes (14.45), y los otros dos resultarían de los dos nuevos términos de la ecuación de cantidad de movimiento (el alumno interesado puede consultar, por ejemplo, Richardson, 1989). Por supuesto, la velocidad terminal seguiría siendo la misma, puesto que estos nuevos términos de la fuerza de resistencia son nulos cuando $t \to \infty$.

Para terminar es conveniente señalar que la Ley de Stokes (14.45) se suele usar, de forma aproximada, incluso cuando la partícula no es exactamente esférica, siempre que se cumplan las hipótesis (14.12), sustituyendo R por un radio característico de la partícula. Debe observarse, además, que el análisis dimensional del problema (ver problema propuesto 1 de la lección 10) nos dice que F_r = constante $\times \mu V R$ si se cumple (14.12), donde la constante depende de la geometría de la partícula (vale 6π para una esfera), y R es un tamaño característico de la misma.

14.3. Aproximación de Oseen

La solución anterior de Stokes tiene la dificultad de que no es válida lejos de la partícula: De (17.39) se tiene que

$$\mu \nabla^2 v_r = \mu V \cos\theta \left[2\frac{R^3}{r^5} - \frac{2}{r^2} + \frac{3R}{r^3} \right] , \tag{14.55}$$

$$\begin{aligned} \rho \vec{v} \cdot \nabla v_r = {} & \rho V^2 \cos^2\theta \left(1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3} \right) \left(\frac{3R}{2r^2} - \frac{3}{2}\frac{R^3}{r^4} \right) \\ & + \frac{\rho V^2 \sin^2\theta}{r} \left(1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3} \right) \left(1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3} \right) , \end{aligned} \tag{14.56}$$

por lo que para $r \gg R$ el término viscoso y el término convectivo son del mismo orden si $r/R \sim Re^{-1} \gg 1$:

$$\mu \nabla^2 v_r \sim \frac{\mu V}{r^2} \sim \rho \vec{v} \cdot \nabla v_r \sim \rho \frac{V^2}{r} , \quad \frac{r}{R} \sim \frac{\mu}{\rho V R} \sim Re^{-1} \gg 1 . \tag{14.57}$$

En otras palabras, la condición $Re \ll 1$ permite no tener en cuenta el término convectivo en la ecuación de cantidad de movimiento en relación al término de fuerzas viscosas siempre que la longitud característica del campo de velocidad sea el diámetro de la partícula, en la que está basado Re. Esto es rigurosamente cierto cerca de la partícula. Pero a medida que nos alejamos de ella, la longitud característica se hace mayor puesto que el flujo se hace cada vez más uniforme; suficientemente lejos de la partícula [en particular, cuando se cumple (14.57)], el término convectivo se hace del mismo orden que el viscoso, y no está justificado despreciar el primero respecto al segundo, a pesar de que Re basado en D es pequeño. Si $Re \to 0$, esta dificultad no sería tal puesto que la solución sería válida hasta $r \to \infty$. Para $Re \ll 1$, pero finito, es necesario corregir la solución de Stokes. Esto lo hizo Oseen (1910) linealizando el término convectivo para $r \to \infty$, obteniendo una corrección de la Ley de Stokes que viene a ser el siguiente término en el desarrollo en potencias de $Re \ll 1$. Antes de describir la solución de Oseen conviene indicar que el fallo (inesperado desde un punto de vista físico) de la aproximación de Stokes lejos de la esfera se suele denominar **Paradoja de Stokes,** que

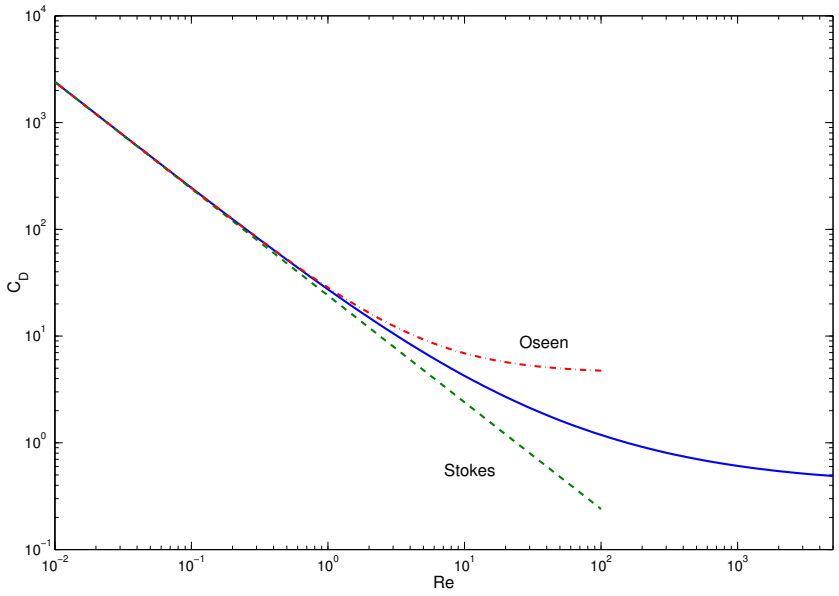


Figura 14.3: Coeficiente de resistencia C_D para una esfera. La curva contínua es una interpolación de numerosos datos experimentales dada por $C_D = 24/Re + 6/(1+\sqrt{Re}) + 0{,}4$ (White, 2004), válida hasta $Re \approx 2{,}5 \times 10^5$ (ver también problema propuesto 1 de la lección 10). La curva a trazos es la Ley de Stokes (14.47) y la curva de trazos y puntos es la Ley de Oseen (14.62).

es mucho más dramática en el caso del flujo bidimensional alrededor de un cilindro (ver, por ejemplo, ROSENHEAD, 1988).

Básicamente, como el término convectivo empieza a contar en la solución de Stokes cuando $r/R \sim Re^{-1} \gg 1$, lo que hizo Oseen fue suponer que allí la velocidad del fluido es aproximadamente la de la corriente en el infinito, $V\vec{e}_x$. Es decir,

$$\rho\vec{v}\cdot\nabla\vec{v} \simeq \rho V\vec{e}_x\cdot\nabla\vec{v} = \rho V\frac{\partial\vec{v}}{\partial x}\,. \tag{14.58}$$

De esta forma, la ecuación de cantidad de movimiento sigue siendo lineal:

$$\rho V\frac{\partial\vec{v}}{\partial x} = -\nabla p_d + \mu\nabla^2\vec{v}\,. \tag{14.59}$$

Esta ecuación se suele denominar **ecuación de Oseen.** Análogamente a como se hizo en la sección 14.1, sustituyendo $\nabla^2\vec{v} = -\nabla\wedge\vec{\omega}$ y tomando la divergencia y el rotacional de la ecuación anterior se llega a:

$$\nabla^2 p_d = 0\,, \tag{14.60}$$

$$\left(\nabla^2 - 2k\frac{\partial}{\partial x}\right)\vec{\omega} = 0\,, \tag{14.61}$$

donde para hallar (14.60) se ha hecho uso de la ecuación de continuidad, $\nabla\cdot\vec{v} = 0$, y en (14.61) $k = \rho V/2\mu$ y se ha hecho uso de $\nabla\wedge\partial\vec{v}/\partial x = \partial\vec{\omega}/\partial x$. Para el flujo alrededor de una esfera, la ecuación (14.61) se debe resolver con las condiciones de contorno (14.30)-(14.31). La solución de este problema se obtiene más fácilmente utilizando coordenadas cilíndricas

con el eje x como eje axial, pudiéndose obtener, por separación de variables, una solución en términos de funciones de Bessel esféricas (ver, por ejemplo, LAMB, 1975, o ROSENHEAD, 1988). Reteniendo los primeros términos de la expansión se llega a la siguiente expresión para el coeficiente de resistencia:

$$C_D = \frac{24}{Re}\left[1 + \frac{3}{16}Re\right] , \tag{14.62}$$

donde el término $3Re/16$ es la corrección de Oseen a la Ley de Stokes (14.42). En la figura 17.2 se representa las leyes de Stokes y de Oseen junto con resultados experimentales.

La solución de Oseen fue perfeccionada por Proudman y Pearson en 1957, y por otros investigadores posteriores (ver, por ejemplo, ROSENHEAD, 1988), utilizando la técnica de los *desarrollos asintóticos acoplados.* Aunque se va a entrar en detalles, básicamente, la solución de Stokes corresponde al orden más bajo del desarrollo en potencias de Re de la solución cerca de la esfera, mientras que la solución de Oseen es el siguiente orden $[O(Re)]$ de ese desarrollo cerca de la esfera. Proudman y Pearson calcularon el desarrollo en potencias de Re de la solución lejos de la esfera y la acoplaron con la solución cerca de la misma para distancias intermedias. De esta forma obtuvieron la corrección de Oseen de una forma más rigurosa, además de correcciones de mayor orden. Sin embargo, como se observa en la figura 14.3, la resistencia calculada con la aproximación de primer orden (Oseen) prácticamente coincide con los resultados experimentales hasta $Re = 1$ (para $Re > 1$, el método de desarrollar la solución en potencias de Re obviamente no vale). Aunque para hallar la corrección de Oseen en el caso de una esfera no es necesario utilizar la técnica de los desarrollos asintóticos acoplados (sí para su justificación matemática), en el caso de la corriente alrededor de un cilindro esta técnica es necesaria incluso para hallar la solución de orden menor (pero este es un problema matemáticamente mucho más complejo y cae fuera de un curso introductorio a la Mecánica de Fluidos; ver, por ejemplo, ROSENHEAD, 1989).

Referencias.

- D.J. ACHESON, 1990. Capítulo 7.
- H. LAMB, 1975. Capítulo XI.
- L.M. MILNE-THOMSON, 1996. Capítulo XXII.
- S. M. RICHARDSON, 1989. Capítulo 8.
- L. ROSENHEAD, 1988. Capítulo IV.
- F.M. WHITE, 2004. Capítulo 3.

Problemas propuestos

1. Una esfera de densidad ρ_s asciende por acción de las fuerzas de flotabilidad en el seno de un líquido de densidad $\rho > \rho_s$ y viscosidad μ. ¿Qué condición tiene que verificar el radio R de la esfera para que $Re < 1$ y se pueda utilizar, aproximadamente, la velocidad terminal de Stokes? Escriban el valor numérico de esa condición en el caso de $\rho_s = 0{,}8$ kg/m^3 y agua a 20^oC [utilicen los valores de ρ y μ dados por (13.46) y (13.47)].

2. Calculen la velocidad terminal de una esfera de radio R y densidad ρ_p que cae en el seno de un líquido de densidad ρ y viscosidad μ suponiendo que $Re \ll 1$ y utilizando la aproximación de Oseen.

   Calculen el valor numérico de esta velocidad para una esfera de densidad $\rho_p = 5\rho$, radio 1 mm y un líquido de viscosidad cinemática $\nu = 2 \times 10^{-4}$ m^2/s y compárenla con la velocidad terminal obtenida con la Ley de Stokes. Comprueben que en ambos casos el número de Reynolds es pequeño.

Práctica de laboratorio: Velocidad terminal / sedimentación

Objetivo, montaje experimental, ecuaciones y definiciones

El objetivo de esta práctica es medir experimentalmente las velocidades terminales de diferentes esferas que sedimentan en distintos líquidos, siempre con fuerzas viscosas dominantes en el movimiento del fluido alrededor de las esferas, y compararlas con las correspondientes relaciones teóricas, incluyendo la que resulta de la Ley de Stokes.

En particular, se van a estudiar los procesos de sedimentación de tres esferas de acero (densidad $\rho_s = 7794 \pm 4$ kg/m^3) de diámetros diferentes en el interior de un tubo vertical transparente (de plexiglas; ver figura 14.4)[1] que contiene un líquido suficientemente viscoso para que las fuerzas viscosas dominen en el movimiento. Se van a considerar un total de cuatro situaciones diferentes: las tres esferas de distintos radios (R = 1, 2,5 y 8 mm) que caen en el interior de un tubo que contienen glicerina y la esfera de menor radio (1 mm) que cae dentro de otro tubo que contiene aceite de vaselina. Las densidades y viscosidades de estos dos líquidos a 20^{o}C son las siguientes:

Líquido	Densidad ρ (kg/m^3) a 20^{o}C	Viscosidad μ [kg/(m s)] a 20^{o}C
Glicerina	1260	1.1857
Aceite de vaselina	875	0.2167

Obsérvese que las viscosidades de ambos líquidos son mucho mayores que la del agua (1,002 $\times$ 10^{-3} kg/(m s) a 20^{o}C), especialmente la de la glicerina. Se ha elegido así para que el número de Reynolds del movimiento pueda ser pequeño sin necesidad de recurrir a esferas microscópicas y también para que la velocidad terminal sea lo suficientemente pequeña como para que se pueda medir con suficiente precisión mediante un cronómetro manual.

Mientras que las densidades de los dos líquidos no varían mucho con la temperatura, y se pueden tomar de forma aproximada las de la tabla anterior incluso si la temperatura ambiente difiere de 20^{o}C en unos pocos grados, las viscosidades dependen muy fuertemente de la temperatura, haciéndose necesario medir la temperatura durante el desarrollo de la

[1] El montaje experimental ha sido construido y puesto a punto por D. Sergio Pinazo Ortega.

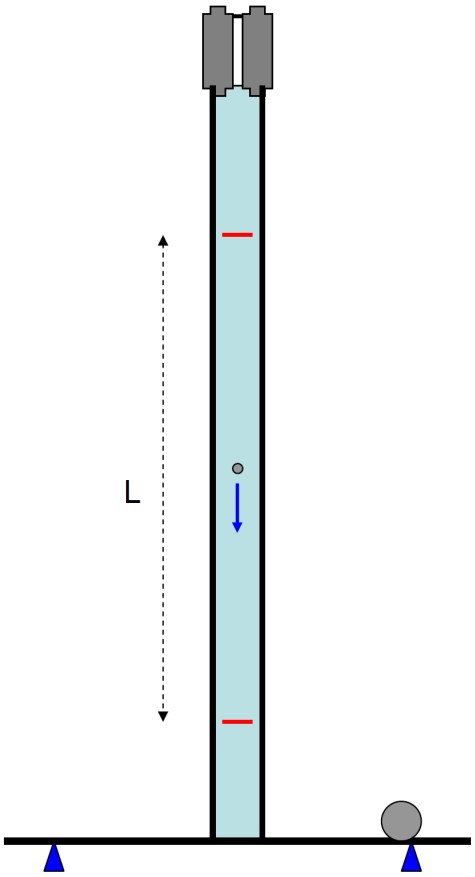


Figura 14.4: Esquema del montaje experimental. $L = 50$ cm y diámetro interior del tubo $D = 19{,}9$ mm. Los radios de las tres esferas utilizadas son $R = 1$, 2,5 y 8 mm. El tapón superior del tubo está perforado con un diámetro ligeramente mayor que el de la esfera utilizada para centrar todo lo posible la caída de la esfera en el interior del tubo. La plataforma dispone de patas de altura regulables para ajustar la verticalidad del tubo.

práctica para poder obtener las viscosidades con suficiente precisión. Para ello se hará uso de las siguientes correlaciones empíricas:[2]

- Glicerina,

$$\mu\ [\mathrm{kg}\ /(\mathrm{m\ s})] \simeq 0{,}0013 \exp\left(\frac{T\,(\ \mathrm{K}\ )}{478}\right)^{-3{,}9213}, \quad 283\,\mathrm{K} \leq T \leq 373\,\mathrm{K}\,; \tag{14.63}$$

- Aceite de vaselina,

$$\mu\ [\mathrm{kg}\ /(\mathrm{m}\quad \mathrm{s})] \simeq 0{,}0074 \exp\left(\frac{T\,(\ \mathrm{K}\ )}{366}\right)^{-5{,}4709}, \quad 287\,\mathrm{K} \leq T \leq 305\,\mathrm{K}\,. \tag{14.64}$$

Para determinar la velocidad terminal, se dejará caer la esfera desde la parte superior del tubo vertical transparente. En la parte superior del tubo se colocará el tapón correspondiente,

[2] José Alberto Camacho López, 2011, *Estudio teórico y experimental de los procesos de sedimentación y lubricación en un tubo,* Proyecto Fin de Carrera, E.T.S de Ingeniería Industrial, Universidad de Málaga. Directores del proyecto: Carlos del Pino Peñas y Luis Parras Anguita.

con un orificio ligeramente mayor que la esfera, para centrar en lo posible la caída de la esfera. Para ello será también muy importante que el tubo esté lo más vertical posible, lo cual se conseguirá mediante las patas regulables de la plataforma.

El tubo tiene dos marcas separadas una distancia $L = 50$ cm. La medición mediante un cronómetro manual del tiempo t_c que tarda la esfera en atravesar esa distancia nos proporciona la velocidad terminal:

$$V_t = \frac{L}{t_c}\,. \tag{14.65}$$

Aparte de las imprecisiones que se puedan cometer en la medición del tiempo, esta determinación de V_t será correcta siempre que la esfera haya llegado a su velocidad terminal cuando alcanza la marca superior. Por este motivo, esta marca se ha alejado suficientemente de la parte superior del tubo (el estudiante podrá comprobar al final de la práctica si esto es así calculando el tiempo característico del transitorio hasta la velocidad terminal en cada caso). Por otro lado, la marca inferior también se ha separado suficientemente del fondo del tubo para minimizar el efecto que pueda tener en la velocidad terminal.

Las velocidades terminales medidas experimentalmente en esta práctica se van a comparar con dos expresiones teóricas. En primer lugar con la velocidad terminal (14.50) que deriva de la Ley de Stokes:

$$V_t = V_{tS} \equiv \frac{2(\rho_s - \rho)R^2 g}{9\mu}\,, \tag{14.66}$$

válida si

$$Re \equiv \frac{\rho V_t 2R}{\mu} \ll 1\,, \tag{14.67}$$

cuando la esfera cae en un medio infinito. Es de suponer que esta expresión será aproximadamente válida en el caso de la esfera que tiene un diámetro mucho menor que el del tubo vertical donde sedimenta, $2R/D = 2/19{,}9 \simeq 0{,}1$. Si $2R/D \ll 1$, la pared del tubo apenas influye en el movimiento del líquido adyacente a la esfera y, por tanto, afecta poco a la velocidad terminal de la esfera. Con la medición de V_t y su comparación con (14.66) se comprobará si realmente el valor de $2R/D$ elegido es suficientemente pequeño para que esto ocurra.

A medida que el diámetro de la esfera crece, la influencia de las paredes del tubo en la velocidad terminal se va haciendo mayor y ya no vendrá dada, ni siquiera aproximadamente, por (14.66). Tampoco existe una expresión analítica con la que comparar los resultados experimentales. En cambio, cuando el diámetro de la esfera se hace muy próximo al del tubo, es posible obtener una solución analítica aproximada de las fuerzas que el líquido ejerce sobre la esfera en su caída y, por tanto, una expresión analítica aproximada para la velocidad terminal con la que comparar los resultados experimentales. Por ese motivo se ha elegido la tercera esfera con un diámetro parecido al del tubo, $2R/D = 16/19{,}9 \simeq 0{,}8$.

En particular, cuando

$$h_0 \equiv \frac{D}{2} - R \ll R\,, \tag{14.68}$$

si además se cumple que las fuerzas viscosas son dominantes en el movimiento del líquido en el espacio estrecho entre la esfera que cae y la pared del tubo,

$$Re\frac{h_0}{R} \ll 1\,, \tag{14.69}$$

entonces, la velocidad terminal de la esfera viene dada, en primera aproximación, por la siguiente expresión:[3]

$$V_t = V_{tp} \equiv \frac{16(\rho_s - \rho)g h_0^3}{27\pi\mu(2Rh_0)^{1/2}}\,. \tag{14.70}$$

Obviamente, esta velocidad es mucho menor que la dada por (14.66) para un mismo R si $h_0/R \ll 1$: la pared del tubo frena fuertemente la caída de la esfera.

Los resultados experimentales se presentarán en forma adimensional utilizando como valor de referencia la velocidad terminal de Stokes correspondiente:

$$\eta = \frac{V_t}{V_{tS}}\,. \tag{14.71}$$

Para ello se podrá utilizar la gráfica de la figura 14.5, que tiene dibujados los valores de η asociados a (14.66) y a (14.70),

$$\eta_S = \frac{V_{tS}}{V_{tS}} = 1\,, \quad \eta_p = \frac{V_{tp}}{V_{tS}} = \frac{8}{3\sqrt{2}\pi}\left(\frac{1}{\xi} - 1\right)^{5/2}\,, \quad \xi = \frac{2R}{D}\,, \tag{14.72}$$

con los que comparar los valores de η determinados experimentalmente en función del radio adimensional ξ (obsérvese que η_p solo vale si $1 - \xi \ll 1$, mientras que η_s vale para $\xi \ll 1$).

Realización de la práctica y presentación de resultados

Primeramente se comprobará la verticalidad de los tubos y se anotará la temperatura para poder determinar las viscosidades de los dos fluidos.

Como se ha comentado antes, se van a considerar cuatro casos:

1. Glicerina con esfera de diámetro $2R = 2$ mm;
2. Glicerina con esfera de diámetro $2R = 5$ mm;
3. Glicerina con esfera de diámetro $2R = 16$ mm;
4. Aceite de vaselina con esfera de diámetro $2R = 2$ mm.

Para cada uno de los cuatro casos se procederá a la medición del tiempo de caída t_c. Para ello se utilizará el cronómetro, que se pondrá en marcha cuando la esfera pase por la primera marca y se parará cuando atraviese la marca inferior. Con objeto de obtener un valor promedio de la velocidad terminal y hacer un análisis de los errores experimentales, se efectuarán varias mediciones de t_c en cada uno de los cuatro casos. Para anotar estas medidas y obtener las correspondientes velocidades terminales se puede utilizar una tabla como la que se proporciona en el anexo de esta memoria de práctica. Allí se incluye también el número de Reynolds (14.67), que será necesario obtener para saber si se están cumpliendo las

[3]Ver problema P.6.1 de FERNÁNDEZ FERIA, DEL PINO PEÑAS y ORTEGA CASANOVA, 2006.

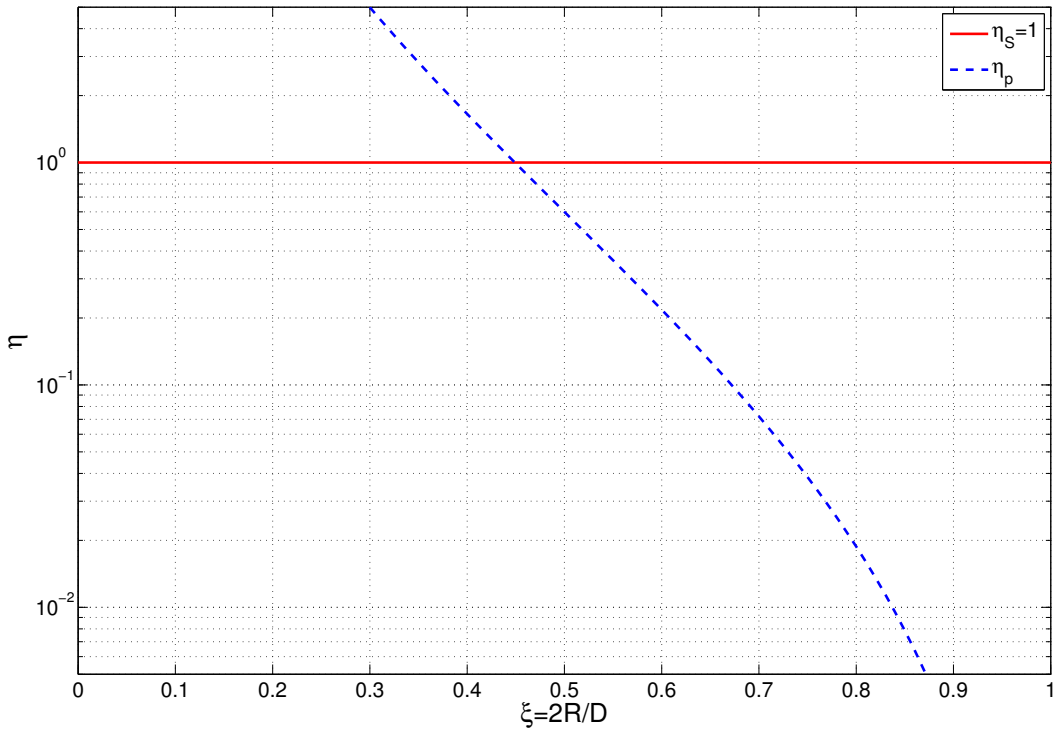


Figura 14.5

hipótesis formuladas en las expresiones (14.66) y (14.70), y las correspondientes magnitudes adimensionales η y ξ.

Tras la realización de la práctica, el estudiante deberá presentar la tabla con las medidas realizadas y los correspondientes cálculos de las velocidades terminales.

La comparación con las expresiones teóricas se realizará en forma adimensional, presentando los valores experimentales de η, con sus valores promedios y sus correspondientes barras de error, en una gráfica como la que se suministra en la Fig. 14.5, que incluye apropiadamente η_S y η_p.

Finalmente, se discutirán los resultados obtenidos teniendo en cuenta los valores de ξ y de Re.

Anexo: Hoja de toma de datos

Temperatura:

Viscosidad de la glicerina: Viscosidad del aceite de vaselina:

Fluido	R (mm)	t_c (s)	V_t (m/s)	Re	V_{tS} (m/s)	η	ξ
********	******	******	******	******	******	******	******

TEMA VII:
Movimientos fluidos a altos números de Reynolds

CAPÍTULO 15

Movimientos ideales

15.1. Introducción

Los efectos viscosos y de conduccíon de calor en el movimiento de un fluido son poco importantes en muchos flujos reales, por lo que pueden no ser tenidos en cuenta en primera aproximación, al menos en ciertas regiones del flujo. En este punto nos podríamos preguntar: ¿a qué se debe esto? La respuesta es sencilla: es consecuencia de que los fluidos más comunes tienen una viscosidad y una conductividad térmica relativamente pequeñas, por lo que en la mayoría de los flujos de interés su efecto suele ser pequeño. Por ejemplo, para agua, a 20 ^{o}C, $\nu \simeq 10^{-6}$ m^2/s y $\alpha \simeq 1{,}42 \times 10^{-7}$ m^2/s, mientras que para aire, en condiciones normales de 20 ^{o}C y 1 atm, $\nu \simeq 1{,}5 \times 10^{-5}$ m^2/s y $\alpha \simeq 2{,}08 \times 10^{-5}$ m^2/s. Esta lección se dedicará a estudiar este tipo de flujos donde, en primera aproximación y en casi todo el dominio fluido, se pueden despreciar los efectos disipativos de la viscosidad y la conductividad térmica, que en Mecánica de Fluidos se conocen como flujos, o movimientos, ideales.

Como ya se vio en la lección 10, la condición que se debe verificar para que las fuerzas viscosas sean despreciables frente a la convección de cantidad de movimiento en la ecuación de cantidad de movimiento es

$$Re = \frac{VL}{\nu} \gg 1, \tag{15.1}$$

donde V y L son una velocidad y longitud característica del flujo, respectivamente. Por otro lado, para que la conducción de calor sea despreciable frente a la convección de energía interna en la ecuación de la energía es necesario que

$$Pe = Re\, Pr = \frac{VL}{\alpha} \gg 1. \tag{15.2}$$

Como para la mayoría de los fluidos el número de Prandtl es de orden unidad o mayor (excepto para los metales líquidos, para los que $Pr \ll 1$), la condición (15.2) se satisface si se cumple (15.1), es decir, si $Re \gg 1$. Por tanto, en la mayoría de los fluidos los movimientos ideales están caracterizados por la única condición de que el número de Reynolds sea alto.

15.2. Ecuaciones de Euler

Si el fluido se puede considerar como ideal, es decir, si la condición (15.1) se cumple, las ecuaciones de Navier-Stokes junto con las ecuaciones de estado se escriben, en primera

aproximación, como:
Ecuación de conservación de masa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \tag{15.3}$$

Ecuación de cantidad de movimiento:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p + \rho \vec{f_m}, \tag{15.4}$$

Ecuación de la energía:

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = Q_r, \tag{15.5}$$

Ecuación de estado:

$$\rho = \rho(p, T), \;\; s = s(p, T), \tag{15.6}$$

donde en lugar de la ecuación de la energía interna se ha utilizado la ecuación de la entropía (8.27), puesto que ésta se simplifica notoriamente cuando los efectos disipativos son despreciables.

Este sistema de ecuaciones que describe el movimiento ideal de un fluido se denomina **ecuaciones de Euler.** No obstante, la ecuación de la entropía se podría sustituir por otras formas de la ecuación de la energía, como las que se escriben a continuación para futuras referencias:

$$\rho \frac{D(e + v^2/2)}{Dt} = -\nabla \cdot (p\vec{v}) + \rho \vec{f_m} \cdot \vec{v} + Q_r, \tag{15.7}$$

$$\rho \frac{D(h + v^2/2)}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \vec{f_m} \cdot \vec{v} + Q_r, \tag{15.8}$$

$$\rho \frac{De}{Dt} = -p \nabla \cdot \vec{v} + Q_r, \tag{15.9}$$

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + Q_r. \tag{15.10}$$

Una particularidad importante de las ecuaciones anteriores, desde un punto de vista matemático (y, como se verá, también con importantes implicaciones físicas), es que con los efectos disipativos han desaparecido también de las ecuaciones los términos con las derivadas de mayor orden (segundo orden) para la velocidad y la temperatura. Ello se traduce en que no se van a poder imponer la totalidad de las condiciones de contorno para esas magnitudes (de dos posibles se pasa a una). Así, por ejemplo, para el flujo alrededor de un obstáculo considerado en la Sección 9.3, si se supone que el movimiento viene gobernado por las ecuaciones de Euler, se podrían imponer todas las condiciones iniciales y de contorno excepto las correspondientes a la superficie del obstáculo (ver figura 15.1). Ello implica que la solución no puede ser uniformemente válida en todo el dominio fluido puesto que sobre el obstáculo no se satisface (en general) que la velocidad y la temperatura del fluido sean iguales a las del sólido. Físicamente, lo que ocurre es que, aunque $Re \gg 1$ y, por tanto, la viscosidad y la conductividad térmica no son importantes en el flujo, cerca de la superficie sólida del obstáculo esto no es así, y existe una delgada región a su alrededor o *capa límite* donde, a pesar de que $Re \gg 1$ y la viscosidad y la conductividad térmica son pequeñas, los efectos viscosos y de conducción de calor son tan importantes como los convectivos, y aquellos son los

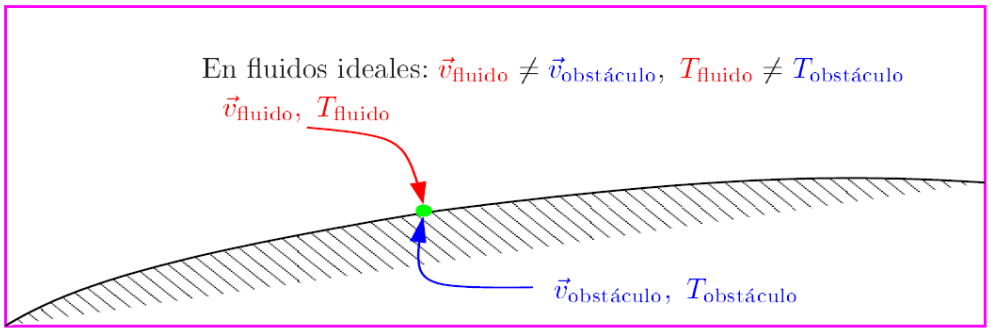


Figura 15.1: Flujo alrededor de una superficie sólida: condición de contorno en fluidos ideales sobre la superficie sólida.

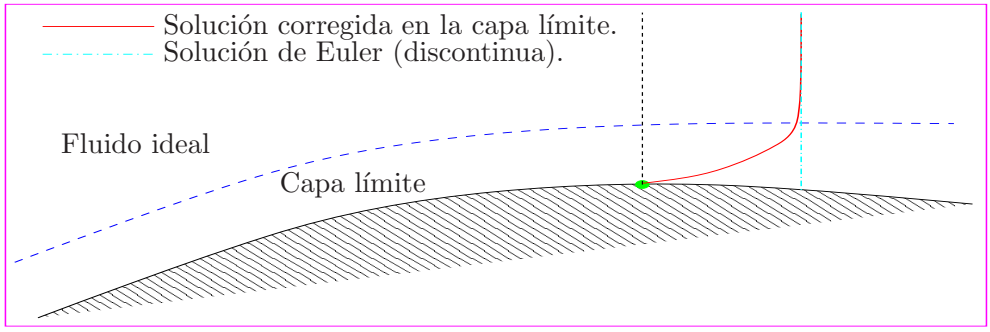


Figura 15.2: Flujo alrededor de una superficie sólida: región conocida como capa límite y perfiles de velocidad.

encargados de hacer cumplir la condición de contorno de igualdad de velocidad y temperatura entre el fluido y el obstáculo (ver figura 15.2). A pesar de su importancia, de momento nos vamos a olvidar de esta capa límite, que será abordada más adelante en otra lección, y nos limitaremos a obtener soluciones de las ecuaciones de Euler.

Desde un punto de vista más general, al haber desaparecido las derivadas de mayor orden de las ecuaciones de Euler, no existen, en general, soluciones continuas y/o con derivadas continuas del problema formado por dichas ecuaciones y sus correspondientes condiciones iniciales y de contorno. Así, en las soluciones aparecerán superficies de discontinuidad, en forma de ondas de choque, capas límites, etc. En realidad, estas discontinuidades no son tales, sino, como se acaba de decir, son regiones muy delgadas en las que los gradientes de velocidad y/o temperatura son muy elevados y, por tanto, los efectos disipativos son importantes, a pesar de que la viscosidad y la conductividad térmica son relativamente pequeñas. Por el momento, no tendremos en cuenta estas regiones delgadas y admitiremos la existencia de discontinuidades en las soluciones de Euler (ver figura 15.2).

15.3. Ecuación de Bernoulli

La ecuación de cantidad de movimiento para un fluido ideal (15.4) puede ser, bajo ciertas condiciones, integrada a lo largo de líneas de corriente. Para ello, haciendo uso de

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} \quad \text{y} \quad (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = \nabla(v^2/2) - \vec{v}\wedge(\nabla\wedge\vec{v}), \tag{15.11}$$

la ecuación (15.4) se puede escribir como

$$\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\rho\nabla(v^2/2)-\rho\vec{v}\wedge(\nabla\wedge\vec{v})+\nabla p-\rho\vec{f_m}=0. \tag{15.12}$$

Para llegar a integrar esta ecuación y obtener las buscadas soluciones, el término $\rho\vec{v}\wedge(\nabla\wedge\vec{v})$ impide una integración sencilla. Su eliminación de la ecuación, y así poder llevar a cabo su integración, se puede conseguir de dos modos:

1. multiplicando toda la ecuación escalarmente por $\vec{v}$; o
2. si el movimiento es irrotacional: $\vec{\omega}=0$.

En primer lugar, multiplicando escalarmente (15.12) por $\vec{v}$ y dividiendo por ρ se obtiene

$$\vec{v}\cdot\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\vec{v}\cdot\nabla(v^2/2)-\vec{v}\cdot[\vec{v}\wedge(\nabla\wedge\vec{v})]+\vec{v}\cdot\frac{\nabla p}{\rho}-\vec{v}\cdot\vec{f_m}=0. \tag{15.13}$$

Teniendo en cuenta que

1. $\vec{v}\cdot\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t}=\dfrac{\partial v^2/2}{\partial t}$; que
2. $\vec{v}\cdot[\vec{v}\wedge(\nabla\wedge\vec{v})]=0$, puesto que es un producto escalar entre vectores perpendiculares; que
3. $\vec{v}\cdot\nabla\equiv v\partial/\partial\ell$, donde ℓ es la coordenada a lo largo de las distintas líneas de corriente; y que
4. las fuerzas másicas derivan del potencial U (al menos a lo largo de las líneas de corriente) y, por tanto, $\vec{v}\cdot\vec{f_m}=-\vec{v}\cdot\nabla U=-v\partial U/\partial\ell$,

la ecuación (15.13) se puede escribir como

$$\frac{\partial(v^2/2)}{\partial t}+v\frac{\partial v^2/2}{\partial\ell}+\frac{v}{\rho}\frac{\partial p}{\partial\ell}+v\frac{\partial U}{\partial\ell}=0. \tag{15.14}$$

Si se divide la ecuación por v y se considera que el flujo es barótropo [con función de barotropía $w\equiv\int^p dp/\rho$, ver ecuación (11.10)] y casi estacionario, finalmente se tiene,

$$\frac{\partial}{\partial\ell}\left(\frac{v^2}{2}+w+U\right)=0, \tag{15.15}$$

que integrada proporciona

$$\frac{v^2}{2}+w+U=H(t), \tag{15.16}$$

donde H es una *constante* para *cada* línea de corriente, y que puede depender del tiempo (suavemente) a través de las condiciones de contorno. Por tanto, el Teorema de Bernoulli nos dice que, si se verifican las condiciones de:

I flujo ideal ($Re\gg1$);

II componente de las fuerzas másicas sobre las líneas de corriente deriva de un potencial U;

III flujo barótropo; y

IV flujo casi estacionario ($St \ll 1$),

la magnitud $H \equiv \dfrac{v^2}{2} + w + U$ es constante (pudiendo ser también diferente) a lo largo de cada línea de corriente. Esta magnitud H se suele denominar función de Bernoulli o, simplemente, *el Bernoulli* del flujo, y la ecuación (15.16) también se llama de Bernoulli. Para un líquido ($w = p/\rho$) bajo la acción de la gravedad ($U = gz$), (15.16) queda

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = H. \tag{15.17}$$

Por otro lado, cuando el flujo es irrotacional, $\vec{\omega} = \nabla \wedge \vec{v} = 0$, (15.12) queda como

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \nabla (v^2/2) + \nabla p - \rho \vec{f_m} = 0, \tag{15.18}$$

que, si se cumplen además las condiciones del Teorema de Bernoulli (flujo ideal, barótropo y casi estacionario y con fuerzas másicas que derivan de un potencial), se puede escribir como

$$\nabla \left(\frac{v^2}{2} + w + U \right) = 0, \tag{15.19}$$

que integrada da

$$\frac{v^2}{2} + w + U = H(t), \tag{15.20}$$

donde, en este caso, H es la misma *constante* en todo el campo fluido. Es decir, si además de cumplirse las condiciones del Teorema de Bernoulli, el flujo es irrotacional, H tiene el mismo valor en todas las líneas de corriente. O dicho de otro modo, cuando el flujo es irrotacional, $\nabla H = 0$ y H no varía espacialmente en el dominio fluido, mientras que si no es irrotacional, $\partial H/\partial \ell = \vec{v} \cdot \nabla H = 0$ y H no varía a lo largo de cada línea de corriente, pudiendo tener un valor diferente de una a otra. La cuestión está en saber qué condiciones físicas se deben dar para que un flujo sea irrotacional y si hay alguna relación entre flujos ideales y flujos irrotacionales. La respuesta en la sección 15.5.

15.4. Flujos isentrópicos

En ausencia de intercambio de calor ($Q_r = 0$), la ecuación de la entropía (15.5) nos dice que ésta, la entropía, se conserva a lo largo del movimiento

$$\frac{Ds}{Dt} = 0. \tag{15.21}$$

Es decir, la entropía de las distintas partículas fluidas se conserva (permanece constante) en el movimiento, lo cual es consecuencia de que se han despreciado todos los efectos disipativos. Estos flujos se denominan isentrópicos. Así, si todas las partículas fluidas tuvieran la misma entropía s_0 en algún instante (por ejemplo, si todo el fluido tuviese inicialmente la misma temperatura y presión), la entropía sería la misma en todo instante en la región ocupada por las mismas partículas fluidas. Estrictamente, esto sería un movimiento isentrópico.

Si el flujo, además de satisfacer $Q_r = 0$, fuera casi estacionario, la ecuación (15.5) implicaría que la entropía se conserva a lo largo de las líneas de corriente. En efecto:

$$\frac{Ds}{Dt} = \overbrace{\frac{\partial s}{\partial t}}^{\approx 0} + \vec{v}\cdot\nabla s = v\frac{\partial s}{\partial \ell} = 0, \quad s = s_0(t), \tag{15.22}$$

donde s_0 es una constante para cada línea de corriente. Si s_0 es la misma para todas las líneas de corriente, la entropía de todo el campo fluido sería la misma en cada instante, pero podría variar de un instante a otro a través de las condiciones de contorno; esto es lo que se denomina un flujo homentrópico: aquél en el que $\nabla s = 0$, pero $\partial s/\partial t$ puede ser distinto de cero, aunque la variación de s con el tiempo debe ser muy lenta para que el flujo se pueda considerar casi estacionario ($St \ll 1$).

Una particularidad de los flujos isentrópicos (y homentrópicos), con $ds = 0$ en todo el campo fluido o a lo largo de las líneas de corriente, es que son a su vez barótropos. De (8.20) se tiene que

$$dh = T\overbrace{ds}^{0} + \frac{dp}{\rho} = \frac{dp}{\rho} = dw \tag{15.23}$$

siendo, por tanto, la función barotropía igual a la entalpía. Por tanto, las condiciones (I) y (III) del Teorema de Bernoulli (flujo ideal y barótropo) se cumplen implícitamente para los flujos isentrópicos. Si, además, el flujo es casi estacionario, condición (IV), y las fuerzas másicas sobre las líneas de corriente derivan de un potencial, condición (II), se verifica (15.16).

15.5. Teorema de la circulación de Kelvin. Movimientos irrotacionales

El teorema de la circulación de Kelvin es un resultado muy general y relevante relacionado con los movimientos ideales, que tiene implicaciones muy importantes en la rama de la Mecánica de Fluidos que se suele denominar aerodinámica. Aunque en este curso introductorio a la Mecánica de Fluidos no se va a ver ni la teoría básica de la aerodinámica ni aplicaciones aeronáuticas, es importante que los estudiantes conozcan este resultado general, que aquí tiene cierta importancia pues permite entender la relación que existe entre las dos versiones de la ecuación de Bernoulli expuestas en la sección 15.3, ya que permite establecer las condiciones físicas concretas que deben darse para que un movimiento pueda ser irrotacional.

El teorema dice: Sea un flujo de un fluido no viscoso, barótropo en donde las fuerzas másicas derivan de un potencial U, y sea $C(t)$ una curva cerrada que se mueve con el fluido. Entonces, la circulación

$$\Gamma = \int_{C(t)} \vec{v}\cdot d\vec{l} \tag{15.24}$$

alrededor de $C(t)$ no depende del tiempo. Para demostrarlo, hallamos la derivada sustancial de la circulación:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \frac{D}{Dt}\int_{C(t)} \vec{v}\cdot d\vec{l} = \int_C \frac{D\vec{v}}{Dt}\cdot d\vec{l} + \int_C \vec{v}\cdot\frac{Dd\vec{l}}{Dt} \quad , \tag{15.25}$$

El segundo término es idénticamente nulo puesto que $Dd\vec{l}/Dt = d\vec{v}$ (ver figura 15.3) y la integración es sobre una curva cerrada. Por otro lado, de la ecuación de cantidad de movimiento bajo las hipótesis del teorema se tiene que

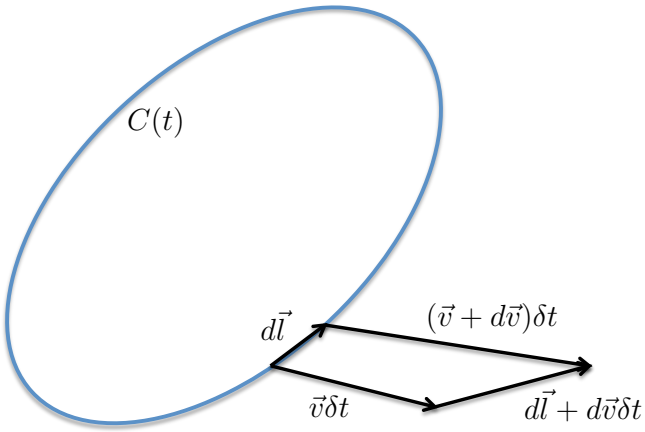


Figura 15.3: Teorema de Kelvin.

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla(w+U) \quad , \tag{15.26}$$

donde $\nabla w = \nabla p/\rho$; es decir, la aceleración $D\vec{v}/Dt$ *deriva* del potencial $w+U$. Como $\nabla(w+U)\cdot d\vec{l} = [\partial(w+U)/\partial l]dl$,

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = -[w+U]_C = 0 \quad , \tag{15.27}$$

al ser una curva cerrada, con lo que queda demostrado el teorema.

Como consecuencia de este teorema, si inicialmente la circulación a lo largo de cualquier curva cerrada del flujo es cero, ésta permanecerá siendo cero en todo instante posterior. Por el teorema de Stokes se tiene que

$$\Gamma = \int_C \vec{v}\cdot d\vec{l} = \int_S \vec{\omega}\cdot d\vec{s} \quad , \tag{15.28}$$

donde S es una superficie que se apoya en C. Por tanto, como corolario del teorema de Kelvin, si el movimiento de un fluido ideal y barótropo en presencia de fuerzas másicas que derivan de un potencial es inicialmente irrotacional (por ejemplo, si parte del reposo o de un movimiento uniforme), permanecerá siempre irrotacional.

Se debe observar que la formulación en términos de circulación es más general que en términos de vorticidad, puesto que aunque se ha hecho la hipótesis de un flujo ideal, esta hipótesis solo afecta al fluido contenido en la curva $C(t)$; si las fuerzas viscosas son importantes fuera de la curva C, no afectaría a la invariancia de la circulación alrededor de C. Por otra parte, al pasar de hablar de circulación a hacerlo de vorticidad, se hace uso del teorema de Stokes, y las conclusiones respecto a la invariancia de la irrotacionalidad son solo válidas si la región fluida es simplemente conexa, es decir, si es posible construir una superficie S que se apoye en C y que esté completamente inmersa en el fluido. Este matiz tiene relevancia en aerodinámica.

En relación a las dos formulaciones de ecuación de Bernoulli, el teorema de Kelvin establece las condiciones para que un flujo sea irrotacional y, por tanto, permite saber cuándo

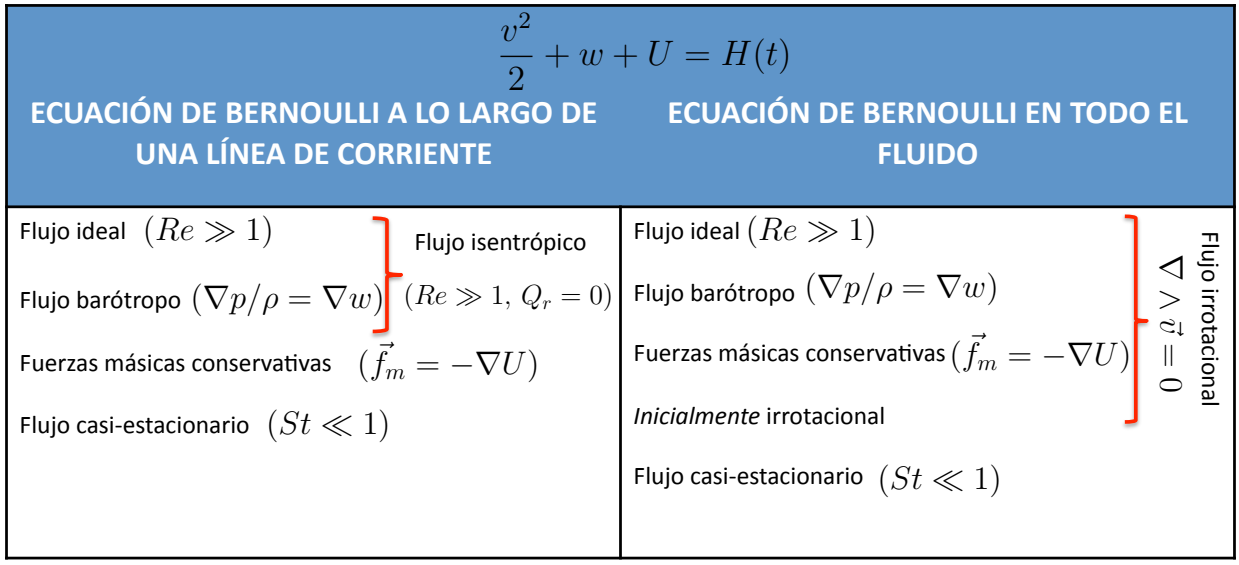


Figura 15.4: Condiciones de validez de la ecuación de Bernoulli, de los flujos isentrópicos y de los flujos irrotacionales.

se puede aplicar la ecuación de Bernoulli en todo el movimiento fluido y no solo a lo largo de las líneas de corriente. Como consecuencia de las premisas del teorema de Kelvin se tiene que, realmente, la única diferencia entre la formulación de la ecuación de Bernoulli a lo largo de las líneas de corriente y la formulación en todo el fluido estriba en que en la segunda formulación, más general, se exige que el movimiento sea *inicialmente* irrotacional, o provenga de una región irrotacional, solo eso. La figura 15.4 resume de forma más clara esta diferencia, donde también se hace uso de los resultados de la sección 15.4.

15.6. Conservación de las magnitudes de remanso

Para terminar esta lección sobre resultados generales aplicables a los flujos ideales, se establecen a continuación otros requisitos ligeramente distintos a los anteriores bajo los cuales las ecuaciones de la energía y de cantidad de movimiento se integran y adquieren una forma particularmente simple.

Consideremos un flujo ideal casi estacionario, en el que no hay aportes volumétricos de calor ($Q_r = 0$) y en el que las fuerzas másicas pueden despreciarse (como ocurre en la mayoría de los flujos de gases). En este caso, de las ecuaciones (15.5) y (15.8), se desprende que tanto la entropía como la entalpía total o de remanso, $h + v^2/2$, se conservan a lo largo de las líneas de corriente:

$$s = s_0, \tag{15.29}$$

$$h + v^2/2 = h_0. \tag{15.30}$$

Así, tenemos dos primeras integrales de movimiento que facilitan enormemente la resolución del problema. Nótese que la ecuación de conservación de la entalpía de remanso es equivalente a la ecuación de Bernoulli (y, por tanto, a la ecuación de cantidad de movimiento), puesto que si el flujo es isentrópico la función de barotropía coincide con la entalpía y como se han

despreciado las fuerzas másicas, de (15.16) se tienen

$$H = \frac{v^2}{2} + \cancel{w} + \cancel{\mathcal{V}} = \frac{v^2}{2} + h = h_0. \tag{15.31}$$

Si, además, las líneas de corriente partiesen de una región donde las propiedades son uniformes, la entropía y la entalpía de remanso serían constantes en todo el campo fluido.

Las magnitudes de remanso representan, físicamente, las magnitudes que tendría un fluido al ser decelerado desde la velocidad v hasta la velocidad nula de forma isentrópica y estacionaria y en ausencia de fuerzas másicas. Por tanto, la conservación de la entalpía de remanso sugiere la introducción de otras *magnitudes de remanso*, como la presión, la temperatura y la densidad de remanso, asociadas todas ellas a la entalpía de remanso y a la entropía. Así, para un gas perfecto se tiene

$$T_0 = \frac{h_0}{c_p},\ \frac{p_0}{\rho_0} = R_g T_0,\ \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} = \text{constante}, \tag{15.32}$$

donde la última relación proviene de la conservación de la entropía de un gas perfecto (8.39). Con la introducción de estas nuevas magnitudes de remanso, se pueden obtener T, p y ρ en función de las magnitudes de remanso, T_0, p_0 y ρ_0 (las cuales se conservan a lo largo de las líneas de corriente) y del número de Mach, $M \equiv v/a = v/\sqrt{\gamma R_g T}$:

$$\frac{T_0}{T} = \frac{c_p h_0}{c_p h} = \frac{h + v^2/2}{h} = 1 + \frac{v^2}{2c_p T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2, \tag{15.33}$$

$$\frac{p_0}{p} = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^\gamma = \frac{\rho_0 T_0}{\rho T}, \tag{15.34}$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{1/(\gamma-1)}, \tag{15.35}$$

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\gamma/(\gamma-1)}. \tag{15.36}$$

Por otro lado, para un líquido ($\rho =$ constante) se tiene, simplemente,

$$s = s_0, \tag{15.37}$$

$$\text{además, puesto que } T\,\cancel{ds}^{\,0} = c\,dT = 0 \Rightarrow T = T_0, \tag{15.38}$$

$$p + \rho\,\frac{v^2}{2} = p_0, \tag{15.39}$$

que permiten conocer cualquier magnitud fluida, T, ρ o p, si se conocen las de remanso y la velocidad v. La ecuación (15.39) procede de ser $h = w$ y de la conservación de la entalpía de remanso, ecuación (15.30) [o (15.31)], que se convierte ahora en la conservación de la *presión de remanso*.

Para que las relaciones mostradas tanto para gases como para líquidos sean válidas, es decir, para que se conserven las magnitudes de remanso, se tienen que verificar ciertas condiciones que resumidas son:

I flujo ideal (viscosidad y conductividad térmica despreciables, $Re \gg 1$);

II fuerzas másicas despreciables;

III movimiento sin adición o eliminación de calor ($Q_r = 0$); y

IV movimiento casi estacionario ($St \ll 1$).

Las condiciones I y III pueden agruparse en una sola, que el movimiento sea isentrópico. Verificadas, por tanto, las condiciones I–IV y conocidas las condiciones de remanso, se necesitará conocer M, para gases, o v, para líquidos, para conocer cualquier otra magnitud fluida. En un movimiento particular, M o v se obtienen de la otra ecuación que falta, la de continuidad, que es la única que habrá que resolver. Pero las relaciones anteriores son generales, independientes del movimiento concreto, siempre que se cumplan los requisitos enunciados.

15.7. Ejemplo de aplicación

El depósito cilíndrico de sección A de la figura contiene un líquido de densidad ρ hasta una altura inicial de H_0. El depósito descarga su contenido a partir de $t = 0$ por un agujero de diámetro D (siendo $D^2 \ll A$) hecho en su fondo. Suponiendo que el movimiento se puede considerar como ideal, obtener la ecuación diferencial que gobierna la evolución de la superficie libre del líquido $H(t)$ con el tiempo. Dar también las condiciones bajo las cuales la solución obtenida sería válida.

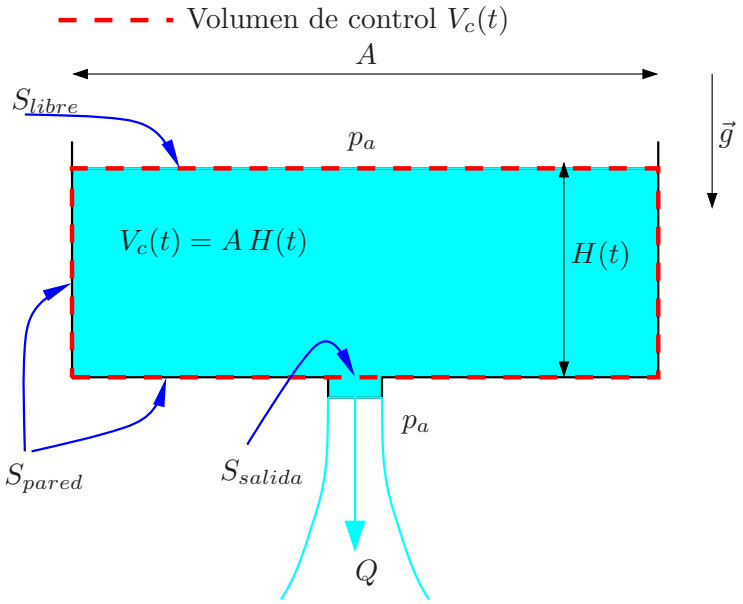


Figura 15.5: Descarga de un depósito por un agujero en su fondo.

Del Principio de Conservación de Masa aplicado sobre $V_c(t)$ se tiene:

$$\frac{d}{dt}\int_{V_f(t)} \rho dV =$$
$$\frac{d}{dt}\int_{V_c(t)} \rho dV + \int_{S_c(t)} \rho(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot\vec{n}dS = 0,$$

donde, para obtener la segunda ecuación, se ha hecho uso del Teorema de Transporte de Reynolds. Su primer término de evolución temporal se puede escribir como

$$\frac{d}{dt}\int_{V_c(t)} \rho dV = \rho\frac{d}{dt}[V_c(t)] = \rho A\frac{dH}{dt},$$

mientras que el segundo, el término convectivo, queda como:
Sobre S_{pared}: $\vec{v} = (0,0,0) = \vec{v}_c$,

$$\int_{S_{pared}} \rho(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot\vec{n}dS = 0.$$

Sobre S_{libre}: $\vec{v} = (0,0,\frac{dH}{dt})$, $\vec{v}_c = (0,0,\frac{dH}{dt})$, $\vec{n} = (0,0,1)$,

$$\int_{S_{libre}} \rho(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot\vec{n}dS = 0.$$

Sobre S_{salida}: $\vec{v} = (-v,0,0), \vec{v}_c = (0,0,0)$, $\vec{n} = (-1,0,0)$,

$$\int_{S_{salida}} \rho(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot\vec{n}dS = \rho v\frac{\pi D^2}{4} = \rho Q,$$

donde se ha tenido en cuenta que, al ser ideal, el perfil de velocidad a la salida es constante. Agrupando todos los términos se tiene

$$\rho A\frac{dH}{dt} + \rho v\frac{\pi D^2}{4} = 0,$$

que se puede reescribir como

$$-A\frac{dH}{dt} = v\frac{\pi D^2}{4}. \tag{15.40}$$

Si definimos $V \equiv \dfrac{dH}{dt}$ entonces

$$-AV = v\frac{\pi D^2}{4}, \quad -V = v\frac{\pi D^2}{4A},$$
$$\Rightarrow -V \ll v, \tag{15.41}$$

debido a que, según el enunciado, $D^2 \ll A$.

La ecuación (15.40) tiene 2 incógnitas: H y v. Por tanto, se necesita otra ecuación más que, puesto que el movimiento se puede considerar ideal, es la ecuación de Bernoulli, si se cumplen los demás requisitos que ahora comprobaremos.

Suponiendo que las condiciones del Teorema de Bernoulli se cumplen, lo vamos a evaluar a lo largo de una línea de corriente. Supongamos la línea de corriente que va desde el punto 1 al 2 en la figura 15.6.[1] Las condiciones en 1 son: $p = p_a$, $z = H(t)$, $v = V$ y (15.17) da

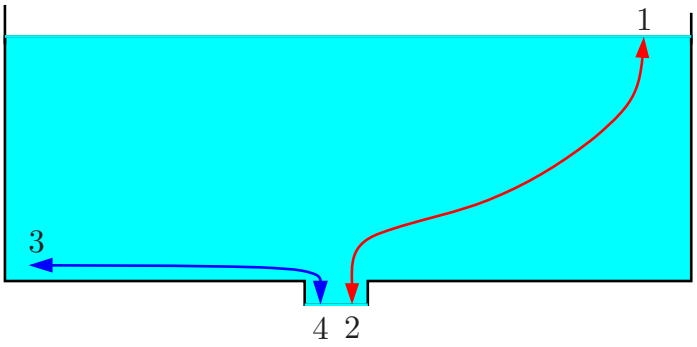


Figura 15.6: Línea de corriente para aplicar Bernoulli.

$$H_1 = \frac{V^2}{2} + \frac{p_a}{\rho} + gH.$$

Por otro lado, las condiciones en 2 son: $p = p_a$, $z = 0$, $v = v$ y (15.17) da

$$H_2 = \frac{v^2}{2} + \frac{p_a}{\rho}.$$

Puesto que la línea de corriente es la misma, se debe cumplir que $H_1 = H_2$, es decir,

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p_a}{\rho} + gH = \frac{v^2}{2} + \frac{p_a}{\rho}$$

$$v^2 - V^2 \approx v^2 = 2gH,$$

donde en esta última se ha usado (15.41). Finalmente:

$$v = \sqrt{2gH}.$$

Por tanto, el par de ecuaciones para resolver las incógnitas H y v, junto con la condición inicial necesaria, son

$$-A\frac{dH}{dt} = v\frac{\pi D^2}{4},\ v = \sqrt{2gH},\ H(t=0) = H_0.$$

Así, combinando ambas, una única ecuación se puede escribir como

$$-A\frac{dH}{dt} = \frac{\pi D^2}{4}\sqrt{2gH},\ H(t=0) = H_0. \tag{15.42}$$

[1] El mismo resultado se obtendría si aplicamos la conservación de la presión de remanso entre los puntos 3 y 4, entre los que las fuerzas másicas son despreciables por ser un movimiento prácticamente horizontal, siendo la velocidad en 3 despreciable en comparación con la de 4 y la presión allí la dada por fluidostática.

Para resolver esta ecuación se va a adimensionalizar a través de las variables adimensionales

$$\eta = \frac{H}{H_0}, \text{ y } \tau = \frac{t}{t_0},$$

donde t_0 es un tiempo característico. Por tanto, (15.42) queda como

$$\frac{-4AH_0}{t_0\pi D^2\sqrt{2gH_0}}\frac{d\eta}{d\tau} = \sqrt{\eta},$$

o simplificando

$$-\left(\frac{4A\sqrt{H_0}}{t_0\pi D^2\sqrt{2g}}\right)\frac{d\eta}{d\tau} = \sqrt{\eta}.$$

Como los términos asociados a variables adimensionales son de orden unidad, también lo debe de ser el término entre paréntesis. En efecto, si

$$\frac{4A\sqrt{H_0}}{t_0\pi D^2\sqrt{2g}} \sim 1,$$

de esta expresión se puede estimar t_0 como

$$t_0 \sim \frac{4A\sqrt{H_0}}{\pi D^2\sqrt{2g}}.$$

En realidad, t_0 es una estimación del tiempo que $H(t)$ varía desde H_0 a 0 (es decir, una estimación del tiempo de descarga del depósito).

Por tanto, (15.42) en forma adimensional queda como

$$-\frac{d\eta}{d\tau} = \sqrt{\eta},$$

que integrada con la condición inicial adimensional $\eta(0) = 1$ proporciona la solución que estábamos buscando:

$$\eta = \left(1 - \frac{\tau}{2}\right)^2,$$

o de modo dimensional:

$$H = H_0\left(1 - \frac{t}{2t_0}\right)^2. \tag{15.43}$$

El tiempo exacto de vaciado t_v, aquel para el que $H = 0$, es $t_v = 2t_0$, el doble que el estimado t_0.

En la figura 15.7 se muestra, en variables adimensionales, la evolución temporal de la superficie libre.

Una vez resuelto el problema, queda comprobar si se cumplen las hipótesis del Teorema de Bernoulli que han sido utilizadas implícitamente en la obtención de la solución:

Fluido ideal: Se cumple si $Re \gg 1$;

Flujo casi estacionario: Se cumple si $St \ll 1$;

Flujo barótropo: Lo es, puesto que se trata del movimiento de un líquido con $\rho =$ constante; y

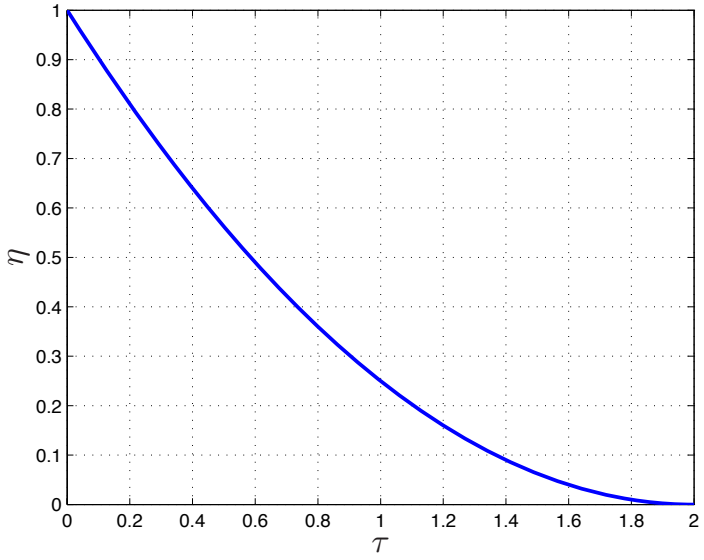


Figura 15.7: Evolución temporal de la superficie libre del liquido contenido en el depósito.

Fuerzas másicas derivan de un potencial, $\vec{f_m} = -\nabla U$: Se cumple, con $U = gz$.

Por tanto, sólo para las dos primeras hay que ver qué condición implican. Por un lado, el número de Reynolds se define como

$$Re = \frac{\rho V_c L_c}{\mu}.$$

que, usando $L_c = H_0$ y $V_c \sim \sqrt{2gH_0}$, se tiene

$$Re = \frac{\rho\sqrt{2gH_0}H_0}{\mu} = \frac{\sqrt{2g}H_0^{3/2}}{\nu} \gg 1.$$

Por lo que H_0 debe verificar

$$H_0 \gg \left(\frac{\nu}{\sqrt{2g}}\right)^{2/3}.$$

Por otro lado, el número de Strouhal se define como

$$St = \frac{L_c/V_c}{t_0}.$$

Usando los valores conocidos de L_c, V_c y t_0, la condición de movimiento casi estacionario proporciona

$$St = \frac{H_0/\sqrt{2gH_0}}{\frac{4A\sqrt{H_0}}{\pi D^2\sqrt{2g}}} = \frac{\pi D^2}{4A} \ll 1,$$

es decir,

$$D^2 \ll A, \text{ o lo que es lo mismo, } A \gg D^2,$$

condición dada por válida en el enunciado del problema y no proporciona, por tanto, información nueva.

Resumiendo, para que la solución (15.43) sea válida, la única condición que tienen que cumplir los datos del problema es que $H_0 \gg \left(\frac{\nu}{\sqrt{2g}}\right)^{2/3}$.

Referencias.

- D.J. ACHESON, 1990. Capítulo 1.
- G.K. BATCHELOR, 1967. Capítulo 3.
- R. FERNÁNDEZ FERIA, 2005. Capítulos 19 y 20.
- H.W. LIEPMANN y A. ROSHKO, 1957. Capítulo 2.
- I.L. RYHMING, 1991. Capítulo 4.

CAPÍTULO 16

Discontinuidades en los movimientos ideales. Ondas de choque.

16.1. Introducción

Como se comentó en la lección anterior, las soluciones de las ecuaciones de Euler, que describen el movimiento ideal de un fluido, a veces presentan discontinuidades. En esta lección se abordará el estudio general del tipo de discontinuidades que se presentan en el interior del flujo (en contraposición a las que se producen sobre superficies sólidas, o capas límites, que se abordarán en la Lección 19).

Se verá que el tipo más relevante de estas discontinuidades se presenta siempre en flujos ideales *supersónicos,* como, por ejemplo, en el flujo alrededor de un obstáculo ilustrado en la figura 16.1. Desde un punto de vista físico, la presencia del obstáculo se deja sentir en el movimiento del fluido mediante la emisión continua de pequeñas perturbaciones u ondas sonoras que *informan* al fluido incidente sobre su presencia. Esta información, como sonido que es, viaja a la velocidad del sonido a. Así, si el flujo es subsónico ($V < a$), las ondas sonoras pueden *avisar* a la corriente incidente sobre la presencia del obstáculo, que así se amolda a su presencia bastante antes de llegar a él. Sin embargo, si la corriente incidente es supersónica ($V > a$), la información sobre el obstáculo no puede llegar a la corriente incidente; las ondas sonoras emitidas por el obstáculo se agolpan a una corta distancia de él y producen una discontinuidad denominada **onda de choque.** Aguas arriba de la onda de choque la corriente no *percibe* la presencia del obstáculo. A través de la onda de choque el flujo pasa de supersónico a subsónico (como se verá más adelante en esta lección) de forma que detrás de la onda de choque la corriente se *acomoda* rápidamente en una distancia pequeña a la presencia del obstáculo. Una característica, por tanto, general a todas las situaciones en las que aparece una onda de choque es que el flujo es supersónico en alguna región del movimiento, pasando a subsónico a través de una discontinuidad.

Por supuesto, las presuntas discontinuidades no son tales en un flujo *real,* sino que son regiones delgadas donde los gradientes de las magnitudes fluidas son tan acusados que en su interior los fenómenos disipativos asociados a la viscosidad y a la conductividad del fluido son importantes y la hipótesis de flujo ideal falla. A altos números de Reynolds, $Re \to \infty$, el espesor de estas regiones tiende formalmente a cero y, por tanto, desde el punto de vista de la teoría de los movimientos ideales se considerarán como discontinuidades, sin estructura

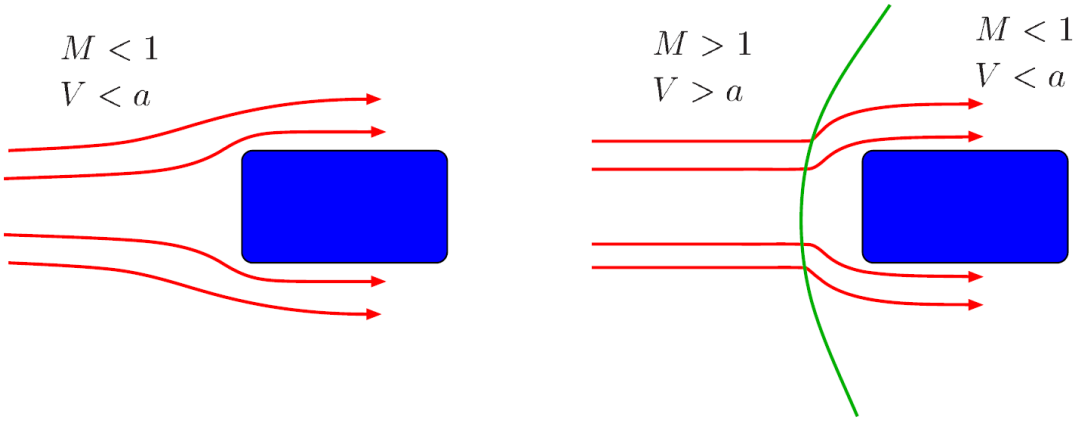


Figura 16.1: Flujo subsónico y supersónico alrededor de un obstáculo.

interna. En lo que sigue se derivarán relaciones cuantitativas generales de los cambios en las magnitudes fluidas a través de estas discontinuidades.[1]

16.2. Ecuaciones de conservación a través de una discontinuidad

Considérese una superficie con forma arbitraria a través de la cual las magnitudes fluidas ($\vec{v}, p$ y ρ) experimentan un salto finito. Para obtener las relaciones que ligan las condiciones delante de la discontinuidad con las de detrás, se aplicarán las leyes de conservación de masa, cantidad de movimiento y energía en forma integral a un cilindro infinitesimal como el mostrado en la figura 16.2(a) y cuyo volumen es $dV = ds\,\delta$, siendo δ la altura de la superficie lateral que cruza la discontinuidad y ds el área de las otras dos superficies planas, paralelas y tangentes a la discontinuidad en el punto considerado de ella, de normal unitaria $\vec{n}$. El área ds verifica

$$ds^{1/2} \sim R \gg \delta, \tag{16.1}$$

donde R sería el radio del cilindro. Este requisito es siempre posible ya que se trata de una discontinuidad matemática y, a pesar de que ds es también infinitesimal, δ puede hacerse tan pequeño como se quiera.

En la realidad, la discontinuidad tiene espesor finito, pero tiende a cero en un movimiento ideal, es decir, en el límite $Re \to \infty$; la única limitación sobre δ es que debe ser lo suficientemente grande como para que las dos superficies frontales del volumen estén *inmersas* en el flujo ideal, *lejos* de la región de transición donde los efectos disipativos son importantes.

El cumplimiento de la condición (16.1) implica, por un lado, que los flujos de las magnitudes fluidas a través de la superficie lateral del volumen de control son muy pequeños

[1] El estudio de la estructura interna tiene relevancia cuando se estudian las *discontinuidades* que aparecen en los procesos de combustión, como las detonaciones (que son un tipo particular de ondas de choque) y las deflagraciones. El estudiante interesado puede consultar, por ejemplo, MILLÁN BARBANY, 1975, o Fernández Feria y del Pino, 2006, *Introducción a la combustión* (Universidad de Málaga). La estructura interna es también relevante, como se verá, en las denominadas *discontinuidades tangenciales*. Aquí nos centraremos, sobre todo, en las discontinuidades normales u ondas de choque, en las que el estudio de la estructura interna es rara vez relevante desde un punto de vista ingenieril.

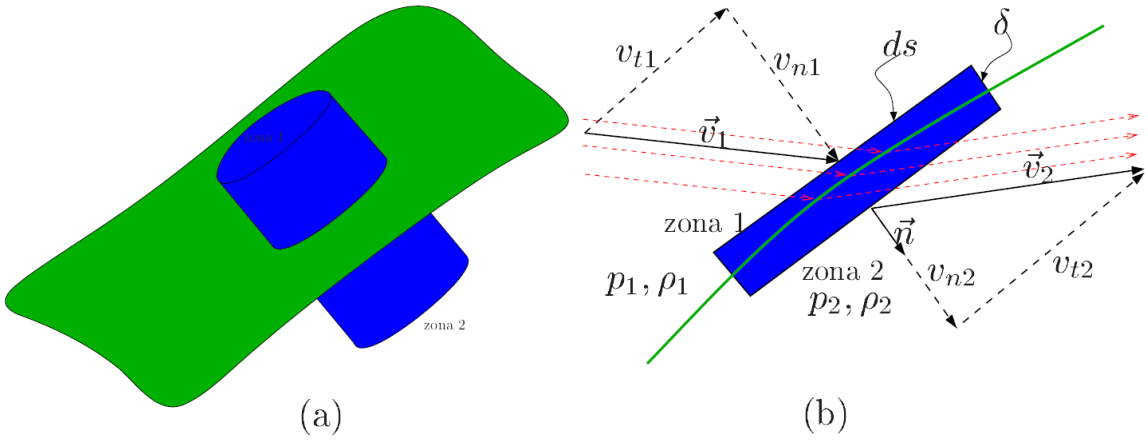


Figura 16.2: Discontinuidad y volumen de control: (a) vista 3D y (b) vista lateral con propiedades fluidas a un lado y a otro de ella. Las líneas rojas a trazos representan varias líneas de corriente, paralelas al vector velocidad, a un lado y a otro de la discontinuidad.

comparados con los flujos frontales, es decir,

$$\int_{S_{lat}} \phi \vec{v} \cdot \vec{n} dS \ll \int_{ds_{1,2}} \phi \vec{v} \cdot \vec{n} dS. \tag{16.2}$$

donde ϕ es cualquier magnitud fluida. Por otro lado, implica también que los términos volumétricos de las ecuaciones de conservación, proporcionales a $\delta ds/t_0$, donde t_0 es un tiempo característico asociado a la posible variación temporal de ϕ, son también despreciables frente a los convectivos sobre las superficies frontales, de orden $\vec{v} \cdot \vec{n} ds$; es decir,

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c} \phi dV \ll \int_{S_{1,2}} \phi \vec{v} \cdot \vec{n} dS. \tag{16.3}$$

Con estas condiciones, la ecuación de conservación de masa se escribe, en un **sistema de referencia estacionario con la discontinuidad,**

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho dV + \int_{S_c} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS \simeq \int_{S_c} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = 0\,; \tag{16.4}$$

$$\int_{S_{lat}} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS + \int_{S_1} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS + \int_{S_2} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS \simeq$$

$$\simeq \int_{S_1} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS + \int_{S_2} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \rho_1 \vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1 ds + \rho_2 \vec{v}_2 \cdot \vec{n}_2 ds = 0\,. \tag{16.5}$$

Por la geometría del volumen de control infinitesimal, $\vec{n}_1 = -\vec{n}_2$. Si definimos $\vec{n}_2 \equiv \vec{n}$ (ver figura 16.2), entonces $\vec{n}_1 = -\vec{n}$, por lo que (16.5) se escribe

$$\rho_1 \vec{v}_1 \cdot \vec{n} ds = \rho_2 \vec{v}_2 \cdot \vec{n} ds. \tag{16.6}$$

Teniendo en cuenta estas mismas consideraciones en la ecuación de cantidad de movimiento aplicada al volumen de control infinitesimal, se tiene

$$\int_{S_c} \rho \vec{v} \vec{v} \cdot \vec{n} dS = -\int_{S_c} p \vec{n} dS, \tag{16.7}$$

que evaluando sólo en las secciones 1 y 2, proporciona

$$-\rho_1(\vec{v}_1\cdot\vec{n})\vec{v}_1 ds+\rho_2(\vec{v}_2\cdot\vec{n})\vec{v}_2 ds=(p_1-p_2)\vec{n}ds. \tag{16.8}$$

Finalmente, la ecuación de la energía total se simplifica a

$$\int_{S_c}\rho(e+v^2/2)\vec{v}\cdot\vec{n}dS=-\int_{S_c}p\vec{v}\cdot\vec{n}dS, \tag{16.9}$$

en donde se ha supuesto despreciable la posible generación de calor en el interior del volumen de control.[2] Evaluada en 1 y 2, queda como

$$\begin{aligned}-\rho_1\left(e_1+\frac{v_1^2}{2}\right)\vec{v}_1\cdot\vec{n}dS+\rho_2\left(e_2+\frac{v_2^2}{2}\right)\vec{v}_2\cdot\vec{n}dS=\\ =p_1\vec{v}_1\cdot\vec{n}dS-p_2\vec{v}_2\cdot\vec{n}dS.\end{aligned} \tag{16.10}$$

Para escribir estas ecuaciones en su forma habitual, se descomponen en dos partes, una para la dirección tangencial t a la discontinuidad, y otra para la normal n. Para ello, descomponemos el vector velocidad según sus componentes t y n:

$$\vec{v}=\vec{v}_n+\vec{v}_t,\ \vec{v}_n=v_n\vec{n},\ v_n=\vec{v}\cdot\vec{n},\ \vec{v}_t=\vec{v}-v_n\cdot\vec{n}. \tag{16.11}$$

Usando $v_{n1,2}$ y $\vec{v}_{t1,2}$, las ecuaciones (16.6), (16.8) y (16.10) se escriben:

$$\rho_1 v_{n1}=\rho_2 v_{n2}, \tag{16.12}$$

$$p_1+\rho_1 v_{n1}^2=p_2+\rho_1 v_{n2}^2, \tag{16.13}$$

$$\rho_1 v_{n1}\vec{v}_{t1}=\rho_2 v_{n2}\vec{v}_{t2}, \tag{16.14}$$

$$\rho_1 v_{n1}(h_1+v_1^2/2)=\rho_2 v_{n2}(h_2+v_2^2/2), \tag{16.15}$$

donde $h=e+p/\rho$.

Las discontinuidades fluidas descritas por las ecuaciones anteriores se suelen clasificar en normales o tangenciales, en función de que exista, o no, flujo másico a través de la misma.

16.3. Discontinuidad tangencial

En este tipo de discontinuidades no existe flujo másico a través de ella: $v_{n1}=v_{n2}=0$ (ver figura 16.3). Por tanto, las ecuaciones de conservación (16.12)-(16.15) se escriben:

$$\begin{aligned}0&=0,\\ p_1&=p_2,\\ 0&=0,\\ 0&=0.\end{aligned}$$

[2] Este término sí sería importante en las discontinuidades que aparecen en los procesos de combustión mencionadas en la nota anterior.

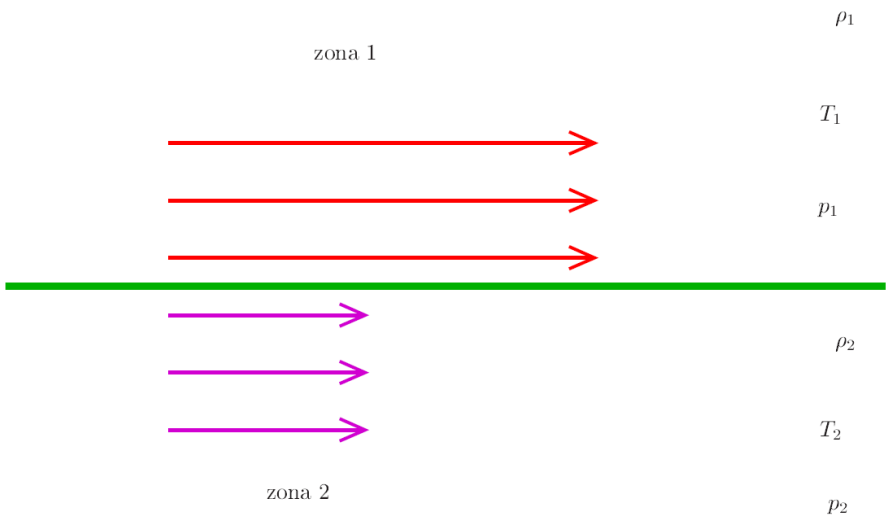


Figura 16.3: Discontinuidad tangencial

Como se observa, tres de ellas se satisfacen idénticamente para valores arbitrarios de los saltos de las magnitudes fluidas (por ser ambos miembros nulos) y la segunda implica que en una discontinuidad tangencial $p_1 = p_2$. Físicamente, si las presiones fuesen distintas implicaría la existencia de un flujo másico a través de la discontinuidad, flujo que hemos supuesto nulo. Las magnitudes ρ_1, ρ_2, $\vec{v}_{t1}$, $\vec{v}_{t2}$, h_1 y h_2 pueden tomar cualquier valor. Por tanto, en una discontinuidad tangencial son continuas las magnitudes p y v_n y discontinuas todas las demás.

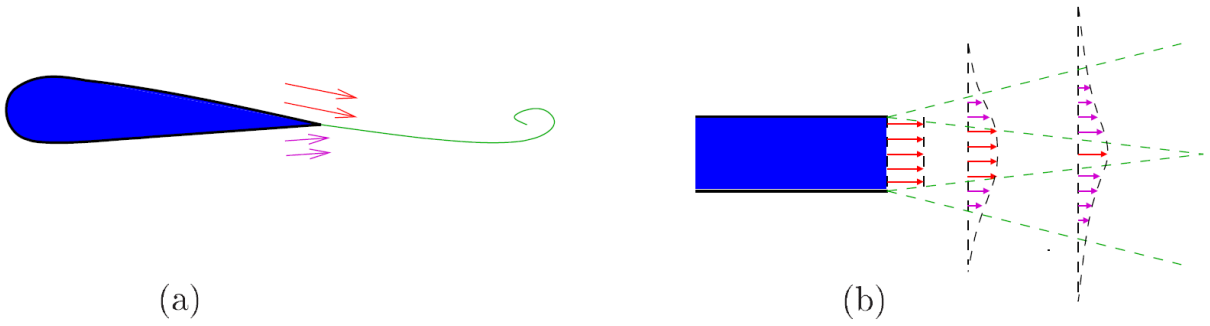


Figura 16.4: Ejemplos de discontinuidades tangenciales: (a) en el borde de salida de un perfil aerodinámico y (b) en la descarga de un chorro de un fluido en otro.

Las discontinuidades tangenciales se forman cuando dos flujos ideales paralelos con distinta velocidad (y, también, con distinta densidad y temperatura, en general) se ponen en contacto, como, por ejemplo, en el borde de salida de un perfil aerodinámico, o en la *capa de mezcla* de un chorro que descarga en el mismo, o en otro, fluido en reposo (ver figura 16.4).

Las discontinuidades tangenciales no suelen perdurar mucho aguas abajo del lugar donde se ponen en contacto las dos corrientes fluidas, pues el movimiento del fluido interno a la misma suele ser muy inestable y la inestabilidad destruye la discontinuidad. Por ello, en estos casos, el estudio de la estructura interna de la discontinuidad, no considerado aquí, es muy relevante [ver figura 16.4(b)]

16.4. Discontinuidad normal. Onda de choque. Relaciones de Rankine–Hugoniot

Discontinuidad normal es aquella en la que existe flujo másico normal a la superficie de discontinuidad; es decir, $v_{n1} \neq v_{n2}$, con $v_{n1} \neq 0$, $v_{n2} \neq 0$. Por tanto, las ecuaciones (16.12)-(16.15) quedan:

$$\rho_1 v_{n1} = \rho_2 v_{n2}, \tag{16.16}$$

$$p_1 + \rho_1 v_{n1}^2 = p_2 + \rho_1 v_{n2}^2, \tag{16.17}$$

$$\vec{v}_{t1} = \vec{v}_{t2}, \tag{16.18}$$

$$h_1 + v_1^2/2 = h_2 + v_2^2/2. \tag{16.19}$$

Como se observa, la entalpía de remanso se conserva a través de la discontinuidad, ecuación (16.19), pero no la presión de remanso [la magnitud conservada en (16.17) no tiene nada que ver con la presión de remanso]. Estas relaciones se suelen llamar de Rankine–Hugoniot.

Aparte de las ondas de choque, de las que se han mencionado algunos ejemplos y se estudiarán algunos más en esta lección y en la siguiente, otros ejemplos de discontinuidades normales son los frentes de combustión comentados en la nota 1: las deflagraciones y las detonaciones.

En lo que resta de lección nos ocuparemos sólo de un caso particular de las discontinuidades normales: las ondas de choque en gases perfectos, que son las más relevantes en los movimientos fluidos ideales de interés en la Ingeniería.[3]

16.5. Curva de Hugoniot

De las relaciones (16.16)-(16.19) para un gas perfecto, teniendo en cuenta que $h = \dfrac{\gamma}{\gamma-1}\dfrac{p}{\rho}$, se obtiene la siguiente relación entre los saltos de presión y de densidad a través de una onda de choque:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\frac{1}{\rho_1/\rho_2} - 1}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} - \frac{1}{\rho_1/\rho_2}}, \tag{16.20}$$

relación que se conoce como Relación de Hugoniot.

El principal interés de esta relación es que ayuda a distinguir de una forma gráfica sencilla qué tipo de ondas de choque son posibles en la práctica. Pues en las relaciones de Rankine-Hugoniot se ha utilizado el Primer Principio de la Termodinámica [la conservación de la

[3] Las ondas de choque en líquidos, que en el flujo en tuberías se suelen denominar *golpe de ariete,* son también muy relevantes en la Ingeniería Industrial, pero se considerarán en otra asignatura de la titulación.

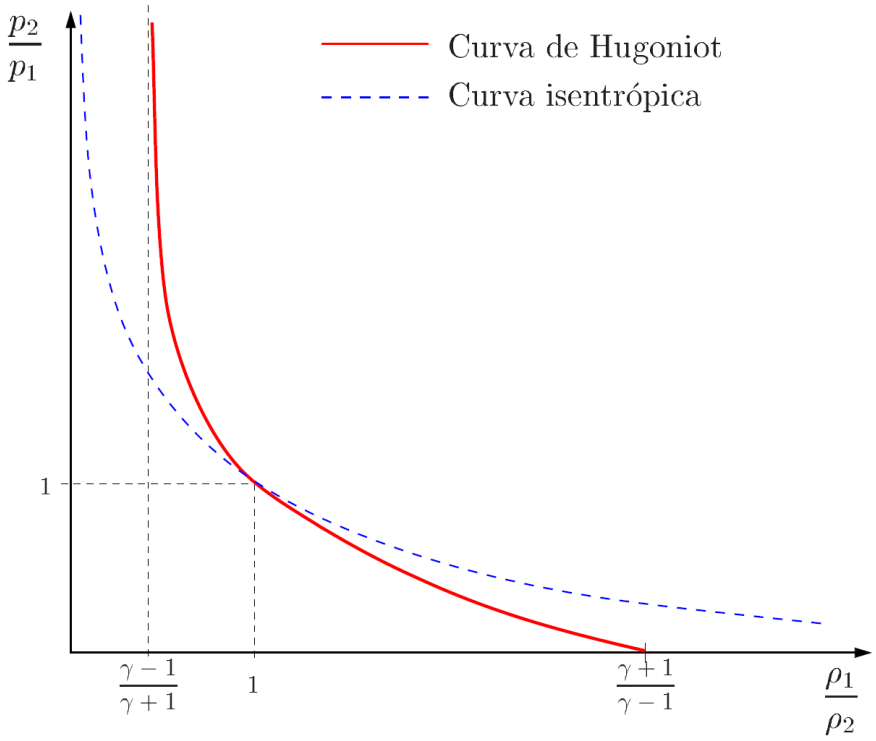


Figura 16.5: Curva de Hugoniot

energía (16.19)], pero no el Segundo Principio de la Termodinámica, que nos dice que la entropía debe aumentar a través de la onda de choque, $s_2 > s_1$, pues en el *interior* de la discontinuidad los procesos disipativos asociados a la viscosidad y a la conducción de calor no son, ni mucho menos, despreciables. Por tanto, no todos los saltos de las magnitudes fluidas dados por las relaciones de Rankine-Hugoniot y, en particular, no todos los saltos de presión dados por (16.20), son posibles, solo aquellos en los que $s_2 > s_1$. Para ver cuáles son los saltos posibles se va a dibujar en una misma figura la curva de Hugoniot dada por (16.20) junto con la correspondiente curva para un proceso isentrópico.

Si el proceso fuese isentrópico, es decir, si se cumpliera (para un gas ideal) que $p/\rho^\gamma =$ constante, se tendría para el salto de presiones

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^\gamma = \left(\frac{1}{\rho_1/\rho_2}\right)^\gamma . \tag{16.21}$$

La comparación gráfica de ambas ecuaciones (figura 16.5) nos indica que el proceso a través de una onda de choque no es, como ya sabíamos, isentrópico. Sólo en torno a $p_2/p_1 \simeq 1$, cuando la onda de choque es muy *débil*, se puede decir que es casi isentrópica (ambas curvas se solapan).[4] Como la entropía debe crecer a través de la discontinuidad, $s_2 - s_1 \geq 0$, usando

[4]Esto se puede demostrar matemáticamente haciendo el desarrollo en serie de la Relación de Hugoniot alrededor de $\rho_2/\rho_1 - 1 \ll 1$ y comparándolo con desarrollo de la relación isentrópica alrededor de $\rho_2/\rho_1 = 1$.

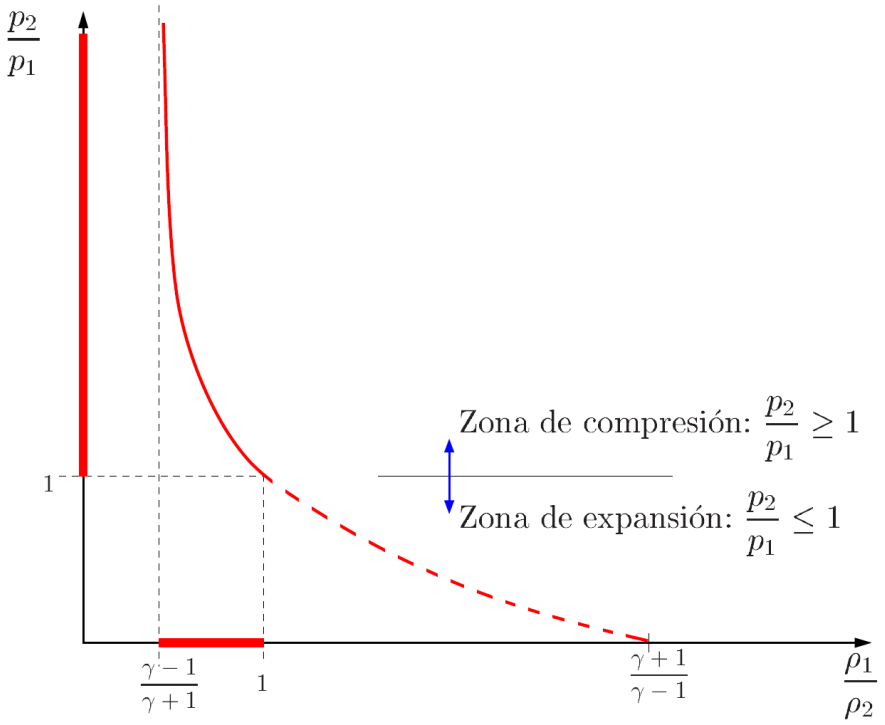


Figura 16.6: Curva de Hugoniot: rango de validez de la curva y ejes.

la ecuación de estado en términos de la entropía, $s = c_v \ln\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right)$, se tiene que

$$\frac{s_2 - s_1}{c_v} = \ln \frac{p_2}{\rho_2^\gamma} - \ln \frac{p_1}{\rho_1^\gamma} = \ln \left[\frac{p_2}{p_1} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^\gamma \right] \geq 0\,; \tag{16.22}$$

es decir,

$$\left[\frac{p_2}{p_1} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^\gamma \right] \geq 1, \tag{16.23}$$

que usando (16.20) implica que

$$\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \leq \frac{\rho_1}{\rho_2} \leq 1. \tag{16.24}$$

Si esto lo reflejamos en la curva de Hugoniot se tiene la figura 16.6, donde se muestra la parte físicamente válida de la curva de Hugoniot junto con el rango de posible variación tanto de $\frac{\rho_1}{\rho_2}$ como de $\frac{p_2}{p_1}$ en negrita en cada uno de sus ejes, lo cual implica que una onda de choque sólo puede ser de compresión, aumentando la presión a través de ella:

$$1 \leq \frac{p_2}{p_1} < \infty. \tag{16.25}$$

De esta manera se excluye la parte inferior de la curva de Hugoniot (parte a trazos en la figura 16.6), correspondiente a una onda de expansión, como físicamente imposible. De estas expresiones y de las relaciones de Rankine-Hugoniot se tienen las siguientes desigualdades

para las restantes magnitudes fluidas:

$$\frac{\gamma-1}{\gamma+1} < \frac{v_{n2}}{v_{n1}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \leq 1, \tag{16.26}$$

$$1 \leq \frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1}\frac{\rho_1}{\rho_2} < \infty, \tag{16.27}$$

$$0 < \frac{M_{n2}}{M_{n1}} = \frac{v_{n2}}{v_{n1}}\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} \leq 1, \tag{16.28}$$

donde M_n es el número de Mach basado en la componente normal de la velocidad v_n. Se tiene, por tanto que, a través de una onda de choque, la presión, la temperatura y la densidad del gas aumentan [las dos primeras magnitudes pueden hacerlo indefinidamente y la densidad hasta el límite dado por (16.24)], mientras que la velocidad y el número de Mach decrecen (tanto en sus componentes normales como en sus valores absolutos, puesto que la componente tangencial de la velocidad se conserva). En cuanto a las magnitudes de remanso, de las relaciones (15.33)-(15.36), se tiene:

$$\frac{p_{20}}{p_{10}} = \frac{p_2}{p_1}\frac{\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_2^2\right)^{\gamma/(\gamma-1)}}{\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^2\right)^{\gamma/(\gamma-1)}} = \frac{p_2}{p_1}\left(\frac{\rho_{20}}{\rho_{10}}\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{\gamma} \geq \left(\frac{\rho_{20}}{\rho_{10}}\right)^{\gamma}, \tag{16.29}$$

puesto que, de (16.22), $p_2\rho_1^{\gamma}/p_1\rho_2^{\gamma} \geq 1$. Como la entalpía de remanso se conserva,

$$T_{20} = T_{10},\ \frac{p_{20}}{p_{10}} = \frac{\rho_{20}}{\rho_{10}}, \tag{16.30}$$

que, comparando con (16.29), se llega a

$$\left(\frac{\rho_{20}}{\rho_{10}}\right)^{\gamma-1} \leq 1, \tag{16.31}$$

de donde se deduce que, al ser $\gamma > 1$, tanto la densidad de remanso como la presión de remanso disminuyen a través de una onda de choque, mientras que la temperatura (entalpía) de remanso se conserva:

$$\rho_{20} \leq \rho_{10},\ p_{20} \leq p_{10},\ T_{20} = T_{10}. \tag{16.32}$$

El hecho de que no se conserven todas las magnitudes de remanso es consecuencia de que el flujo a través de una onda de choque no es isentrópico, con lo que estas magnitudes decrecen al aumentar la entropía. Esto no incluye a la temperatura de remanso ya que la entalpía de remanso sí se conserva por ser la onda de choque un proceso donde no se realiza trabajo alguno ni se intercambia calor y es casi estacionario dado que el espesor es teóricamente nulo (cosa que no ocurre en un frente de combustión, donde se libera calor por reacción química, ni en una onda de choque que emitiera o absorbiera energía radiante).

16.6. Ondas de choque normales en gases perfectos

Para calcular cuantitativamente los saltos de las magnitudes fluidas a través de una onda de choque mediante las relaciones de Rankine-Hugoniot es conveniente expresarlas en términos del número de Mach de la corriente incidente. Aquí se va a considerar solo el caso

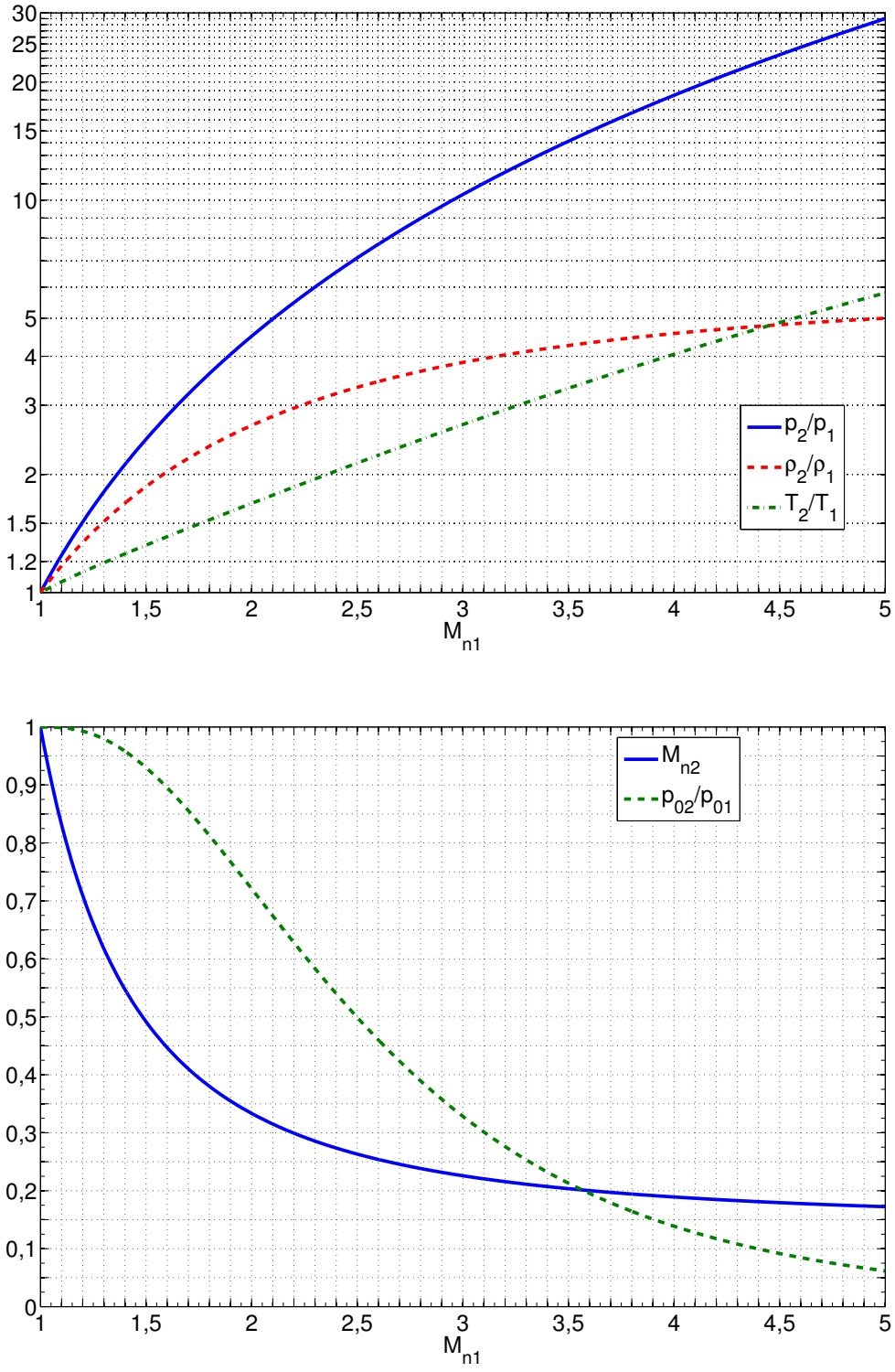


Figura 16.7: Relaciones para las magnitudes fluidas detrás de una onda de choque en función del número de Mach normal de la corriente incidente para $\gamma = 1{,}4$.

más simple de una onda de choque normal, que es además el que más interés tiene para los flujos ideales en conductos considerados en la lección siguiente.

Una onda de choque normal es aquella en la que tanto la corriente incidente como la saliente son normales a la onda: $\vec{v}_t = 0,\ \vec{v} = v_n\vec{n} \equiv v\vec{n}$. Por supuesto, este tipo de ondas de choque sólo se pueden producir en movimientos unidireccionales. En este caso, las relaciones de Rankine-Hugoniot (16.16)–(16.19) se suelen escribir en función del número de Mach de la corriente incidente:

$$M_1^2 = M_{n1}^2 = \frac{v_1^2}{a_1^2}. \tag{16.33}$$

Teniendo en cuenta que se trata de un gas perfecto,

$$h = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho} = \frac{a^2}{\gamma - 1}, \tag{16.34}$$

después de ciertas manipulaciones algebráicas se llega a las siguientes expresiones que relacionan los saltos de las magnitudes fluidas a través de una onda de choque normal en función de M_1^2:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{(\gamma + 1)M_1^2}, \tag{16.35}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M_1^2 + 1 - \gamma}{\gamma + 1}, \tag{16.36}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{(2\gamma M_1^2 + 1 - \gamma)[2 + (\gamma - 1)M_1^2]}{(\gamma + 1)^2 M_1^2}. \tag{16.37}$$

Por otro lado, el número de Mach de la corriente detrás de la onda es

$$M_2^2 = M_{n2}^2 = \frac{v_2^2}{a_2^2} = \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2\gamma M_1^2 + 1 - \gamma}, \tag{16.38}$$

y la diferencia de entropía

$$\begin{aligned} \frac{s_2 - s_1}{c_v} &= \ln\left[\frac{p_2}{p_1}\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^\gamma\right] \\ &= \ln\left[\frac{2\gamma M_1^2 + 1 - \gamma}{\gamma + 1}\left(\frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{(\gamma + 1)M_1^2}\right)^\gamma\right]. \end{aligned} \tag{16.39}$$

Finalmente, teniendo en cuenta las ecuaciones (15.33)–(15.36), las correspondientes expresiones para la presión y la densidad de remanso son:

$$\frac{p_{20}}{p_{10}} = \frac{\rho_{20}}{\rho_{10}} = \left[\frac{M_1^2(\gamma + 1)^{(\gamma+1)/\gamma}}{[2 + (\gamma - 1)M_1^2][2\gamma M_1^2 + 1 - \gamma]^{1/\gamma}}\right]^{\gamma/(\gamma-1)}. \tag{16.40}$$

Las relaciones anteriores permiten obtener las magnitudes fluidas detrás de una onda de choque normal de un gas perfecto conocidas las magnitudes delante de la onda de choque y el número de Mach incidente (y, por supuesto, γ, que depende del gas en cuestión). Algunas de estas relaciones se presentan en la figura 16.7 para $\gamma = 1{,}4$ (para un gas diatómico y, por tanto, valen para el aire de forma aproximada).

Una propiedad muy importante de las relaciones anteriores, consecuencia del Segundo Principio de la Termodinámica, es que el número de Mach incidente es siempre mayor o igual a la unidad, mientras que el número de Mach normal detrás de la onda de choque es siempre menor o igual a la unidad. En efecto, tomando, por ejemplo, la expresión (16.36), como $p_2/p_1 \geq 1$ por ser $s_2 - s_1 \geq 0$, se tiene que

$$2\gamma M_1^2 + 1 - \gamma \geq \gamma + 1, \tag{16.41}$$

que implica $M_{n1}^2 = M_1^2 \geq 1$. Por otro lado, de (16.38) se tiene que, para $M_1^2 \to 1$ (onda de choque débil), $M_{n2}^2 \to 1$, mientras que para $M_{n1}^2 \to \infty$ (onda de choque fuerte), $M_{n2}^2 \to \frac{\gamma-1}{2\gamma}$; es decir, $\frac{\gamma-1}{2\gamma} \leq M_{n2}^2 \leq 1$ (para aire, $0{,}378 \leq M_{n2} \leq 1$). Esto quiere decir que a través de una onda de choque normal el movimiento del gas, relativo a la onda de choque, pasa siempre de supersónico a subsónico, siendo ello consecuencia del Segundo Principio de la Termodinámica.

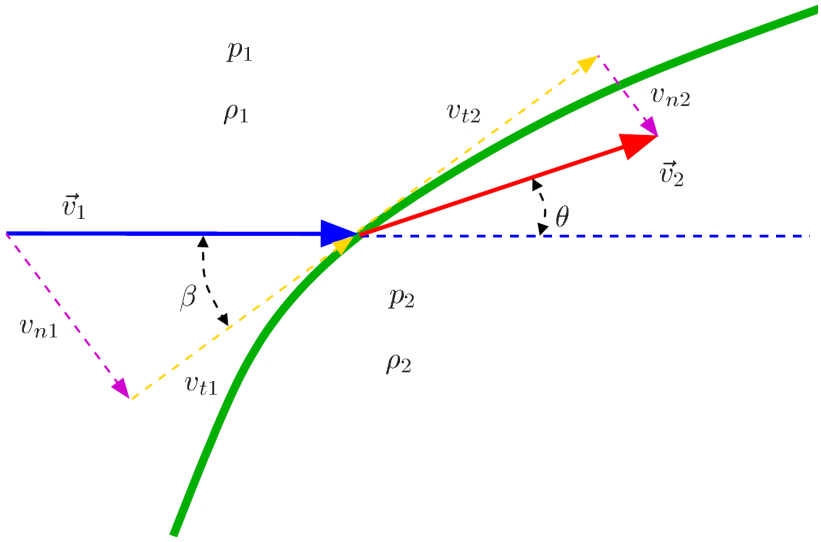


Figura 16.8: Geometría de una onda de choque general.

16.7. Ondas de choque no normales

Las ondas de choque normales sólo se producen en movimientos unidireccionales. En flujos bidimensionales y tridimensionales (supersónicos, pués las relaciones anteriores en términos de M_{n1} siguen siendo válidas localmente y siempre se tiene que $M_1 \geq M_{n1} \geq 1$), las ondas de choque dejan de ser planos perpendiculares al movimiento del fluido, es decir, dejan de ser ondas de choque normales, y las superficies de discontinuidad pueden adoptar cualquier forma, que vendrá dada por la combinación de las ecuaciones de Euler para el flujo ideal correspondiente y las relaciones de Rankine-Hugoniot. En ellas, la componente tangencial de la velocidad ya no es igual a cero, $\vec{v}_t \neq 0$, por lo que $M_2 > M_{n2}$ (ver figura 16.8) y puede ocurrir que M_2 no sea menor que la unidad, aunque M_{n2} será siempre menor que la unidad, como se ha visto en la sección anterior.

Aunque en este curso introductorio a la Mecánica de Fluidos no se van a estudiar estas ondas de choque no normales (ver, por ejemplo, Frnández Feria, 2005), sí es interesante

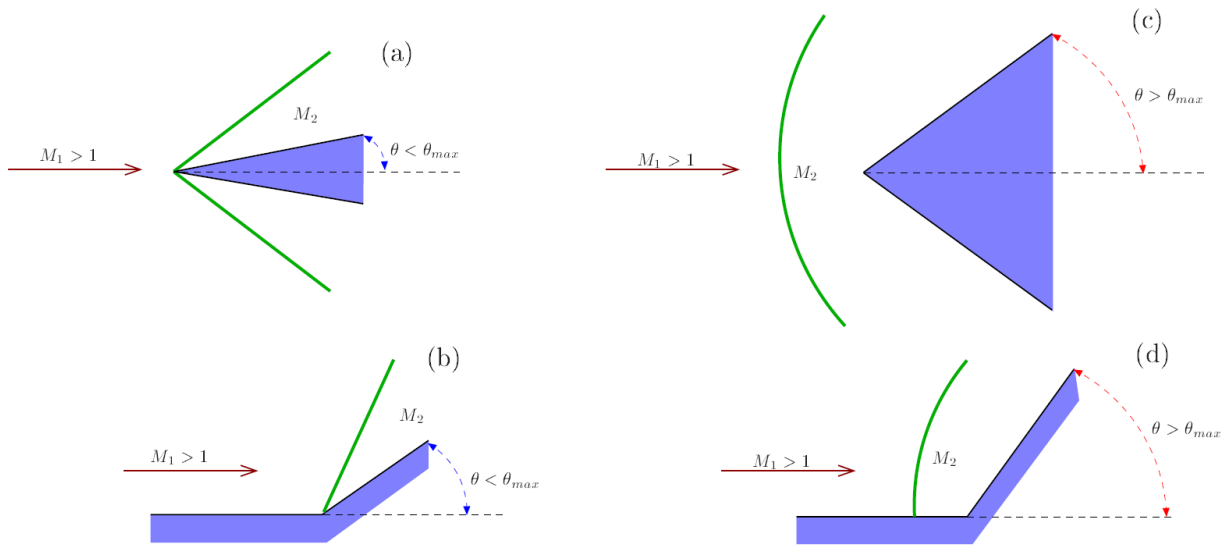


Figura 16.9: Ondas de choque en flujos sobre cuñas y esquinas. Si $\theta > \theta_{max}$ la onda de choque se separa.

comentar que los casos más sencillos se dan en flujos bidimensionales supersónicos en esquinas y cuñas esbeltas, como los ilustrados en la figura 16.9, con la aparición de ondas de choque oblicuas planas siempre que el ángulo θ de desviación de la corriente sea menor que un determinado máximo dado por las relaciones de Rankine-Hugoniot. De hecho, para abordar la resolución de una onda de choque oblicua, se utilizan las relaciones (16.35)–(16.40), que seguirán siendo válidas, pero reemplazando v y M por las componentes normales v_n y M_n de la onda de choque oblicua, y expresando localmente M_1 y M_2 en función de M_{n1} y M_{n2}, respectivamente, y de los ángulos θ y β (ver figura 16.8).

Referencias.

- J.D. ANDERSON, 1990. Capítulos 3 y 4.
- H.W. LIEPMANN y A. ROSHKO, 1957. Capítulo 4.
- R. FERNÁNDEZ FERIA, 2005. Capítulo 22.
- G. MILLÁN BARBANY, 1975. Capítulo II.
- F.M. WHITE, 1983. Capítulo 9.

CAPÍTULO 17

Movimientos ideales en conductos

17.1. Introducción

En esta lección se considerará el movimiento ideal y sin generación de calor (flujo isentrópico) en conductos de sección lentamente variable. Es decir, se considerará que $Q_r = 0$ y que se cumplen las condiciones

$$\frac{D}{L} \ll 1,\ Re\frac{D}{L} \gg 1 \text{ y } Pe\frac{D}{L} \gg 1, \tag{17.1}$$

donde D y L son un diámetro característico y una longitud característica del conducto, respectivamente. La primera condición y la ecuación de continuidad permiten suponer que el flujo es casi unidireccional: $V_T \sim (D/L)V \ll V$, donde V_T y V son velocidades características transversal al eje del conducto y longitudinal al mismo, respectivamente. Además, usando $D/L \ll 1$, de la ecuación de cantidad de movimiento se tiene que las variaciones transversales de presión reducida son despreciables frente a las variaciones longitudinales:[1]

$$\frac{\Delta_T(p+\rho U)}{\Delta_L(p+\rho U)} \sim \frac{\rho V_T^2}{\rho V^2} \sim \left(\frac{D}{L}\right)^2 \ll 1. \tag{17.2}$$

La segunda y tercera condición de (17.1) nos dicen que los efectos viscosos y de conducción de calor son despreciables en las ecuaciones de cantidad de movimiento y de energía, es decir, que el movimiento es ideal, que junto con $Q_r = 0$ nos dice que el flujo es isentrópico, como se ha dicho. Por supuesto, los efectos disipativos son importantes en una capa delgada cerca de la pared del conducto cuyo espesor tiende a cero cuando ReD/L y PeD/L tienden a infinito (ver Lección 19).

Al no existir efectos disipativos, las magnitudes fluidas no van a depender, en primera aproximación (es decir, salvo en la capa límite sobre la pared antes citada), de las coordenadas transversales al conducto, siendo así uniformes en cada sección del mismo. Por ello, en las ecuaciones que se escriben a continuación se supone que las magnitudes fluidas son funciones solo de la coordenada longitudinal a lo largo del conducto, x (ver Fig. 17.1), y del tiempo t. Estas ecuaciones se escribirán a continuación para dos casos particulares que son los más comunes en la práctica: el movimiento de líquidos y el movimiento casi estacionario de gases.

[1] Ver sección 13.2, donde se consideró una situación similar, pero con fuerzas viscosas dominantes. Se comprueba, pues, que el hecho de que las variaciones transversales de la presión reducida sean despreciables es una cuestión geométrica, que depende de la condición $D/L \ll 1$, siendo independiente de que dominen las fuerzas viscosas o las de inercia, o ninguna de ellas.

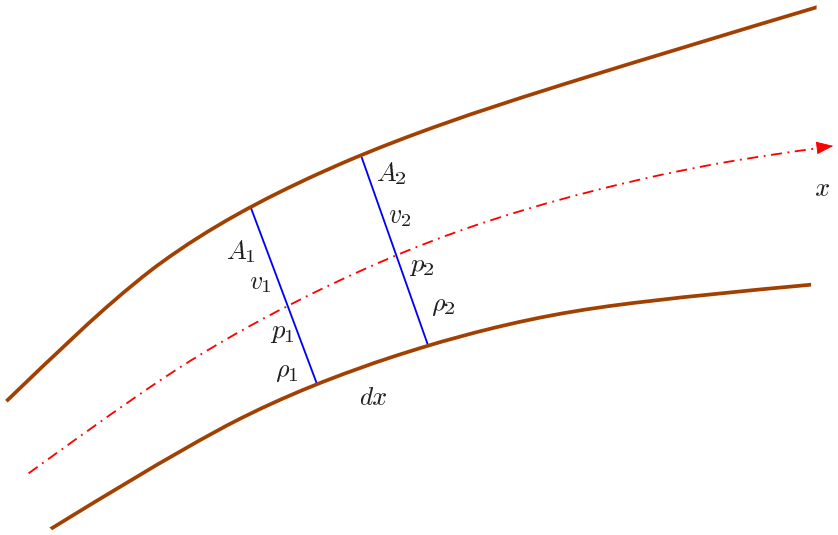


Figura 17.1: Volumen de control diferencial.

17.2. Movimiento de líquidos

La ecuación de continuidad *unidireccional* se obtiene aplicando el principio de conservación de masa en forma integral al volumen de control diferencial de la figura 17.1. Como la densidad es constante y la velocidad uniforme en cada sección,

$$Av = (A + dA)(v + dv) \Rightarrow \frac{\partial(Av)}{\partial x} = 0, \tag{17.3}$$

que nos dice que el caudal $Q = Av$ se conserva a lo largo del conducto,

$$A(x)v(x,t) = Q(t)\,. \tag{17.4}$$

Con las hipótesis discutidas en la sección anterior, y suponiendo que las fuerzas másicas derivan de un potencial U, se tiene que el flujo es irrotacional en el conducto en primera aproximación (es decir, salvo en la capa límite en la pared del conducto). Entonces, como ecuación de cantidad de movimiento se puede utilizar la ecuación (15.15), pero reteniendo el término no estacionario y sustituyendo ℓ por x:[2]

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + U\right) = 0. \tag{17.5}$$

Por último, la ecuación de la energía (entropía) dice que la temperatura debe ser constante en el fluido por ser el movimiento isentrópico de un líquido (esta ecuación no va a ser necesaria al estar desacoplada de las anteriores, que se pueden resolver para v y p dados U, A y ρ).

Es conveniente escribir (17.5) en términos de Q. Sustituyendo, en primer lugar, (17.4) en $\partial v/\partial t$, la ecuación (17.5) queda como

$$\frac{1}{A(x)}\frac{dQ}{dt} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + U\right) = 0\,. \tag{17.6}$$

[2]Obsérvese que al ser el flujo uniforme, todas las líneas de corriente son equivalentes.

Integrando entre la entrada del conducto $x = 0$ y una sección arbitraria x a lo largo del conducto, se tiene, una vez sustituido $v = Q/A$,

$$\left(\frac{Q^2}{2A} + \frac{p}{\rho} + U\right)\Bigg|_0^x = -\frac{dQ}{dt}\int_0^x \frac{1}{A(x)}dx\,, \tag{17.7}$$

que proporciona la presión en una sección arbitraria x dadas las condiciones en la entrada y el caudal $Q(t)$. Alternativamente, para obtener el caudal, se deben conocer dos condiciones de contorno para la presión. Por ejemplo, si $p + \rho U = P_0(t)$ en $x = 0$ y $p + \rho U = P_L(t)$ en $x = L$, sustituyendo en (17.7) se tiene la siguiente ecuación diferencial ordinaria para $Q(t)$:

$$\frac{dQ}{dt}\int_0^L \frac{dx}{A(x)} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{A^2(L)} - \frac{1}{A^2(0)}\right]Q^2(t) = \frac{P_0(t) - P_L(t)}{\rho}, \tag{17.8}$$

que se debe resolver con condición inicial $Q(t = 0) = Q_0$. Una vez conocido $Q(t)$, (17.4) dará $v(x, t)$ y (17.7) dará $p(x, t)$. Como se ha dicho, otra variante de interés de este problema consiste en calcular $P_L(t)$ [o $P_0(t)$] cuando $Q(t)$ y $P_0(t)$ [o $P_L(t)$] son conocidos.

En el supuesto de que el flujo sea estacionario (o casi estacionario, $St \ll 1$), el primer término de (17.8) desaparece (en primera aproximación en St) y la ecuación (17.8) proporciona una expresión algebráica para el caudal:

$$Q^2 = \frac{2A^2(L)A^2(0)}{A^2(0) - A^2(L)}\frac{P_0(t) - P_L(t)}{\rho}\,. \tag{17.9}$$

17.3. Movimiento casi estacionario de gases

La ecuación de conservación de masa en forma integral aplicada al volumen de control de la figura 17.1, en el caso de que se trate del flujo casi estacionario ($St \ll 1$) de un gas, se escribe:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho v A) = 0\,, \quad \rho v A = G = \text{constante}, \tag{17.10}$$

donde G es el gasto másico, constante a lo largo del conducto, pero que podría depender, lentamente, del tiempo en el caso de que el flujo no sea estrictamente estacionario.

La ecuación de cantidad de movimiento, en el caso de que las fuerzas másicas sean poco importantes, como normalmente ocurre en gases, se escribe como (ecuación de Bernoulli)

$$v\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0 = \frac{\partial(v^2/2)}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}. \tag{17.11}$$

Además, como el movimiento es isentrópico,

$$\frac{\partial s}{\partial x} = 0,\ s = s_0 = \text{constante}, \tag{17.12}$$

también es barótropo, la función entalpía coincide con la barotropía ($h = w$) y la ecuación (17.11) se puede integrar:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v^2}{2} + w\right) = 0, \tag{17.13}$$

$$\frac{v^2}{2} + w = \frac{v^2}{2} + h = h_0 = \text{constante}\,, \tag{17.14}$$

que es equivalente a la conservación de la entalpía de remanso.

Así, tenemos tres primeras integrales del movimiento (17.10), (17.12) y (17.14), según las cuales G, s_0 y h_0 son constantes a lo largo del conducto. Para un gas ideal, (17.12) se escribe

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} = \text{constante}. \tag{17.15}$$

Tenemos, por tanto, las mismas ecuaciones consideradas en la sección 15.6 (obsérvese que se verifican las condiciones de conservación de las magnitudes de remanso analizadas en aquella sección), y se pueden utilizar las ecuaciones (15.33)–(15.36) que permiten obtener las magnitudes fluidas en cada sección x del conducto en función de las de remanso (que se conservan a lo largo del conducto) y del número de Mach en cada sección. El número de Mach $M(x)$ se obtendría de la ecuación de continuidad, dada la sección $A(x)$ para un conducto concreto. Esta metodología se aplicará en la sección siguiente al movimiento de un gas en conductos convergentes–divergentes (toberas). Pero, previamente, se va a analizar con más detalle la ecuación de conservación de masa (o continuidad) (17.10) para tener una idea cualitativa de cómo es el movimiento de un gas en un conducto de sección variable en función del número de Mach.

La ecuación (17.10) se puede escribir como

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\rho v A)}{\partial x} = 0 = \rho v\frac{dA}{dx} + A\frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = \rho v\frac{dA}{dx} + A\rho\frac{\partial v}{\partial x} + Av\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0,\\ \frac{1}{A}\frac{dA}{dx} + \frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0.\end{aligned} \tag{17.16}$$

Usando la definición de la velocidad del sonido $a^2 = dp/d\rho$ escrita como $dp = a^2 d\rho$ (recuérdese que el movimiento es isentrópico), la ecuación (17.11) se escribe

$$v\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{a^2}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad \text{o} \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{v}{a^2}\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{17.17}$$

con lo que (17.16) queda

$$\frac{1}{A}\frac{dA}{dx} + \frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{v}{a^2}\frac{\partial v}{\partial x} = 0\,. \tag{17.18}$$

Finalmente, haciendo uso de $M^2 = \dfrac{v^2}{a^2}$ se llega a la ecuación buscada para analizar el comportamiento cualitativo del movimiento ideal de un gas perfecto en un conducto,

$$\frac{1}{A}\frac{dA}{dx} = (M^2 - 1)\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{17.19}$$

Si el flujo es subsónico ($M < 1$), un incremento de la sección ($dA/dx > 0$) implicará una disminución de la velocidad y, de acuerdo con (17.11), un aumento de la presión, mientras que una disminución de la sección provoca un aumento de velocidad y una disminución de la presión (ver el cuadro 17.1). Cualitativamente esto es lo que ocurre también en los flujos incompresibles. Sin embargo, cuando el flujo es supersónico ($M > 1$) ocurre todo lo contrario: un aumento de la sección del conducto provoca un aumento de la velocidad y una disminución

$M<1$	$\frac{dA}{dx}$	$\frac{\partial v}{\partial x}$		v (y M)
$(M^2-1)<0$	>0	<0	$\Rightarrow$	$\downarrow$: se frena.
$(M^2-1)<0$	<0	>0	$\Rightarrow$	$\uparrow$: se acelera.

Cuadro 17.1: Comportamiento para $M<1$.

$M>1$	$\frac{dA}{dx}$	$\frac{\partial v}{\partial x}$		v (y M)
$(M^2-1)>0$	>0	>0	$\Rightarrow$	$\uparrow$: se acelera.
$(M^2-1)>0$	<0	<0	$\Rightarrow$	$\downarrow$: se frena.

Cuadro 17.2: Comportamiento para $M>1$.

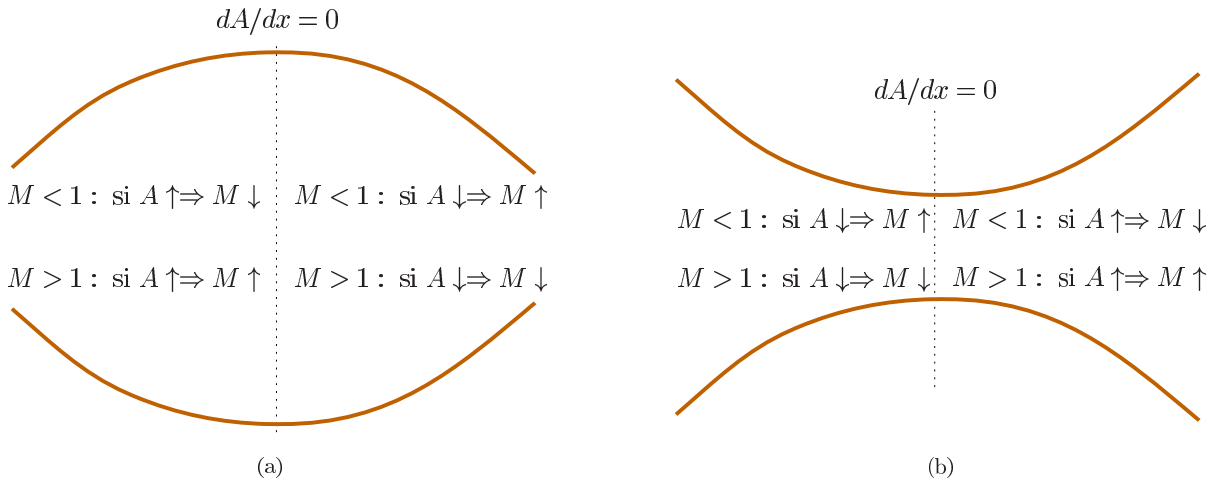


Figura 17.2: Conducto (a) divergente–convergente; y (b) convergente–divergente con variación de magnitudes

de la presión (el flujo se hace más supersónico aún), mientras que una disminución del área da lugar a una disminución de la velocidad y a un aumento de la presión (ver el cuadro 17.2). Finalmente, de (17.19) se puede ver también que el flujo sólo podrá ser sónico ($M=1$) donde la sección presente un máximo o un mínimo relativo, es decir, donde $dA/dx=0$. De estas dos posibilidades, como se muestra en la figura 17.2, la única opción físicamente posible es la segunda, esto es, sólo se podrían alcanzar condiciones sónicas donde la sección presente un mínimo relativo.

Por tanto, para expandir isentrópicamente un gas desde velocidad subsónica a supersónica el flujo debe transcurrir por un conducto convergente–divergente. La sección de área mínima divide al flujo en dos partes, una subsónica aguas arriba y otra supersónica aguas abajo, siendo sónica la corriente en la sección de área mínima, normalmente conocida como *garganta*. Del mismo modo, para comprimir isentrópicamente un gas desde velocidad supersónica a subsónica, también debe fluir por un conducto convergente–divergente. De lo anterior y con la figura 17.2, claramente se observa que el flujo en una configuración divergente–convergente, es decir, en un conducto con un máximo de área nunca puede ser sónico en la sección de área

máxima, puesto que si inicialmente $M < 1$, M decrece y se hace más subsónico, mientras que si $M > 1$, M crece y se hace más supersónico.

En la siguiente sección se derivarán expresiones cuantitativas para el flujo en conductos (o toberas) convergentes–divergentes.[3] Por supuesto, el caso más interesante desde un punto de vista práctico es aquel mediante el cual el flujo es subsónico en la parte convergente, pues la tobera permite obtener un flujo supersónico a partir del subsónico (por ejemplo, de un gas en reposo).[4]

17.4. *Flujo isentrópico de un gas perfecto a través de una tobera convergente–divergente*

Consideremos una tobera convergente-divergente de sección conocida $A(x)$. Teniendo en cuenta (17.10), junto con las relaciones (15.33)–(15.36) [que son equivalentes a las ecuaciones de cantidad de movimiento y energía (17.14) y (17.15), respectivamente], se pueden expresar todas las magnitudes en cada sección en función de las magnitudes de remanso y del número de Mach en cada sección, $M(x)$. Las magnitudes de remanso vendrán fijadas por las condiciones de contorno del conducto (por ejemplo, en la descarga de un depósito, las magnitudes de remanso son las del interior del depósito, donde la velocidad es nula) .

En efecto, de (17.10),

$$G = \rho v A = \rho_0 a_0 A M \frac{\rho}{\rho_0}\frac{a}{a_0}\,, \tag{17.20}$$

y usando las ecuaciones (15.33)–(15.36) para expresar ρ/ρ_0 y a/a_0,

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{1/(\gamma-1)}\,, \tag{17.21}$$

$$\frac{a}{a_0} = \left(\frac{p}{p_0}\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{1/2} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{(\gamma-1)/2} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{-1/2}\,, \tag{17.22}$$

se tiene

$$G = \rho_0 a_0 A M \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{(\gamma+1)/(2-2\gamma)}\,. \tag{17.23}$$

Estas relaciones se completan con las ecuaciones (15.33) y (15.36) (reescritas de nuevo a continuación para facilitar su consulta):

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2, \tag{17.24}$$

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\gamma/(\gamma-1)}\,. \tag{17.25}$$

De esta manera, conocido el gasto G, γ y las magnitudes de remanso, la ecuación (17.23) proporciona el número de Mach M en función del área del conducto. Con este número de

[3] La ecuación (17.19) es general, válida para gases reales, incluso si hay reacción química, siempre que el flujo permanezca como isentrópico, ya que sólo se han usado ecuaciones de conservación.

[4] Este tipo de conductos se suelen denominar toberas Laval, en honor a Carl G.P. de Laval, ingeniero sueco que presentó la primera tobera de este tipo en la Exposición Universal de Chicago de 1893.

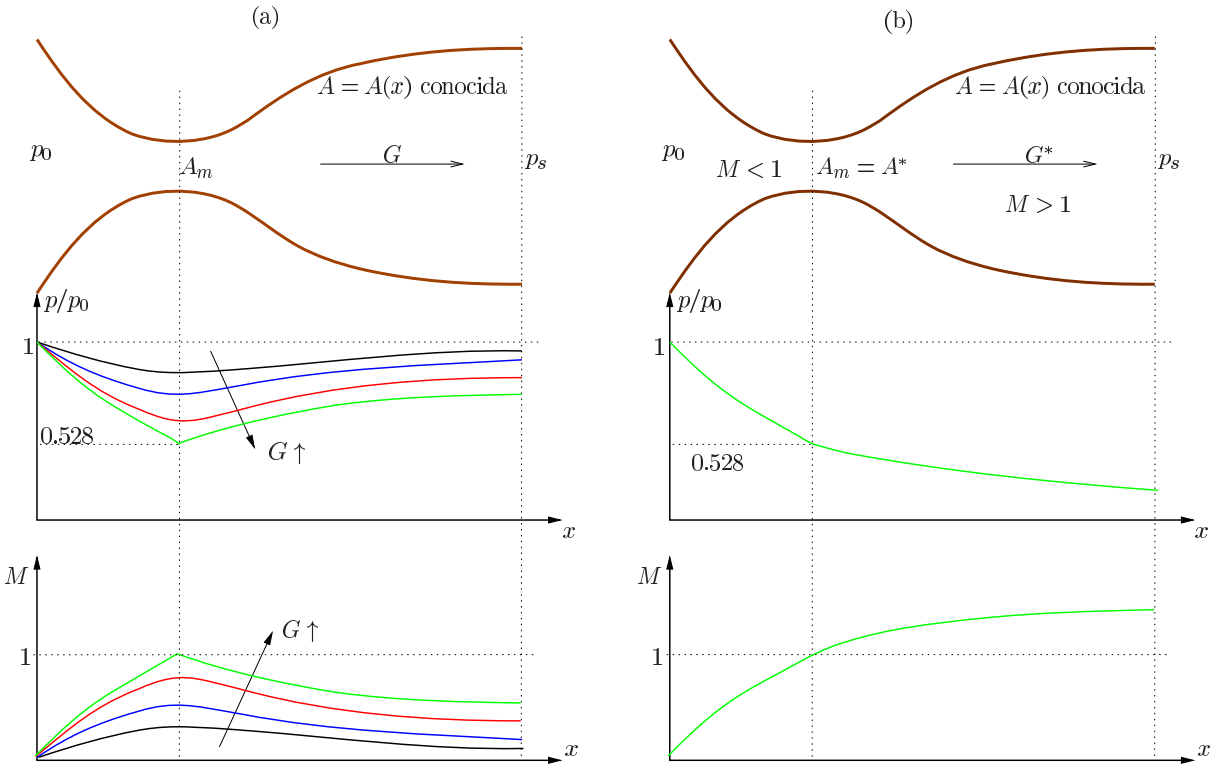


Figura 17.3: Flujo isentrópico subsónico (a) y supersónico (b) en una tobera convergente–divergente para $\gamma = 1{,}4$.

Mach M, γ, las magnitudes de remanso y las ecuaciones (17.21)–(17.22), (17.24) y (17.25), nos permiten conocer todas las magnitudes fluidas en cada sección x del conducto (la velocidad se obtendría de $v = a\,M$).

Normalmente, el gasto G no es dato del problema sino que viene fijado por la condición de contorno de presión conocida a la salida de la tobera, p_s. En ese caso, de la ecuación (17.25) se puede obtener el número de Mach a la salida M_s correspondiente a p_s, que sustituido en (17.23) proporciona el gasto G que circula por la tobera. Con él conocido se puede ahora proceder tal y como se ha descrito en el párrafo anterior para obtener todas las magnitudes en cada sección de la tobera. Sin embargo, dada una tobera y una presión de remanso p_0, la solución anterior no existe para todo valor de p_s, sino solo para un cierto rango de presiones de salida y, fuera de él, para un valor concreto, como se verá continuación.

Una situación de especial interés por su sencillez en la obtención de las magnitudes en cualquier sección de la tobera es aquella en la que se tienen condiciones sónicas ($M = 1$) en la garganta o sección de área mínima. Cuando eso ocurre, las magnitudes en esa sección se denominan **magnitudes críticas** y se suelen denotar con un asterisco (*; ver figura 17.3). Dado un gasto G, γ y las magnitudes de remanso, el área crítica de la garganta para que $M = 1$ se obtendría de (17.23),

$$A^* = \frac{G}{\rho_0 a_0} \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right)^{(\gamma+1)/(2\gamma-2)} . \tag{17.26}$$

El resto de magnitudes críticas (en la garganta) se obtienen de las expresiones anteriores con $M = 1$:

$$T^* = T_0 \frac{2}{\gamma+1},\ \rho^* = \rho_0 \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{1/(\gamma-1)}, \tag{17.27}$$

$$p^* = p_0 \frac{2}{\gamma+1}^{\gamma/(\gamma-1)},\ v^* = a^* = a_0 \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{1/2}. \tag{17.28}$$

Si se da entonces el caso de que el área mínima A_m de la tobera es la crítica, $A_m = A^*$, sustituyendo (17.26) en (17.23) se obtiene una única ecuación que da el número de Mach M en cada sección (conocida) de la tobera:

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M}\left[\frac{2}{\gamma+1}\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)\right]^{(\gamma+1)/(2\gamma-2)}. \tag{17.29}$$

Así, dada una tobera [es decir, dada $A(x)$], el número de Mach y, por tanto, todas las magnitudes fluidas quedan especificadas en cada sección a través de (17.29), (17.21)–(17.22) y (17.24)–(17.25). El gasto G, crítico, vendrá dado por (17.26), mientras que el resto de magnitudes críticas en la garganta vendrán dadas por (17.27)–(17.28). Como consecuencia, dada una tobera $[A(x)]$ y un tipo de gas (γ), esta solución solo valdrá para una determinada presión a la salida de la tobera. Para facilitar el cálculo de M en cada sección, en la figura 17.7, dada al final de esta lección, se representa la ecuación (17.29) para el caso de $\gamma = 1{,}4$ (aire). Téngase en cuenta que para cada relación de áreas A/A^* existen dos soluciones, una subsónica para la parte convergente de la tobera y otra supersónica para la parte divergente de la tobera. Una vez conocido M, los valores de ρ_0/ρ, T_0/T y p_0/p se obtendrían de (17.21), (17.24) y (17.25), respectivamente.

Como se ha comentado, fijados p_0 y la relación entre las áreas de salida y de la garganta, A_s/A^*, la solución isentrópica anterior con $M = 1$ en la garganta y supersónica a la salida se presentará para una única presión de descarga, que se obtiene de (17.25) después de sustituir el valor de M_s que resulta de (17.29) con A_s/A^*. A esa presión en la salida la denominaremos en adelante como p_{s2}. Para ilustrar qué ocurre cuando la presión de salida no coincide con p_{s2}, se considerará el proceso de descarga a través de una tobera convergente–divergente, de sección $A(x)$ conocida, desde un depósito que contiene un gas a presión p_0 a otro depósito con presión p_a ($\leq p_0$) a medida que p_a disminuye (ver figuras 17.3 y 17.4).

Si p_a es muy próxima a p_0, es decir, existe una pequeña diferencia de presión [valor de p_1 de la figura 17.4(a)], el gasto que se está extrayendo de la tobera es también pequeño (sería nulo si $p_a = p_0$) y el flujo será subsónico en toda ella, sin alcanzarse por supuesto condiciones sónicas en la garganta. Los valores de las diferentes magnitudes fluidas se obtendrían como antes se comentó: dado p_a/p_0, (17.25) proporciona M_s, que sustituido en (17.23) y con A_s conocida nos da el gasto G. Con este gasto y, de nuevo, (17.23) se puede obtener $M = M(A)$, es decir, el número de Mach en cualquier sección A de la tobera, y así todas las magnitudes fluidas en cada sección con (17.21), (17.22), (17.24) y (17.25), siendo $v = a\,M$.

Si se disminuye la presión p_a, es decir, se aumenta la diferencia de presión entre la entrada y la salida [valor de p_2 de la figura 17.4(b)] el gasto irá aumentando y también las velocidades en la tobera, llegándose a un momento en el que la máxima velocidad (que ocurre en la garganta) se hace sónica [valor p_{s1} de la figura 17.4(c)] teniéndose entonces $M = 1$ en $A = A_m = A^*$ (ver también figura 17.3). Para esa presión de descarga, el gasto es el crítico y dado por (17.26),

$$G^* = \rho_0 a_0 A^* \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{(\gamma+1)/2(\gamma-1)}, \tag{17.30}$$

que es el máximo gasto que puede descargar del depósito con la tobera dada de área mínima A_m $(= A^*)$, como se verá más adelante.

Si se sigue disminuyendo p_a, es decir, se aumenta la diferencia de presión alcanzándose, por tanto, condiciones mayores a $M = 1$ [valores de p_3, p_4 y p_5, figura 17.4(d)–(f)], lo único que se modificará es el flujo en la región divergente de la tobera (como se verá a continuación) pero no el flujo subsónico en la parte convergente, puesto que las condiciones sónicas están obligadas a ocurrir en la garganta que, como se vio, es la única sección posible en la que $M = 1$ puede darse. Este hecho hace que la parte del flujo en la región convergente no se modifique, diciéndose entonces que la tobera se ha *bloqueado*, ya que cualquier variación de las magnitudes fluidas aguas abajo de la garganta no afectan al flujo aguas arriba de la misma al ser sónica la velocidad en ella. Para la presión $p_a = p_{s1}$, el flujo es subsónico e isentrópico en toda la tobera (excepto en la garganta que es sónico) y viene dado por (17.29) (representada en la figura 17.7), (17.21) y (17.24)–(17.25), siendo $M \leq 1$. En la garganta se tienen las propiedades críticas dadas por (17.27)–(17.28). Esta solución corresponde a la rama subsónica de la expresión (17.29). Si $M > 1$ en la zona divergente de la tobera, dicha relación sólo fija la presión de salida p_{s2}, con lo que el flujo será isentrópico en toda la tobera si $p_a = p_{s2}$.

Lo que ocurre para presiones de descarga intermedias entre p_{s1} y p_{s2} [valores p_3, p_4 y p_5, figuras 17.4(d)–(f)], es que la solución no puede satisfacer las relaciones isentrópicas anteriores y se produce una discontinuidad u onda de choque en la solución, dejando de ser, por tanto, isentrópica en toda la tobera.[5] Lo que ocurre cualitativamente es similar a cuando un flujo supersónico incide sobre un obstáculo (descrito en la lección 16): si $p_{s1} < p_a < p_{s2}$, la corriente después de la garganta no puede adaptarse a las condiciones de descarga, puesto que es supersónica; antes de la salida esta corriente supersónica pasa bruscamente a subsónica a través de una onda de choque, adaptándose así a la presión de salida. La posición exacta de la onda de choque se obtiene de resolver conjuntamente las relaciones isentrópicas anteriores y las expresiones para una onda de choque obtenidas en la Sección 16.6. Por ejemplo, si p_a viene dado por el valor p_4 de la figura 17.4, se tiene una solución isentrópica que es subsónica en la parte convergente, sónica en la garganta, supersónica desde la garganta hasta un cierto punto s y subsónica, y de nuevo isentrópica (con magnitudes de remanso diferentes a las del tramo isentrópico anterior), desde el punto s hasta la salida. En el primer tramo isentrópico la presión de remanso viene dada por la presión de remanso del depósito, p_0. En s se forma una onda de choque normal donde aumenta la presión (punto p_4') y disminuye la presión de remanso (ver Sección 16.6), de forma que la región isentrópica p_4'–p_4 detrás de la onda de choque tiene una presión de remanso menor que p_0.

La posición de la onda de choque es tal que, para el número de Mach en el punto s [dado por (17.29)], el salto de las propiedades a través de la onda de choque verifica que la solución isentrópica subsónica que parte del punto p_4' satisface la condición de contorno de $p_a = p_4$ a la salida. Para obtener la posición de la onda de choque se suele proceder de forma iterativa: conocidos p_a y p_0, A^* y el área de salida A_s, se supone una posición, es decir, una área A_1 donde se encuentra la onda de choque; de las relaciones isentrópicas anteriores y puesto que

[5] Como se vio en la Sección 16.5, a través de una onda de choque no se conserva la entropía, por lo que el flujo a lo largo de una tobera con una onda de choque en su interior no es isentrópico.

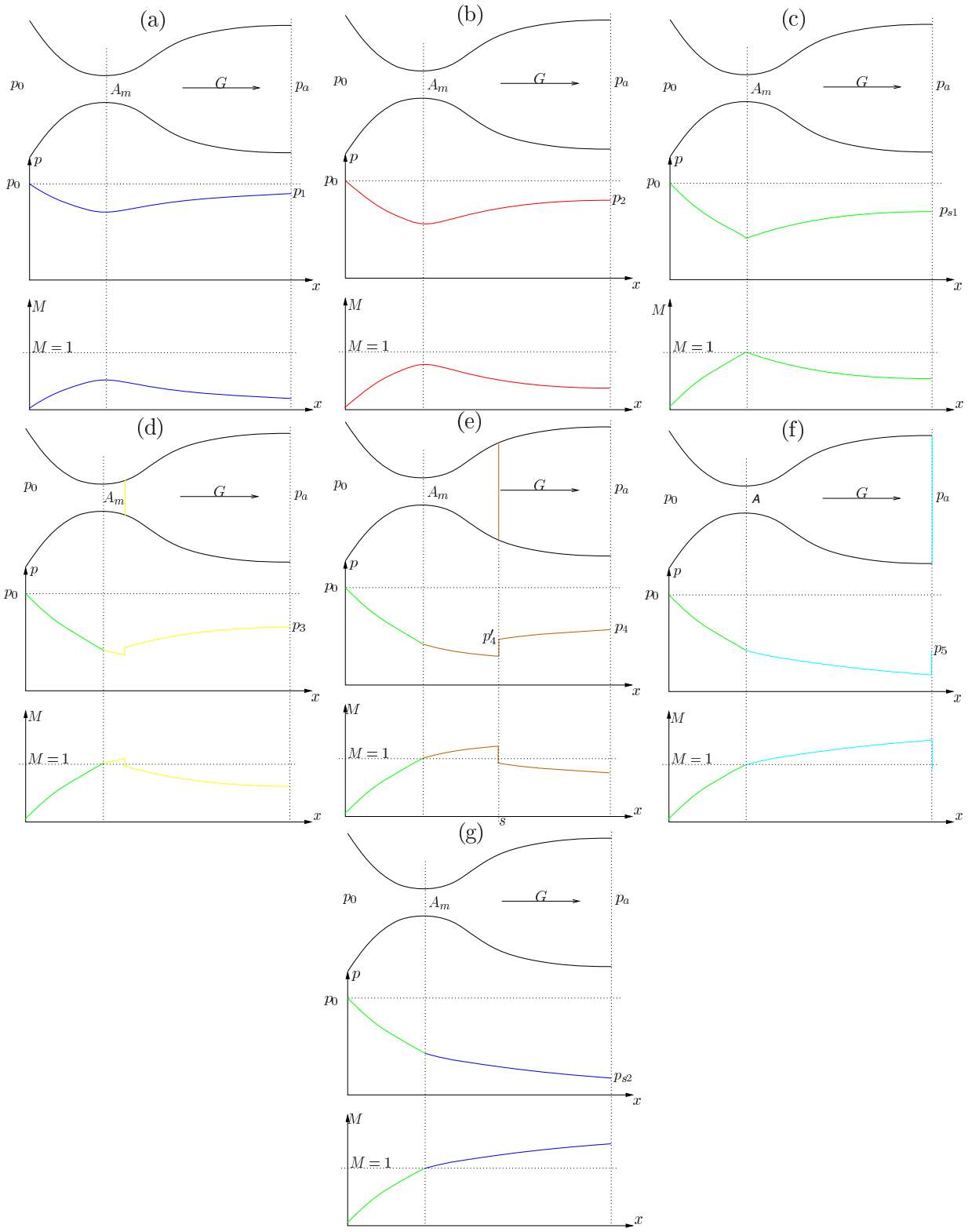


Figura 17.4: Efecto de la presión de descarga en el flujo en una tobera convergente–divergente.

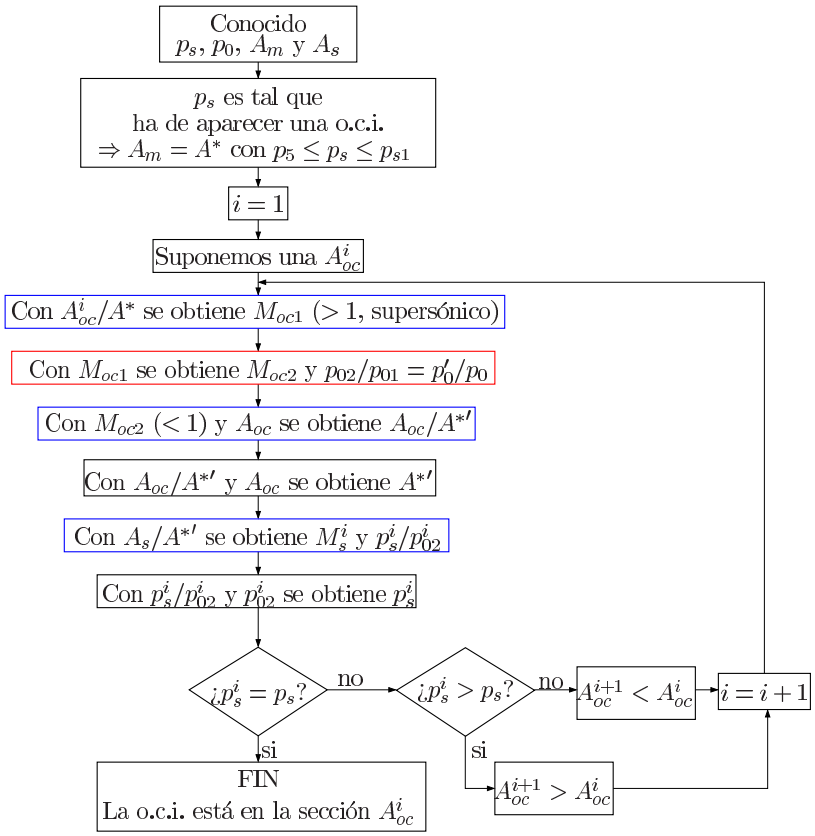


Figura 17.5: Diagrama de bloques para la resolución del flujo en una tobera convergente–divergente con una onda de choque interna (abreviada como o.c.i. en la figura). Los datos que se obtienen en los bloques azules se consiguen a través de la figura 17.7 [y las ecuaciones (17.21), (17.24) y (17.25)], mientras que la del bloque rojo se obtiene de la figura 16.7.

se tiene $M = 1$ en la garganta, se pueden obtener M_1 y demás propiedades delante de la onda de choque, en particular p_1/p_0; con las ecuaciones (16.35)–(16.39) para una onda de choque normal se determinan el número de Mach detrás de la onda, M_2, y demás propiedades detrás de la onda, por ejemplo p_2/p_1, p'_0/p_0, donde p'_0 es la nueva presión de remanso detrás de la onda de choque; con M_2 y A_1 se obtiene, de (17.29), el área crítica $A^{*\prime}$ correspondiente a la nueva *rama* isentrópica subsónica para la parte de la tobera desde la onda de choque hasta la salida, que junto con el área de salida A_s proporciona el número de Mach a la salida M_s; con este número de Mach se determinan p_s/p'_0 de (17.25), que finalmente proporciona p_s, puesto que se ha calculado la presión de remanso detrás de la onda; si $p_s \neq p_a$, es decir, si la presión necesaria a la salida para que la onda de choque esté en la sección que hemos supuesto es diferente de la presión que realmente existe, lo que quiere decir es que la posición estimada para la onda de choque no es correcta, se ha de volver a suponer un nuevo valor de A_1 y se repite el proceso hasta que $p_s \approx p_a$. Este proceso iterativo se describe a modo de diagrama de bloques en la figura 17.5.

Si p_a viene dada por la presión p_5 de la figura 17.4, la onda de choque normal se produce justo a la salida de la tobera. Para p_a menores se producen ondas de choque oblicuas, ya que la intensidad del salto de las propiedades es menor que en una onda de choque normal, para un número de Mach dado. Para $p_a = p_{s2}$, el flujo es isentrópico en toda la tobera y se dice que

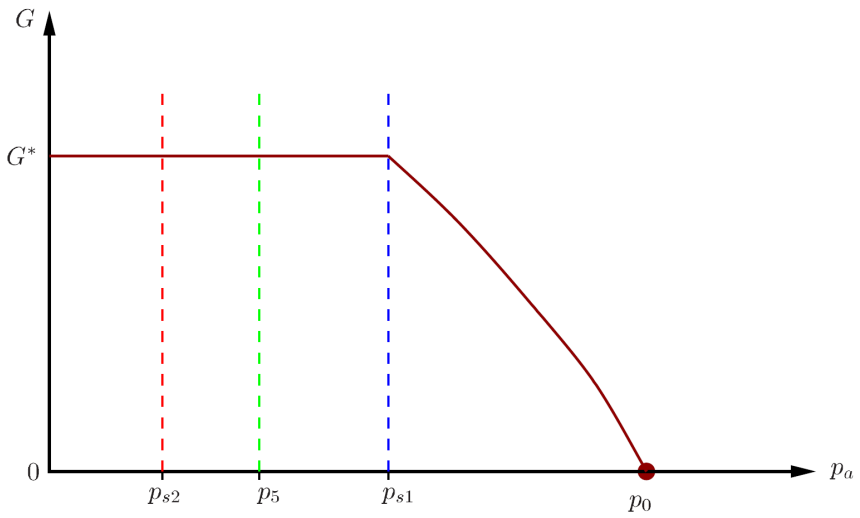


Figura 17.6: Efecto de la presión de descarga en el flujo

la tobera *está adaptada* (las toberas convergente–divergente se diseñan para que ocurra este tipo de flujo). A la salida de la tobera se produce una discontinuidad tangencial que suele ser inestable. Para p_a por debajo de p_{s2}, la tobera no es capaz de expandir isentrópicamente al gas como para que descargue a esa presión, por lo que sigue expandiéndose detrás de la salida de la tobera mediante una expansión que se denomina de Prandtl–Meyer.[6]

Respecto a la evolución del gasto en función de p_a, evidentemente cuando $p_a = p_0$ el gasto es nulo y a medida que p_a disminuye el gasto va aumentando hasta que, para $p_a = p_{s1}$, se hace igual al crítico G^*. Como para $p_a < p_{s1}$ se dan siempre las condiciones críticas (sónicas) en la garganta, el gasto seguirá siendo el crítico. Este comportamiento se muestra en la figura 17.6. Téngase en cuenta que lo que se muestra en dicha figura es la variación del gasto con la presión en la sección de salida y que, una vez fijada ésta, el gasto no varía a lo largo de geometría, de acuerdo con (17.10).

Para terminar esta lección es conveniente recordar que una vez que p_a es inferior a $p_{s1} \equiv p^*$, el flujo en la región convergente de la tobera no se modifica (ver figura 17.4), por más que se disminuya la presión de descarga, siendo sónicas (críticas) las condiciones en la garganta. Así, para una tobera sólo convergente, el flujo es siempre subsónico e isentrópico. Para $p_a = p_{s1}$ ($p_{s1}/p_0 \simeq 0{,}528$ para aire), el flujo es sónico en la garganta y la descarga se produce con el gasto crítico G^*. Para $p_a < p_{s1}$, se produce una expansión de Prandtl–Meyer a la salida de la tobera, y el gasto permanece igual a G^*. Este tipo de toberas constituyen, por tanto, un dispositivo eficaz para fijar el gasto en una instalación de gas. Es lo que se suele denominar un **orificio crítico**.

Referencias.

- J.D. ANDERSON, 1990. Capítulo 5.

[6] El alumno interesado puede consultar, por ejemplo, Fernández Feria (2005), capítulo 22, para más información sobre la expansión del tipo de Prandtl–Meyer.

- H.W. LIEPMANN y A. ROSHKO, 1957. Capítulo 5.
- F.M. WHITE, 2004. Capítulo 9.

Material audiovisual sugerido:

Channel flow of a compressible fluid, by Donald Coles

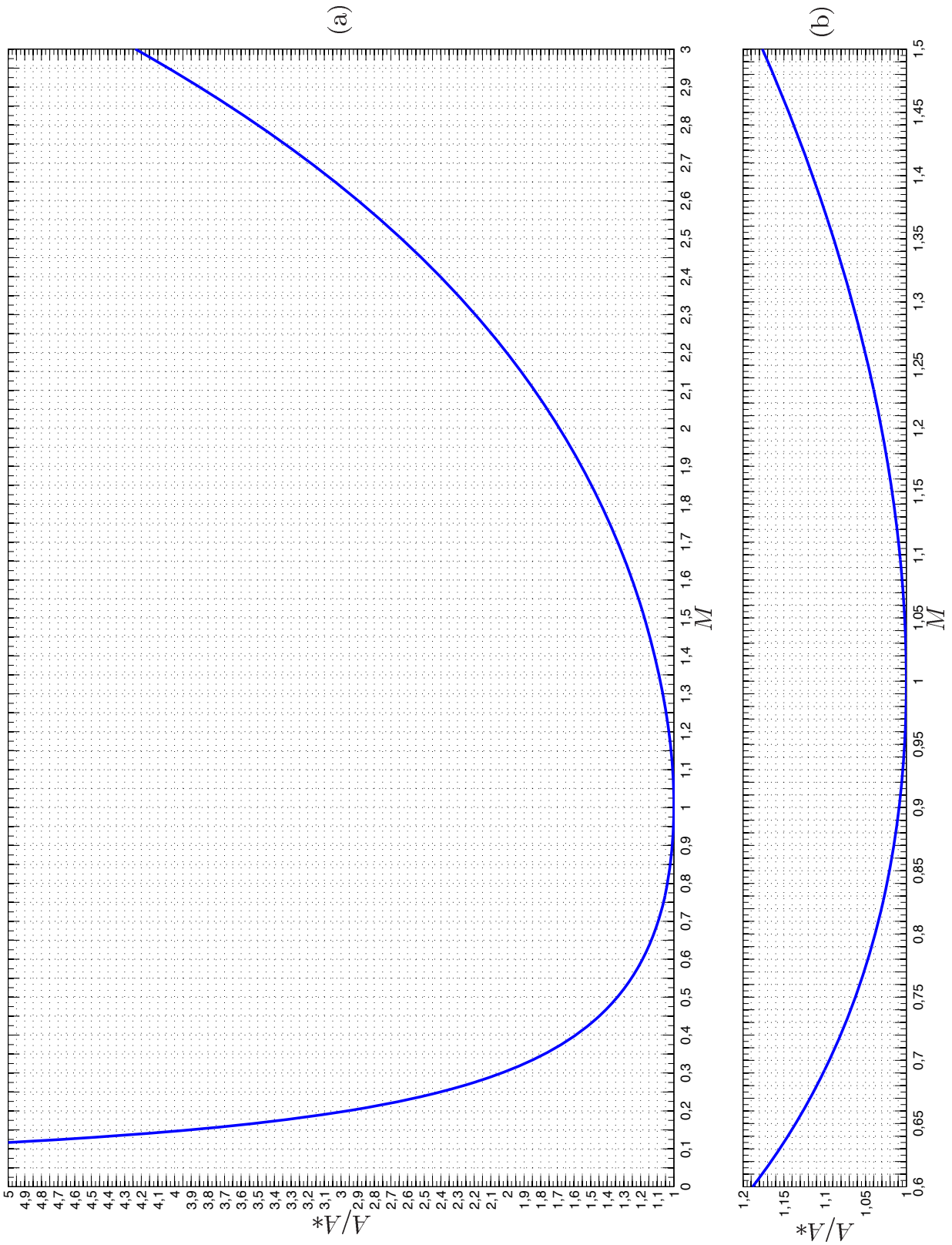


Figura 17.7: (a) Relación de áreas $\frac{A}{A^*}$ frente al número Mach según la ecuación (17.29). (b) Detalle en torno a $M = 1$.

CAPÍTULO 18

Carga y descarga de depósitos. Compresores/bombas, turbinas

18.1. Introducción

Como complemento a la lección anterior sobre el movimiento ideal en conductos, en esta lección se presentan una serie de relaciones que proceden de las ecuaciones de conservación en forma semiintegral para la carga (o descarga) de depósitos y para el movimiento ideal de un fluido a través de compresores, turbinas y bombas. Las relaciones que se presentarán son indispensables para resolver problemas prácticos de flujos en conductos, ya que estos conductos usualmente proceden o terminan en depósitos y el flujo en ellos es impulsado por un compresor o una bomba, o sirve para mover una turbina. Como se ha dicho, se utilizarán las formas semiintegrales de las ecuaciones de Euler. Las relaciones obtenidas también serán de utilidad como complemento para la resolución de problemas relacionados con el flujo turbulento en conductos que se verán en la última lección de este curso.

18.2. Movimiento a través de un compresor

Consideraremos al compresor (o a la turbina, o a la bomba) como una *caja negra* instalada en un conducto por el que circula flujo ideal (uniforme en cada sección) con un gasto G. En la sección de entrada del compresor (sección 1 en la figura 18.1) las magnitudes fluidas serán v_1, p_1 y ρ_1 y en la sección de salida (2) las magnitudes serían v_2, p_2 y ρ_2. El objetivo es obtener una ecuación que relacione las magnitudes en la sección 2 con las de la sección 1, y con la potencia W que el compresor suministra al fluido. Supondremos, además, que no hay aportes volumétricos de calor, ni conducción de calor a través de las paredes, por lo que la entropía se va a conservar a través del compresor. Como ésta también se conserva a lo largo del conducto, de acuerdo con el ejemplo mostrado en la figura 18.1, la entropía sería igual a la atmosférica, teniéndose entonces

$$s = s_a = \text{constante};\ \frac{p_1}{\rho_1^\gamma} = \frac{p_2}{\rho_2^\gamma} = \text{constante} = \frac{p_a}{\rho_a^\gamma}. \tag{18.1}$$

Obviamente, el flujo nunca es completamente adiabático en el compresor y siempre existen pérdidas por fricción en las paredes fijas y en las partes móviles del compresor, por lo que la

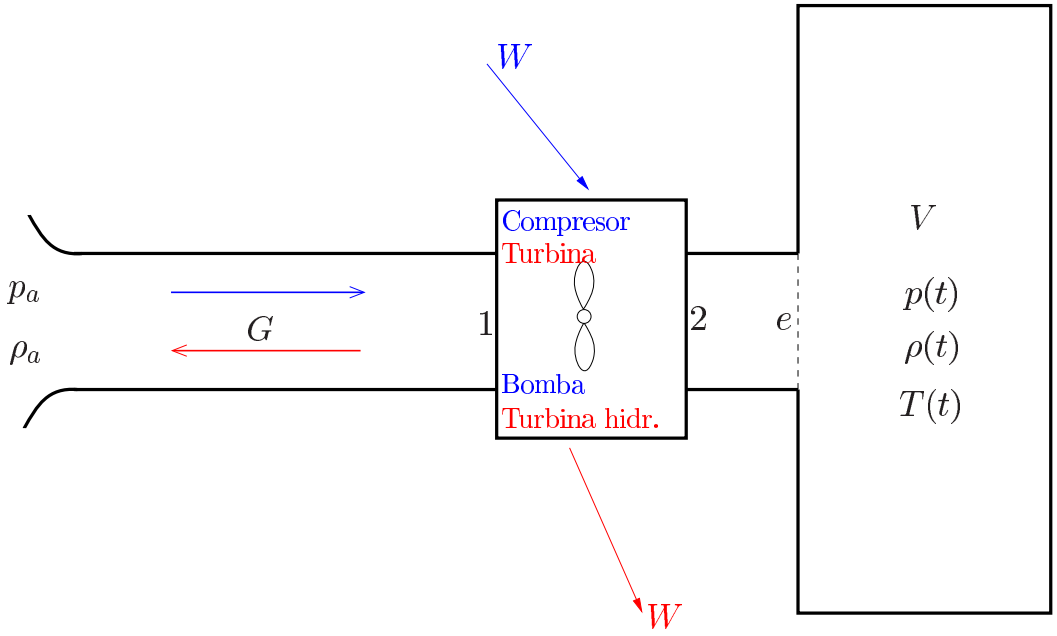


Figura 18.1: Movimiento a través de un compresor/bomba (turbina/turbina hidráulica) para la carga (descarga) de un depósito.

relación anterior es una aproximación, incluso si el número de Reynolds es muy grande. Sin embargo, en la práctica, se suele suponer que la *forma* de la ecuación (18.1) es correcta, y sólo se cambiaría la relación de calores específicos γ por un exponente experimental n. Aquí se utilizará γ.

Por otro lado, la entalpía de remanso no se conserva debido al movimiento de las partes móviles del compresor, que son las que le comunican energía al fluido mediante el trabajo de las fuerzas de presión, aumentando, por tanto, su entalpía de remanso. De una forma algo más precisa, si aplicamos y evaluamos la ecuación de la energía en su forma integral [ecuación (8.7)] al volumen de control del compresor delimitado por las superficies de entrada 1 y salida 2 del mismo, por sus paredes laterales y por sus partes móviles, se tiene

$$G\left(e_2+\frac{v_2^2}{2}+U_2\right)-G\left(e_1+\frac{v_1^2}{2}+U_1\right)=p_1A_1v_1-p_2A_2v_2+W, \tag{18.2}$$

donde se han despreciado los términos de trabajo de las fuerzas de fricción y el flujo de calor, y se ha supuesto que las fuerzas másicas derivan de un potencial U. Los términos de variación temporal también se han eliminado puesto que el movimiento de las *palas* del compresor suele ser con velocidad constante y la energía total contenida en el volumen de control permanece constante en el tiempo una vez que se ha llegado a un régimen estacionario de las magnitudes fluidas a la salida. A la hora de evaluar las integrales de superficie en 1 y en 2, se ha tenido en cuenta que las magnitudes fluidas son uniformes por la hipótesis de idealidad, siendo G el gasto másico que circula por el conducto. El término de W (potencia que el compresor le comunica al fluido) procede del trabajo de las fuerzas de presión en la superficie de las palas móviles del compresor, donde la velocidad del volumen de control no es nula. Estrictamente, W es igual al trabajo por unidad de tiempo de las fuerzas de presión, de las fuerzas másicas y de las fuerzas viscosas (fricción). Estas últimas fuerzas, aunque despreciables en las otras

superficies del volumen de control, no suele serlo en las partes móviles, y su trabajo se pierde en forma de calor, pero su efecto está contenido en W al ser la potencia útil que las partes móviles del compresor le comunican al fluido.

Usando $h = e + p/\rho$, (18.2) se puede escribir como

$$G\left(h_2 + \frac{v_2^2}{2} + U_2\right) - G\left(h_1 + \frac{v_1^2}{2} + U_1\right) = W, \tag{18.3}$$

o, en términos de la entalpía de remanso, $h_0 = h + v^2/2$,

$$G\left(h_{02} + U_2 - h_{01} - U_1\right) = W. \tag{18.4}$$

Si, como es lo normal, $U_2 \simeq U_1$, entonces

$$G\left(h_{02} - h_{01}\right) = W. \tag{18.5}$$

Por otro lado, si la energía cinética de la corriente es despreciable frente a su entalpía (que ocurre si $M^2 \ll 1$), se tiene simplemente

$$G\left(h_2 - h_1\right) = W. \tag{18.6}$$

Frecuentemente se suelen utilizar las expresiones anteriores en función de la presión, introducida a través de la entalpía. Así, para un gas, quitando, por tanto, las fuerzas másicas en (18.4), utilizando además la relación isentrópica (18.1) y teniendo en cuenta que la entalpía de remanso se conserva a lo largo del conducto ($h_{01} = h_{0a} = h_a$) se llega a

$$\begin{aligned} W =& G\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_2}{\rho_2} + \frac{v_2^2}{2} - \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_a}{\rho_a}\right) \\ =& G h_a\left[\left(\frac{p_2}{p_a}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M_2^2\right) - 1\right], \end{aligned} \tag{18.7}$$

donde M_2 es el número de Mach a la salida del compresor. Las relaciones anteriores valdrían para el caso de una turbina sin más que cambiarle el signo a W.

Para un líquido (ρ =constante), es decir, cuando en vez de un compresor tenemos una bomba, la relación isentrópica nos dice que $T_2 = T_1 = T_a$ y (18.4) queda como[1]

$$W = Q\left(p_{02} - p_{01}\right) = Q\left(p_{02} - p_a\right), \tag{18.8}$$

donde la presión de remanso es ahora $p_0 = p + \rho v^2/2$, $Q = G/\rho$ es el caudal que circula por el conducto y se ha despreciado la diferencia de potencial de fuerzas másicas. En el caso de una turbina hidráulica habría que cambiarle el signo a W en la expresión anterior y, en ocasiones, no se podría despreciar la diferencia de potencial de fuerzas másicas si existiera una considerable diferencia de altura entre la entrada y la salida.

[1] Téngase en cuenta que en este caso la configuración de la figura 18.1 en la que una bomba se utiliza para llenar un depósito cerrado no sería válida al ser la densidad constante.

18.3. Carga de un depósito

Las ecuaciones de conservación de masa [ecuación (6.2)] y energía [ecuación (8.7)] aplicadas y evaluadas sobre el volumen de control (constante) que incluye al depósito y a su sección de entrada se escriben, respectivamente,

$$V\frac{d\rho}{dt} = G, \tag{18.9}$$

$$\frac{V}{\gamma-1}\frac{dp}{dt} = Gh_{0e}, \tag{18.10}$$

donde p y ρ son la presión y densidad, respectivamente, en el interior del depósito (y espacialmente uniforme), h_{0e} es la entalpía de remanso en la sección de entrada (ver figura 18.1) y se ha hecho uso de $\rho e = p/(\gamma-1)$, válida para un gas perfecto.

Si al gas contenido en el depósito le añadiésemos o eliminásemos un cierto calor por unidad de tiempo Q a través de las paredes del depósito, las ecuaciones anteriores seguirían siendo válidas sin más que añadir un término Q en el segundo miembro de (18.10),

$$\frac{V}{\gamma-1}\dot{\mathrm{p}} = Gh_{0e} + Q\,, \tag{18.11}$$

siendo Q positivo en el caso de adición de calor y negativo en el supuesto de que se extrajera calor al fluido a través de las paredes. Por otra parte, si el volumen del depósito no fuese constante, éste aparecería dentro de las derivadas temporales de las ecuaciones anteriores y, además, habría un término adicional en el segundo miembro de (18.10) correspondiente al trabajo de expansión (o compresión) realizado por las paredes del depósito: $-\int_{Sc} p\vec{v}\cdot\vec{n}ds = -p\int_{Sc}\vec{v}\cdot\vec{n}ds = -p\,dV/dt$. Con este efecto y el de adición/eliminación de calor, las ecuaciones de conservación de masa y energía quedarían como

$$\frac{d\rho V}{dt} = G, \tag{18.12}$$

$$\frac{1}{\gamma-1}\frac{dpV}{dt} = Gh_{0e} + Q - p\frac{dV}{dt}. \tag{18.13}$$

El proceso de carga de un depósito no es isentrópico, incluso si $Q = 0$, ya que el chorro de entrada se frena en el interior del depósito, transformándose su energía cinética en calor (o lo que es lo mismo, en energía interna del gas en el depósito). Obviamente, si la energía cinética de la corriente de entrada fuera muy pequeña en relación a su entalpía, este efecto se podría despreciar y el proceso de carga sería prácticamente isentrópico (suponiendo, por supuesto, $Q = 0$). Esto ocurre cuando el número de Mach de la corriente a la entrada del depósito es muy pequeño: $h_{0e} = h_e + v_e^2/2 = h_e[1 + (\gamma-1)M_e^2/2] \simeq h_e$ si $M_e^2 \ll 1$. Por tanto, haciendo $h_{0e} = h_e = [\gamma/(\gamma-1)]p_e/\rho_e$ y $Q = 0$ en las ecuaciones anteriores y eliminando dV/dt se llega a

$$V\rho^\gamma\frac{d(p/\rho^\gamma)}{dt} = \gamma G\left(\frac{p_e}{\rho_e} - \frac{p}{\rho}\right), \tag{18.14}$$

pero como la corriente es subsónica, $p_e = p$, y al ser $M_e^2 \ll 1$, las variaciones de densidad del fluido son muy pequeñas y se cumple que $\rho_e \simeq \rho$, con errores del orden de M_e^2. Así, el segundo miembro de (18.14) es nulo y entonces se satisface la relación isentrópica

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{constante} \tag{18.15}$$

en primera aproximación (con errores del orden de M_e^2). Por tanto, las ecuaciones que gobiernan la carga de un depósito adiabático ($Q = 0$) con $M_e^2 \ll 1$ se reducen a (18.12) y a la relación isentrópica (18.15).

Las ecuaciones (18.12) y (18.13) también son válidas para describir la descarga de un depósito cambiando G por $-G$ y h_{0e} por h_{0s} (donde s sería la sección de salida del depósito). El proceso de descarga es mucho más simple que el de carga puesto que es isentrópico si $Q = 0$. De hecho, la entalpía de remanso se conserva a la salida, ya que estamos suponiendo que el fluido es ideal (y no hay fricción): $h_{0s} = h = [\gamma/(\gamma-1)]p/\rho$. Utilizando ahora el mismo razonamiento que acabamos de ver para el proceso de carga, implicaría que $p/\rho^\gamma =$ constante (siempre que $Q = 0$).

Referencias.

- R. FERNÁNDEZ FERIA, 2005. Capítulo 23.
- F.M. WHITE, 2004. Capítulo 3.

Ejercicios de ondas de choque, flujo ideal en conductos y carga/descarga de depósitos.

Ejercicios resueltos

1. En el interior de un cilindro, que inicialmente contiene un gas (aire, $\gamma = 1{,}4$) en reposo con densidad ρ_0 y presión p_0, existe un pistón en $x = 0$ [ver figura 18.2(a)]. Éste se pone en movimiento en $t = 0$ hacia $x > 0$ con una velocidad $U_p =$ constante [ver figura 18.2(b)]. Como consecuencia de ello, en la región del gas hacia la cual avanza el pistón se produce una onda de compresión que, finalmente, degenera en una onda de choque [ver figura 18.2(b)]. Obtener los saltos en las propiedades entre un lado y otro de la onda de choque, y evaluar dichos saltos si la velocidad del pistón fuera $U_p = \frac{a_0}{5}$.

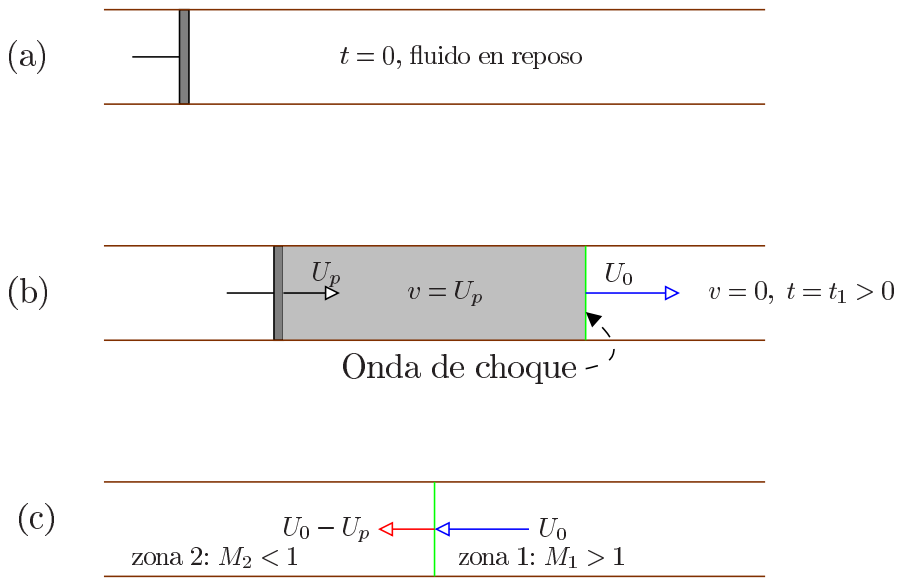


Figura 18.2: Onda de choque generada por un pistón: (a) Pistón y fluido en reposo; (b) Pistón en movimiento con la onda de choque generada; y (c) onda de choque vista en un sistema de referencia estacionario con ella.

Solución.

Para poder aplicar las relaciones de Rankine-Hugoniot hay que usar un sistema de referencia que se mueva estacionario con la onda de choque, figura 18.2(c). De este modo, la ecuación para el salto de velocidades a través de la onda de choque, ecuación

(16.35), da

$$\frac{v_2}{v_1}=\frac{2+(\gamma-1)M_1^2}{(\gamma+1)M_1^2}=\frac{U_0-U_p}{U_0}=\frac{2+(\gamma-1)M_0^2}{(\gamma+1)M_0^2}, \tag{18.16}$$

siendo

$$M_0=\frac{U_0}{a_0}, \tag{18.17}$$

y $a_0=\sqrt{\gamma p_0/\rho_0}$. La ecuación (18.16) se puede reescribir como

$$\frac{U_0-U_p}{U_0}\times\frac{a_0}{a_0}=\frac{M_0-M_p}{M_0}=\frac{2+(\gamma-1)M_0^2}{(\gamma+1)M_0^2}, \tag{18.18}$$

donde $M_p=U_p/a_0$. Ahora, de (18.18) es posible despejar M_0. Reorganizándola se obtiene:

$$2M_0^2-M_p(\gamma+1)M_0-2=0, \tag{18.19}$$

ecuación de segundo grado para M_0 cuya solución es

$$M_0=\frac{\gamma+1}{4}M_p+\sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2M_p^2+1}, \tag{18.20}$$

donde hemos elegido la solución supersónica ($M_0>1$, correspondiente al signo + de la raiz cuadrada). Con este número de Mach conocido, el salto de densidades y de presiones que se pedía a través de la onda de choque se obtiene, respectivamente, de (16.35) y (16.36):

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{\rho_2}{\rho_0}=\frac{(\gamma+1)M_0^2}{2+(\gamma+1)M_0^2},\quad \frac{p_2}{p_1}=\frac{p_2}{p_0}=\frac{2\gamma M_0^2+1-\gamma}{\gamma+1}. \tag{18.21}$$

Por otro lado, si en (18.20) usamos $U_p=a_0/5$, es decir, $M_p=1/5$, junto con $\gamma=1{,}4$ (por tratarse de aire), se obtiene $M_0=1{,}127$. Usando este valor ahora en (18.21) se obtiene (ver figura 16.7)

$$\frac{\rho_2}{\rho_0}=0{,}6,\quad \frac{p_2}{p_0}=1{,}315, \tag{18.22}$$

encontrándose, por tanto, el gas comprimido por el pistón con una presión 1,1315 veces mayor que la original del gas en reposo.

2. La tobera convergente–divergente de la figura 18.3 se utiliza para descargar aire de un depósito que se encuentra a presión p_0. Obtener la presión p_a necesaria a la salida en función de la presión del depósito para que:

   a) el flujo sea isentrópico en toda la tobera y subsónico con condiciones críticas en la garganta;

   b) el flujo sea isentrópico en toda la tobera y supersónico en la salida;

   c) el flujo sea isentrópico hasta la sección de salida, con una onda de choque justo en ella; y

   d) aparezca una onda de choque en la parte divergente en una sección $A_{oc}=1{,}3A_m$.

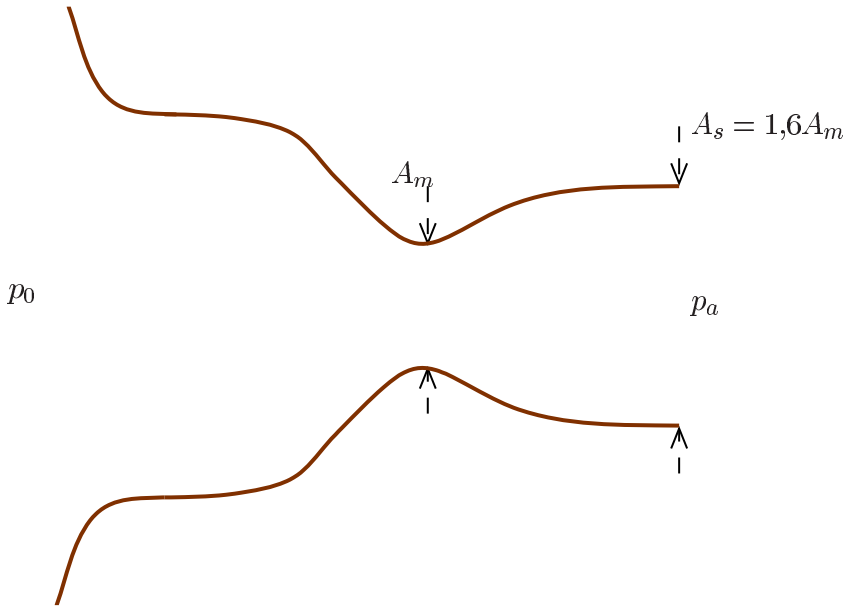


Figura 18.3: Tobera convergente–divergente

Solución.

a) Flujo isentrópico y subsónico con G^*.
Como el flujo ha de ser isentrópico en toda la tobera y con condiciones críticas en la sección de área mínima (garganta), dicha área será a su vez el área crítica y la ecuación (17.29) nos permitirá conocer el número de Mach en la salida y con él el resto de las magnitudes en la salida, y en particular, el valor de la presión buscado. En lugar de utilizarse la ecuación (17.29) es más cómodo usar la gráfica 17.7 para obtener de ella el número de Mach conocida la relación de áreas. En este caso que queremos conocer los valores a la salida necesitamos A_s/A^*. En nuestro caso se tiene que $A_s/A^* = 1{,}6$, por lo que de la figura 17.7 se obtiene $M_s \approx 0{,}4$ (solución subsónica) y de (17.25) se puede obtener $p_0/p_s \approx 1{,}12$, con lo que $p_s = 0{,}896p_0$. La evolución cualitativa tanto de la presión como del número de Mach a lo largo de la tobera se puede ver en la figura 18.4.

b) Flujo isentrópico y supersónico con G^*.
Para este caso, de nuevo las condiciones en la garganta son críticas y la ecuación (17.29) nos dará el Mach a la salida. Como otra vez $A_s/A^* = 1{,}6$, la figura 17.7 nos da ahora $M_s \approx 1{,}94$ (solución supersónica) y de (17.25) $p_0/p_s \approx 7{,}128$, con lo que $p_s \approx 0{,}14p_0$. La evolución cualitativa tanto de la presión como del número de Mach a lo largo de la tobera se puede ver en la figura 18.5.

c) Flujo isentrópico y una onda de choque justo en la salida.
La onda de choque aparece en la sección de salida tal que $A_s/A^* = 1{,}6$ y el flujo será isentrópico hasta esa sección, subsónico en la región convergente, sónico en la garganta y supersónico en el tramo divergente. Por tanto, hasta justo antes de la onda de choque se puede utilizar la ecuación (17.29) y como la onda de choque es de espesor despreciable, la parte de delante y de detrás de la onda de choque coinciden con la sección de salida. Así, usando $A_s/A^* = 1{,}6$ en (17.29) se

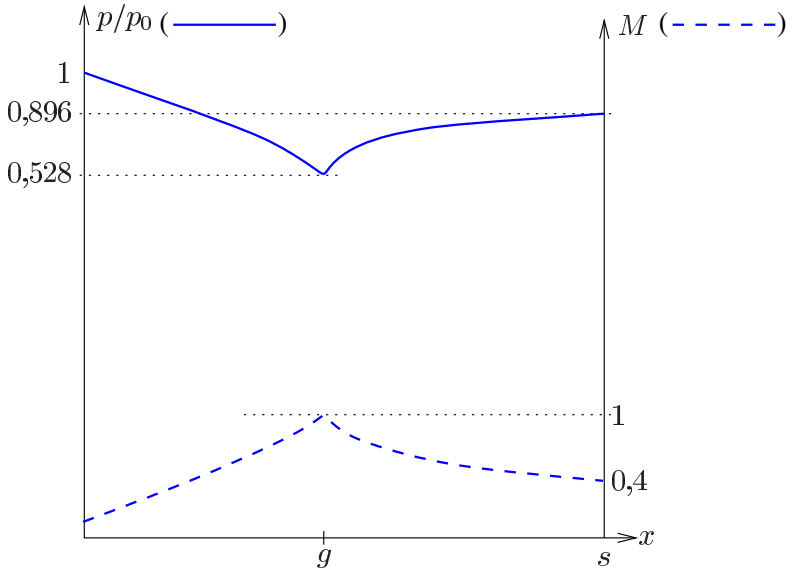


Figura 18.4: Flujo subsónico

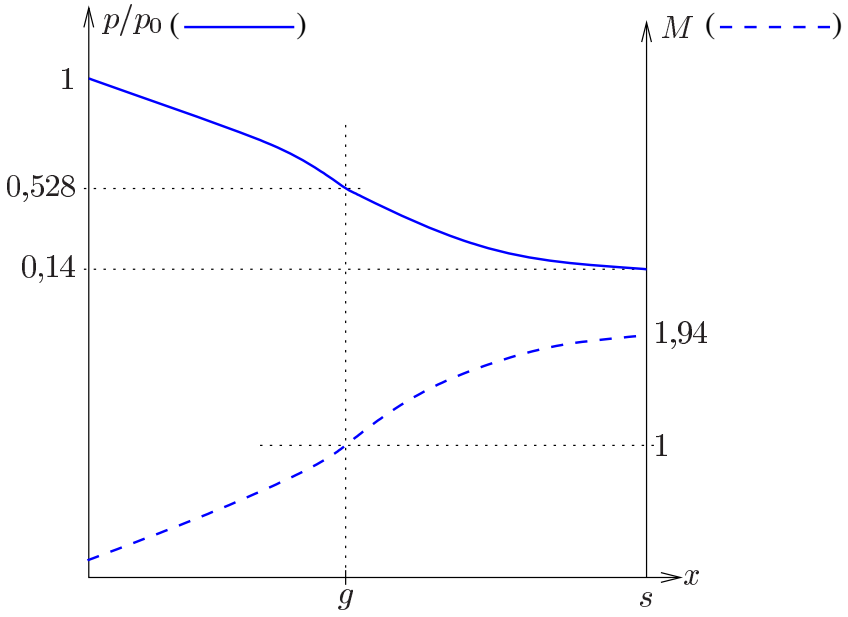


Figura 18.5: Flujo supersónico

obtiene, o más cómodamente de la figura 17.7, para delante de la onda de choque $M_{s1} \approx 1{,}94$ y de (17.25) $p_0/p_{s1} \approx 7{,}128$, con lo que $p_{s1} = 0{,}14 p_0$. La presión a la salida buscada será la que hay detrás de la onda de choque, por lo que hay que obtener las propiedades existentes al otro lado, para lo que se utilizarán las relaciones (16.35)–(16.39), o de una manera más fácil, la figura 16.7. Así, se obtienen los siguientes valores para el salto de presión $p_{s2}/p_{s1} \approx 4{,}27$, mientras que para el número de Mach detrás de la onda de choque se obtiene $M_{s2} \approx 0{,}586$. La presión

que nos interesa es p_{s2}, por lo que se obtiene $p_{s2} \approx 4{,}27 p_{s1} = 0{,}598 p_0$. La evolución cualitativa tanto de la presión como del número de Mach a lo largo de la tobera se puede ver en la figura 18.6.

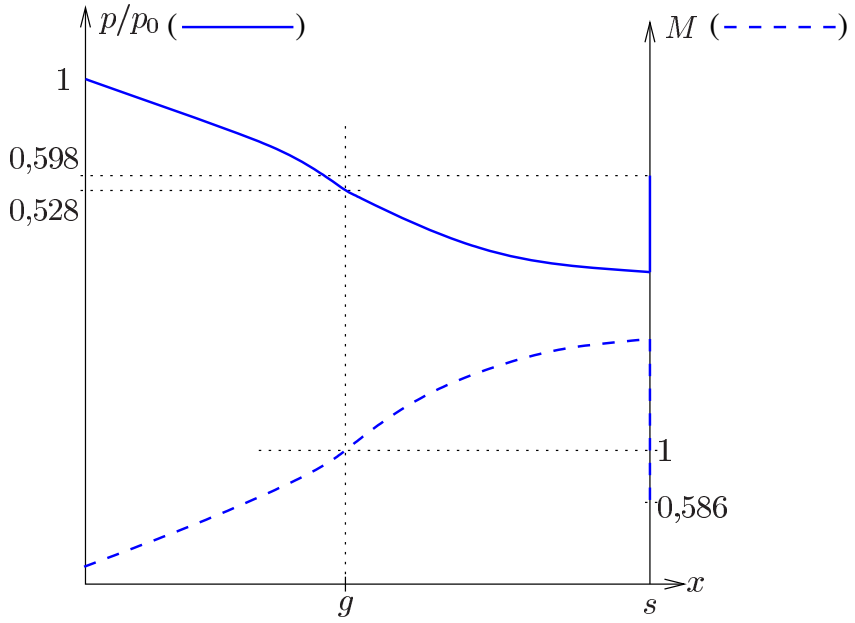


Figura 18.6: Flujo supersónico

d) Flujo con una onda de choque en $A_{oc} = 1{,}3 A_m$.

Para que aparezca una onda de choque en la parte divergente, el flujo se debe hacer supersónico pasando para ello por condiciones sónicas. Dichas condiciones sólo pueden darse en la garganta (ver Sección 17.3) por lo que en ella se tendrán condiciones críticas, el gasto será G^*, $A_m = A^*$ y la ecuación (17.29) se podrá utilizar hasta justo delante de la onda de choque. Procedamos, entonces, a obtener las propiedades delante de la onda de choque para, a continuación, resolver la parte subsónica tras ella hasta la salida. Como en la sección que aparece la onda de choque se tiene $A_{oc}/A^* = 1{,}3$, de (17.29) o mejor, de la figura 17.7, se obtiene el Mach delante (subíndice 1) de la onda de choque junto con la presión en esa sección: $M_{oc_1} \simeq 1{,}66$ y $p_0/p_{oc_1} \simeq 4{,}65$. Ahora bien, con la figura 16.7 y con $M_{oc_1} \simeq 1{,}66$ se obtienen las propiedades detrás de la onda de choque (subíndice 2) como, por ejemplo, $M_{oc_2} \simeq 0{,}654$ y el salto de presiones de remanso $p_{02}/p_{01} \simeq 0{,}876 = p_{02}/p_0$, donde p_{02} $(= 0{,}876 p_0)$ es la nueva presión de remanso detrás de la onda de choque. El tramo subsónico desde la onda de choque hasta la salida se resolverá como perteneciente a otra tobera (ficticia) con presión de remanso p_{02}, con condiciones críticas en la garganta pero con una nueva (y desconocida) área crítica $A^{*'}$ y de la que se sabe que en una determinada sección existe un número de Mach $M_{oc_2} = 0{,}654$. Como el objetivo es obtener la presión en la sección de salida, necesitamos conocer primero la relación de áreas $A_s/A^{*'}$. Para ello, lo primero es tratar de obtener $A^{*'}$ y se consigue con (17.29) y el número de Mach conocido en una sección $M_{oc_2} = 0{,}654$. Así, (17.29) (o la figura 17.7) proporciona $A_{oc}/A^{*'} \simeq 1{,}13$

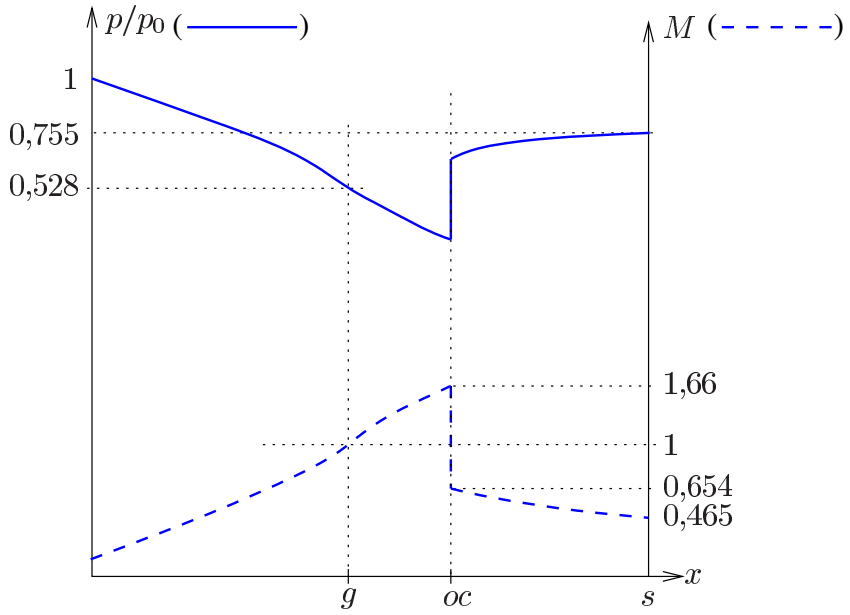


Figura 18.7: Flujo supersónico con onda de choque

(nótese que al evaluar el área donde aparece la onda de choque no se usan subíndices pues ambas áreas coinciden). Este cociente permite obtener $A^{*'} = 0{,}885A_{oc}$ que junto con $A_s = 1{,}6A^*$ hace que el cociente de áreas buscado se escriba

$$\frac{A_s}{A^{*'}} = \frac{1{,}6A^*}{0{,}885A_{oc}} = \frac{1{,}6}{0{,}885} \times \frac{A^*}{A_{oc}} = 1{,}808 \times \frac{1}{1{,}3} \simeq 1{,}4, \qquad (18.23)$$

donde se ha hecho uso de la relación conocida $A_{oc} = 1{,}3A_m = 1{,}3A^*$. Esta relación de áreas conocida permite finalmente usando (17.29) (o la figura 17.7) obtener el número de Mach a la salida, $M_s \simeq 0{,}465$, así como la relación de presiones $p_{02}/p_s \approx 1{,}16$ de (17.25), que despejando p_s y usando el valor conocido de p_{02} nos da el valor de la presión en la sección de salida en función de la del depósito de descarga: $p_s = 0{,}862p_{02} = 0{,}862 \times 0{,}876p_0 = 0{,}755p_0$. La evolución cualitativa tanto de la presión como del número de Mach a lo largo de la tobera se puede ver en la figura 18.7.

3. El depósito cilíndrico de sección A de la figura 18.8 tiene, por un lado, una tapa de masa M que lo cierra a una altura H_0 desde su fondo y, por otro, un compresor en su parte inferior para el llenado de aire del depósito y mediante el cual se le comunica una potencia W (constante) al aire. Suponiendo que el depósito está aislado térmicamente con el aire inicialmente en su interior a condiciones atmosféricas y que la energía cinética del aire al pasar por el compresor es despreciable, se pide obtener el instante de tiempo t_{asc} en que la tapadera comenzará a ascender (suponiendo despreciable el rozamiento de la tapa con las paredes del depósito).

   Solución.

   Para que la tapadera ascienda, la fuerza neta actuando sobre ella debe ser distinta de cero y su dirección ha de ser ascendente. Las únicas fuerzas que van a afectar al

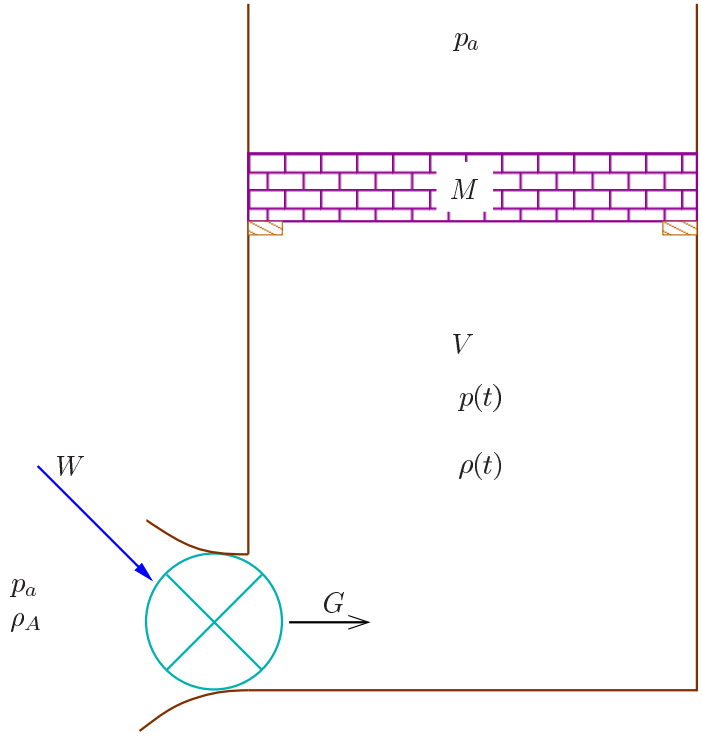


Figura 18.8: Carga de un depósito con un compresor.

movimiento ascendente de la tapadera van a ser, por un lado, las fuerzas de presión, que estarán actuando sobre su cara superior e inferior, y el peso de la tapadera, por otro. Respecto a las primeras, como se consideran ambas superficies horizontales, la fuerza de presión tendrá dirección vertical. Así, como la fuerza de presión que un fluido ejerce sobre una superficie S de normal $\vec{n}$ es

$$\vec{F}_p = \int_S p\vec{n}ds, \tag{18.24}$$

definiendo para la cara inferior la normal como $\vec{n}_i = \vec{e}_z$ y para la superior como $\vec{n}_s = \vec{e}_z$, la fuerza de presión neta sobre S se escribe

$$\vec{F}_{p_S} = \int_{Si} p\vec{n}_i ds - \int_{Ss} p_a\vec{n}_s ds = \vec{e}_z \int_{Si} (p - p_a)ds = (p - p_a)A\vec{e}_z, \tag{18.25}$$

donde p es la presión uniforme sobre la cara inferior (que coincide con la existente en el interior del depósito) y p_a es la presión, también uniforme, existente en la cara superior. El hecho de que ambas sean uniformes sobre la superficie S ha permitido evaluar la integral y llegar a la última igualdad. Por otro lado, hay que tener en cuenta la masa M de la tapadera y, por tanto, la fuerza vertical debida a su peso: $\vec{F}_{peso_S} = -Mg\vec{e}_z$. Por ello, el instante en que se iniciará la ascensión de la tapadera será aquel para el que $\left|\vec{F}_{neta_S}\right| = \left|\vec{F}_{p_S} + \vec{F}_{peso_S}\right| = 0$, es decir, cuando $(p - p_a)A - Mg = 0$, o lo que es lo mismo, $p = p_a + Mg/A$, es decir, la presión en el depósito iguala a la presión debida

a la atmósfera y a la debida al peso de la tapadera. Por tanto, es necesario conocer la evolución de p para con ella obtener el tiempo t_{asc} buscado.

Para obtener la presión p hay que resolver la carga del depósito a través del compresor. Para ello tenemos en cuenta que el depósito es adiabático (aislado térmicamente) y que la energía cinética del aire al pasar por el compresor es despreciable. Estas dos condiciones nos aseguran que el proceso de carga es isentrópico. De esta manera, las ecuaciones que gobiernan la carga del depósito con, por ahora, volumen constante son

$$V\frac{d\rho}{dt} = G, \tag{18.26}$$

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{constante} = \mathcal{C}, \tag{18.27}$$

donde G es el gasto (desconocido) que proporciona el compresor y la constante $\mathcal{C}$ se puede conocer de las condiciones iniciales del gas: $\mathcal{C} = p_a/\rho_a^\gamma$. Tenemos, por tanto, 2 ecuaciones con 3 incógnitas: p, ρ y G. Se necesita otra ecuación para cerrar el problema. Esa ecuación es la de comportamiento del compresor:

$$W = G\,(h_{02} - h_{01}) = G\,(h_{0e} - h_{0a}) = G\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho} - \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_a}{\rho_a}\right), \tag{18.28}$$

donde se ha hecho uso de que la salida del compresor coincide con la entrada al depósito, que h_{0e} es la entalpía de remanso a la entrada del depósito y por ser la energía cinética de la corriente de entrada al depósito muy pequeña, $h_{0e} \approx h_e = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}$, con lo que finalmente el conjunto de ecuaciones a resolver son:

$$V\frac{d\rho}{dt} = G, \tag{18.29}$$

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \mathcal{C}, \tag{18.30}$$

$$G\frac{\gamma}{\gamma-1}\left(\frac{p}{\rho} - \frac{p_a}{\rho_a}\right) = W. \tag{18.31}$$

La última ecuación se puede eliminar a través de G e introducirlo en la primera. Así, el sistema de dos ecuaciones resultante queda como

$$V\frac{d\rho}{dt} = \frac{W(\gamma-1)}{\gamma}\left(\frac{p}{\rho} - \frac{p_a}{\rho_a}\right)^{-1}, \tag{18.32}$$

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \mathcal{C}. \tag{18.33}$$

Si de la última ecuación despejamos p y lo sustituimos en la primera, obtenemos una única ecuación (diferencial ordinaria) que proporciona la evolución de la densidad del aire en el depósito con el tiempo. Dicha ecuación es

$$V\frac{d\rho}{dt} = \frac{W(\gamma-1)}{\gamma}\left(\frac{\mathcal{C}\rho^\gamma}{\rho} - \frac{p_a}{\rho_a}\right)^{-1}, \tag{18.34}$$

que simplificada se puede escribir como

$$V\frac{d\rho}{dt} = \frac{W(\gamma-1)}{\gamma}\left(\mathcal{C}\rho^{\gamma-1} - \frac{p_a}{\rho_a}\right)^{-1} = \frac{\mathcal{K}}{\rho_a\mathcal{C}\rho^{\gamma-1} - p_a}, \tag{18.35}$$

con $\mathcal{K} \equiv W\rho_a(\gamma-1)/\gamma$, y siendo la condición inicial necesaria para esta ecuación $\rho(t=0) = \rho_a$. Separando variables se tiene

$$V(\rho_a\mathcal{C}\rho^{\gamma-1} - p_a)d\rho = \mathcal{K}dt, \tag{18.36}$$

e integrando en ambos miembros se tiene

$$V\left(\frac{\rho_a\mathcal{C}}{\gamma}\rho^{\gamma} - p_a\rho\right) = \mathcal{K}t + C. \tag{18.37}$$

Usando la condición inicial de la densidad, la constante C valdría

$$C = V\left(\frac{\mathcal{C}\rho_a^{\gamma+1}}{\gamma} - p_a\rho_a\right), \tag{18.38}$$

con lo que la ecuación algébrica que proporciona la evolución de la densidad con el tiempo es

$$V\left(\frac{\rho_a\mathcal{C}}{\gamma}\rho^{\gamma} - p_a\rho\right) = \mathcal{K}t + V\left(\frac{\mathcal{C}\rho_a^{\gamma+1}}{\gamma} - p_a\rho_a\right). \tag{18.39}$$

Como se comentó previamente, la ascensión de la tapadera comenzará en el instante en que $p = p_a + Mg/A \equiv \mathcal{B}$, que, usando (18.33), se traduce en que $p = \rho^{\gamma}\mathcal{C} = \mathcal{B}$, o lo que es lo mismo, se requiere que $\rho^{\gamma} = \mathcal{B}/\mathcal{C}$ o $\rho = \sqrt[\gamma]{\mathcal{B}/\mathcal{C}}$. Introduciendo estos valores de ρ^{γ} y ρ en (18.39) se tienen

$$V\left(\frac{\rho_a\mathcal{C}}{\gamma}\mathcal{B}/\mathcal{C} - p_a\sqrt[\gamma]{\mathcal{B}/\mathcal{C}}\right) = \mathcal{K}t_{asc} + V\left(\frac{\mathcal{C}\rho_a^{\gamma+1}}{\gamma} - p_a\rho_a\right). \tag{18.40}$$

Despejando $\mathcal{K}t_{asc}$ se tiene

$$\mathcal{K}t_{asc} = V\left(\frac{\rho_a^{\gamma+1}\mathcal{C}}{\gamma}\left[\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{C}\rho_a^{\gamma}} - 1\right] - p_a\left[\sqrt[\gamma]{\mathcal{B}/\mathcal{C}} - \rho_a\right]\right). \tag{18.41}$$

Teniendo en cuenta los valores de las diferentes constantes introducidas:

$$\begin{aligned}\mathcal{C} =& \frac{p_a}{\rho_a^{\gamma}},\\ \mathcal{B} =& p_a + \frac{Mg}{A},\end{aligned}$$

y

$$\mathcal{K} = \frac{W\rho_a(\gamma-1)}{\gamma},$$

el tiempo de inicio de ascensión queda finalmente como

$$t_{asc} = \frac{V\gamma p_a}{W(\gamma-1)}\left(\frac{Mg}{p_a A\gamma} - \sqrt{1+\frac{Mg}{Ap_a}} + 1\right), \tag{18.42}$$

que marcaría el instante en que comienza la ascensión de la tapadera. A partir de ese momento y con la tapadera ascendiendo, el volumen del depósito no sería constante y habría que replantear la ecuación de conservación de la masa, para contemplar que $V = V(t)$, y el balance de fuerzas a la tapadera, para tener en cuenta que esa masa tiene movimiento (aceleración).

Problemas propuestos

1. Para simular el efecto de succión que genera la corriente de aire que circula por debajo de un automóvil cuando éste viaja a una velocidad V, se utiliza el siguiente modelo muy simplificado. El fondo del automóvil, de longitud $2L$, se supone bidimensional y a una distancia $h(x)$ del suelo (ver figura 18.9). El flujo de aire bajo el automóvil se supone incompresible, casi-unidireccional e ideal (desprecien también las fuerzas másicas). Con estas hipótesis calculen la fuerza vertical por unidad de longitud F_y que el aire ejerce sobre el fondo del coche. Hallen explícitamente F_y cuando

$$\frac{h(x)}{h_0} = 1 + \epsilon\left\{\cos\left[\pi\left(1+\frac{x}{L}\right)\right] - 1\right\}, \tag{18.43}$$

en el límite $\epsilon \ll 1$.

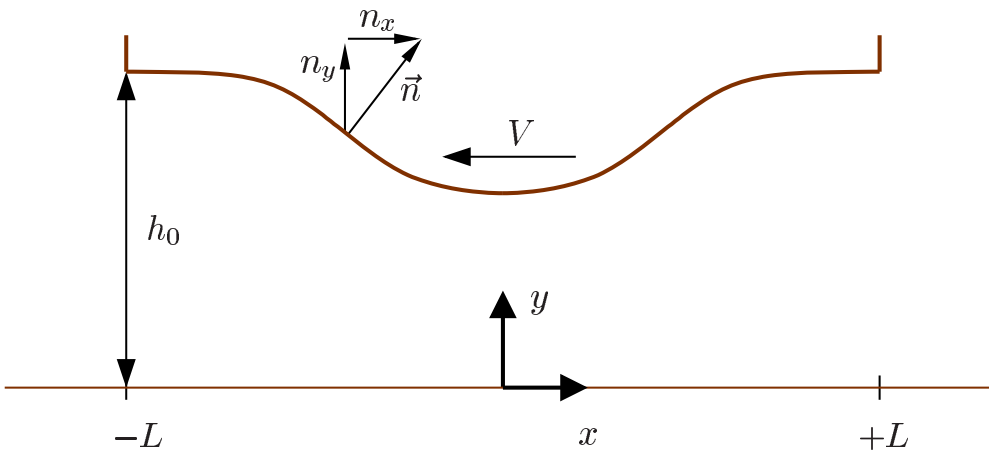


Figura 18.9: Bajo del coche

2. Se desea evaluar las características de un cohete que se utilizará para propulsar un misil. En esencia el cohete consta de un depósito en donde se encuentra un gas a presión p_o constante y conocida y de una tobera convergente-divergente de área de salida $A_s = 2A_{min}$ (ver figura 18.10). En particular se desea conocer el empuje suministrado por el motor del cohete y la relación de presiones que debe existir entre p_o y la presión exterior en los siguientes casos:

a) Tobera adaptada.

b) Onda de choque en la sección de salida.

c) Onda de choque en una sección tal que $A/A_{min} = 1{,}2$.

d) Suponiendo que el depósito posee una tobera convergente de área de salida igual al área mínima de la tobera anterior, calcular de nuevo el empuje para las relaciones de presiones obtenidas en los apartados anteriores.

e) Discutir y comparar los resultados.

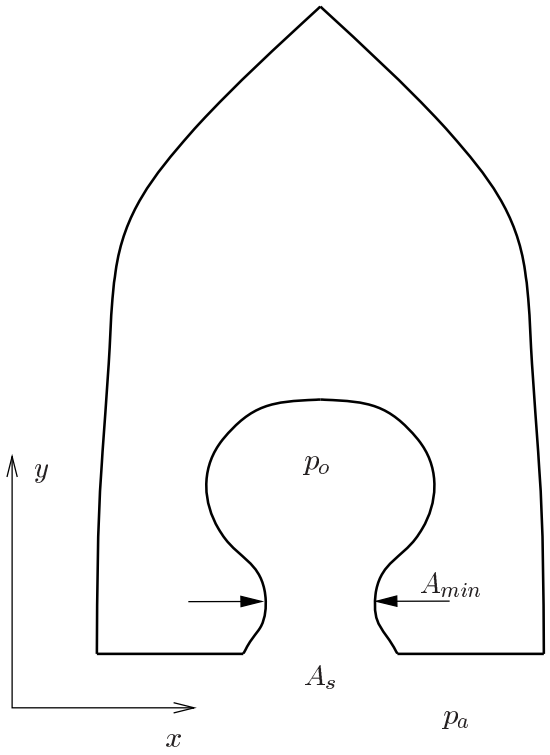


Figura 18.10: Esquema del depósito y tobera convergente-divergente dentro del misil.

3. Un conducto circular de diámetro D y longitud L ($\gg D$) de la figura 18.11 se encuentra en posición vertical y tiene su extremo superior tapado y el inferior abierto a la atmósfera. En el interior del conducto hay un líquido de densidad ρ y viscosidad μ. Si la longitud del conducto es inferior a una cierta longitud $L*$, el líquido se mantiene en el interior del cilindro por acción de la presión atmosférica. Sin embargo, si $L > L*$ parte del líquido saldrá por el extremo inferior del conducto hasta alcanzar una nueva posición de equilibrio. Con estas consideraciones, se pide:

   a) Longitud $L*$. Supongan que la presión de vapor del líquido es prácticamente nula comparada con la atmosférica y desprecien la tensión superficial.

   b) Si $L > L*$, escriban la ecuación diferencial que describe el movimiento de la superficie de separación x_s entre el líquido y vapor en el tiempo. Supongan que el movimiento del fluido se puede considerar como ideal (den los criterios para que esto sea cierto).

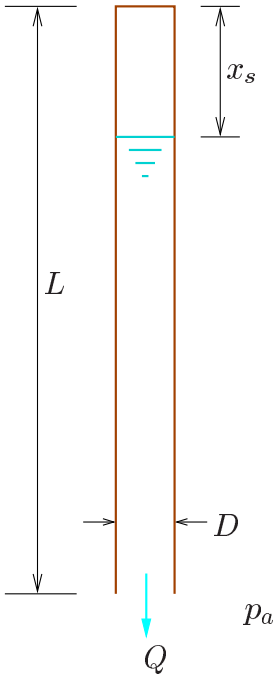


Figura 18.11: Descarga de un tubo vertical cerrado por su extremo superior.

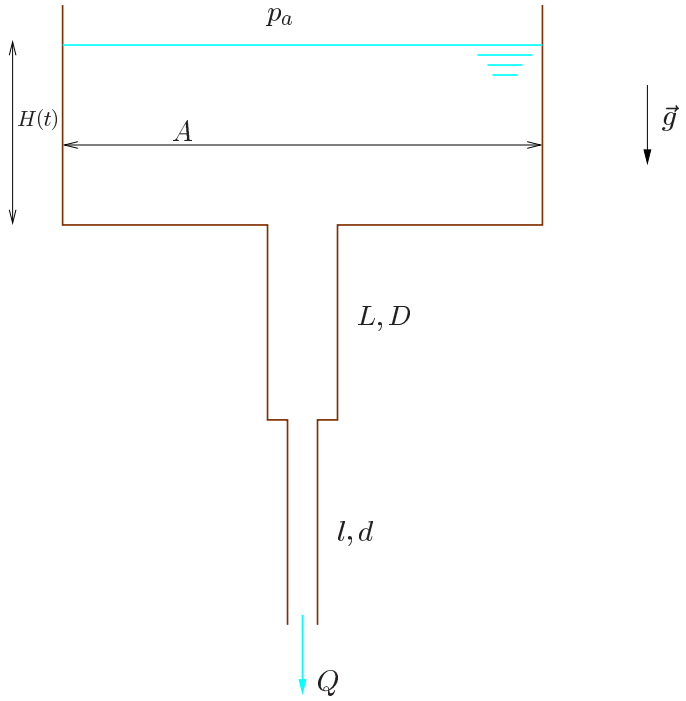


Figura 18.12

4. Un depósito de sección circular A de la figura 18.12 contiene un líquido de densidad ρ, siendo su nivel inicial H_0. Conectado a su fondo existe un conducto vertical de longitud

$L + l$ y diámetros D y d, ambos constantes ($D^2 \ll A, L \gg D, l \gg d$) y unidos entre sí, que permiten el vaciado del depósito a partir de $t = 0$. Suponiendo que el movimiento del fluido por los conductos se puede considerar como ideal y casi-estacionario y que es despreciable la pérdida de presión en la unión de los dos conductos, obtener la ecuación diferencial que gobierna la evolución de H con el tiempo. Simplificarla en el caso de que $d = D$ y $l \ll L$ y, entonces, obtener el orden de magnitud del tiempo de vaciado del depósito.

5. El conducto en forma de U de diámetro constante D mostrado en la figura 18.13, está girando con una velocidad angular constante Ω alrededor de un eje vertical que pasa a una distancia $L/3$ y $2L/3$ de los tramos verticales del conducto (ver figura). Sabiendo que la altura inicial del líquido es H y que las fuerzas viscosas son despreciables en el movimiento del líquido, se pide:

   a) Justificar que el sentido del movimiento es el indicado en la figura.

   b) Ecuación diferencial para obtener $h(t)$ y su valor final.

   c) Criterios que han de cumplirse, en función de los datos del problema, para que los resultados obtenidos sean válidos.

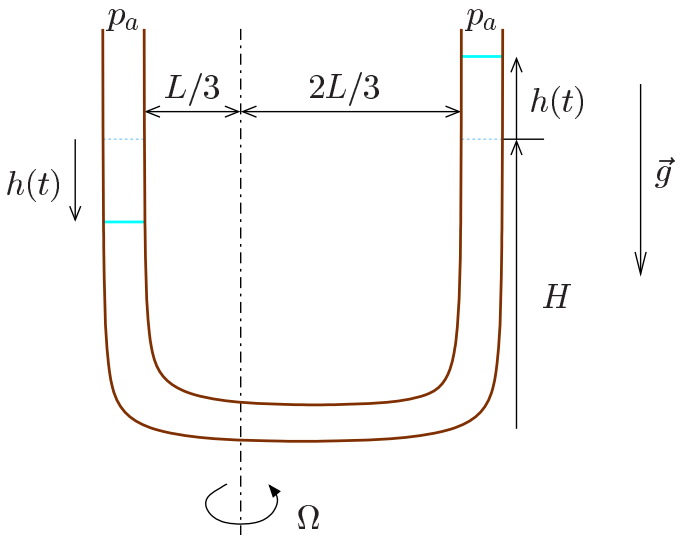


Figura 18.13: Tubo en forma de U girando con una velocidad angular Ω.

6. Un depósito circular de sección A mostrado en la figura 18.14 contiene una altura inicial de líquido h_0. Este líquido, de densidad ρ, descarga a través de un conducto de longitud L y de diámetro variable dado por $D(x) = D_0 + \frac{D_1 - D_0}{L}\, x$, siendo D_0 y D_1 los diámetros a la entrada y salida del mismo, respectivamente, y con $A \gg D_0^2$. Suponiendo que en el movimiento el líquido se puede considerar como ideal, se pide:

   a) Distribución de presión a lo largo del conducto en función de $h(t)$.

   b) Ecuación diferencial para calcular $h(t)$. En el caso en que $D_0 = D_1$, obtener el valor final de $h(t)$ y el tiempo característico de vaciado.

   c) Criterios para que los resultados anteriores sean válidos.

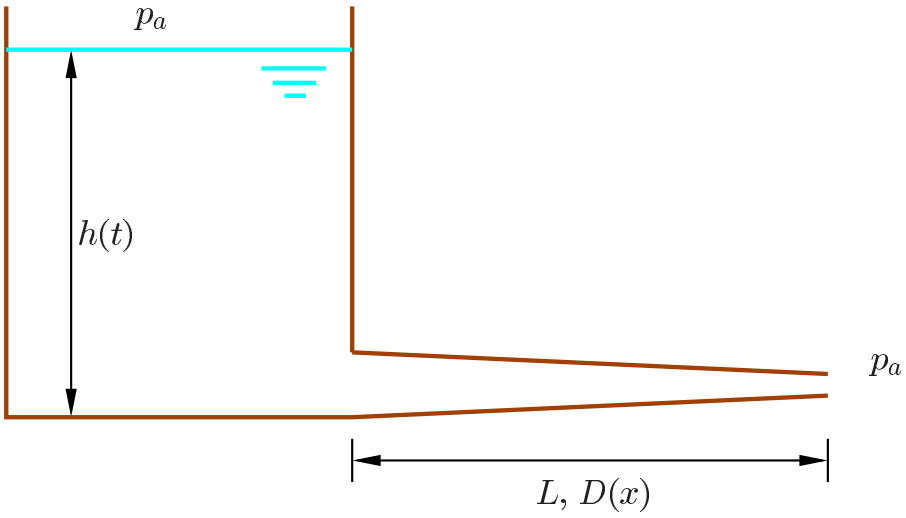


Figura 18.14: Descarga de un depósito por un conducto de sección variable.

7. El émbolo de masa M de la figura 18.15 se mueve verticalmente y sin rozamiento al tirarse de él mediante una fuerza F constante y conocida, partiendo de una altura inicial h_0. Tras ello, el depósito de sección A se va llenando de un líquido de densidad ρ del embalse de nivel constante H_0 a través del conducto de longitud L y diámetro D de la figura ($A \gg D^2$). Sabiendo que el fluido se puede considerar como ideal en su movimiento y que la velocidad del mismo en el depósito es despreciable respecto a la del conducto, obtener la ecuación diferencial que proporcionará la altura del émbolo $h(t)$ en función de los datos del problema. ¿Cuánto vale su valor final?

   Integren la ecuación diferencial anterior en el supuesto de que la masa M del émbolo sea despreciable y si $H \gg H_0$ y $H \gg h$. En este caso, ¿alcanzará $h(t)$ algún valor final?

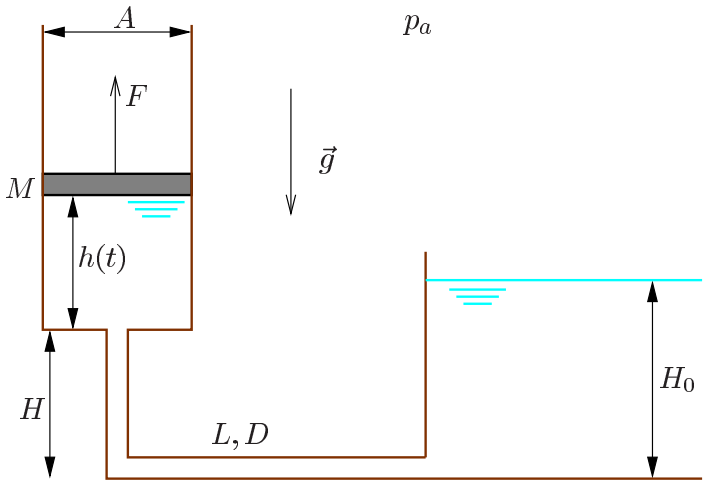


Figura 18.15: Llenado de un conducto mediante un émbolo.

8. Se pretende estudiar la ascensión de un líquido por un conducto vertical de diámetro constante D y longitud L ($L \gg D$) como el que se muestra en la figura 18.16. Para tal fin se emplea una bomba que proporciona una potencia W al fluido, el cual es succionado desde la superficie de un embalse, ver figura. Suponiendo que el fluido, de densidad ρ, en su movimiento se puede considerar como ideal y que entre la bomba y el caudal Q que circula por ella existe la relación $W = Q(a + b\,Q)$, donde a y b son constantes conocidas, se pide:

   a) Par de ecuaciones diferenciales para calcular $Q(t)$ y $h(t)$ en función de los datos del problema.

   b) Valor final h_e que alcanzará $h(t)$ en función de los datos del problema. ¿Qué condición se debe de dar para que el líquido llegue justo al final del conducto?

   c) Orden de magnitud del tiempo en alcanzar el valor final estacionario h_e.

   d) Cuando el líquido llena por completo el conducto, ¿cuál es el caudal que proporcionará la bomba en régimen estacionario?

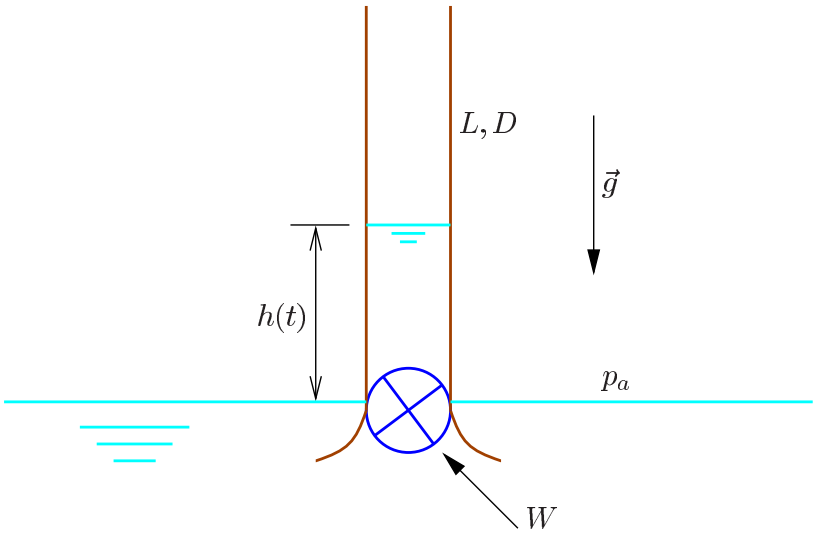


Figura 18.16: Ascensión de un líquido por un conducto a través de una bomba.

9. Para impulsar agua a gran velocidad se dispone de un conducto de área A lleno de agua que termina en una tobera convergente de longitud mucho menor que la del conducto y área mínimo A_s (ver figura 18.17). El agua es empujada por medio de un pistón de masa despreciable y cuyo rozamiento con las paredes es también despreciable. Sabiendo que el pistón se desplaza con una aceleración constante a_0, calcular la fuerza $F(t)$ que es necesaria ejercer sobre el mismo.

10. El depósito cilíndrico de sección A de la figura 18.18 contiene en su parte inferior un gas (de densidad ρ_d, presión p_d, calor específico c_p y $\gamma = 1{,}4$), inicialmente en condiciones atmosféricas, y cerrado por su parte superior mediante un émbolo de masa M, situado inicialmente a una altura h_0. Por otro lado, un conducto de diámetro D, $D^2 \ll A$, descarga un caudal constante Q de un líquido de densidad ρ en la parte superior del depósito, que inicialmente está lleno hasta una altura H_0. Debido al peso tanto del

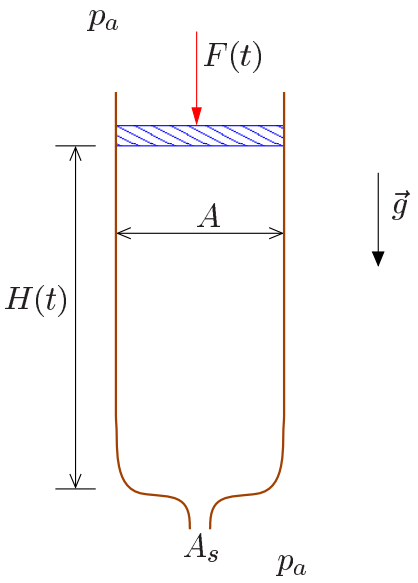


Figura 18.17

líquido como del émbolo, éste va descendiendo con una velocidad U desconocida y comprime el gas que es forzado a salir por la turbina situada en el fondo del depósito y del que extrae una potencia $W(t)$. Sabiendo que el depósito está aislado térmicamente y que la energía cinética del gas que sale por la turbina es despreciable, se pide:

a) Obtener el conjunto de ecuaciones necesarias que permitan conocer la potencia extraída del gas en la turbina $W(t)$.

b) Simplifiquen las expresiones anteriores en el caso particular de que $Q = 0$ y la masa del émbolo sea despreciable.

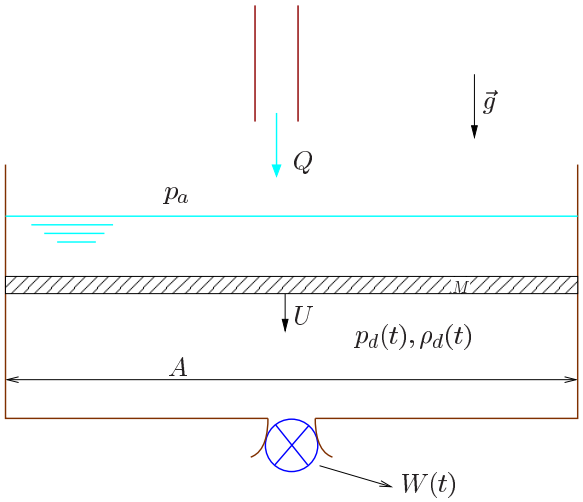


Figura 18.18: Compresión de un gas encerrado en un depósito mediante un émbolo.

11. Para acelerar el proceso de descarga del líquido, de densidad ρ y viscosidad despreciable, contenido en un depósito, de sección circular A y volumen V, a través de un orificio de diámetro d situado en su fondo ($d^2 \ll A$), se coloca en su parte superior un compresor que comunica una potencia W (constante y conocida) al aire que es forzado a pasar por él hasta la parte superior del depósito (ver figura 18.19). Sabiendo que no puede haber intercambio de calor a través de las paredes del depósito, que la energía cinética del aire que sale del compresor es despreciable, que la altura inicial del líquido es h_0 y que las propiedades iniciales del aire en la parte superior del depósito son las atmosféricas, obtener el conjunto de ecuaciones que permitan obtener las evoluciones con el tiempo de $h(t)$, $p_d(t)$ y $\rho_d(t)$.

    Simplifiquen las expresiones anteriores para considerar el caso de que el compresor no se activara y se bloqueara, por tanto, la entrada de aire al depósito. ¿Quedaría líquido en él? En caso afirmativo, dar los valores finales h_e de $h(t)$, p_{d_e} de $p_d(t)$ y ρ_{d_e} de $\rho_d(t)$.

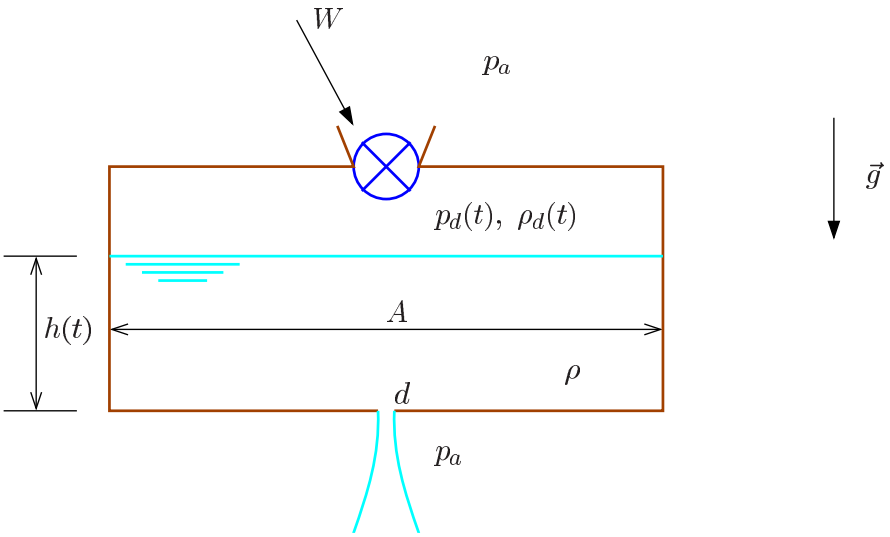


Figura 18.19

12. Sobre el pistón de masa M de la figura, que se mueve en un depósito cilíndrico aislado térmicamente de sección A, se le está ejerciendo una fuerza constante F. El descenso del pistón, sin rozamiento con las paredes del depósito e inicialmente situado a una altura H_0 del fondo del depósito, da lugar a la compresión del gas (inicialmente en condiciones atmosféricas) que hay encerrado entre el pistón y el fondo del depósito.

    Obtengan el conjunto de ecuaciones que proporcionan la posición $H(t)$ del pistón, la presión y la densidad del gas, $p_g(t)$ y $\rho_g(t)$, respectivamente. Den la posición final del pistón y una estimación del tiempo que se tardaría en alcanzarla.

13. Un depósito de forma cilíndrica de sección recta A y longitud L, como el mostrado en la figura 18.21, tiene dos orificios en sus extremos, el de la derecha con sección mínima en la cara exterior y el de la izquierda con sección mínima en la cara interior y un pistón que lo divide en dos mitades. El depósito y el pistón están aislados térmicamente. Inicialmente está lleno de aire a presión p_a y densidad ρ_a y el pistón comienza a desplazarse hacia la

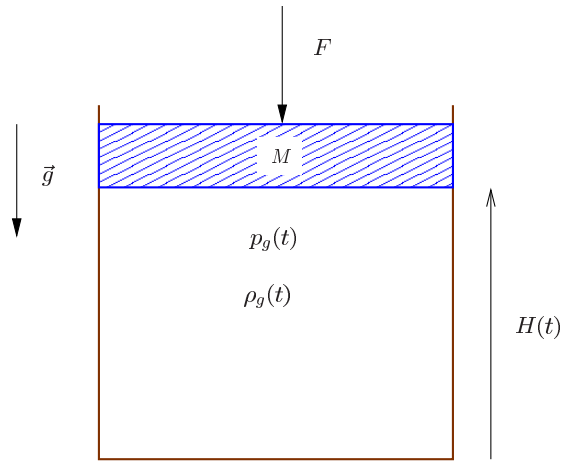


Figura 18.20

derecha con una velocidad v. Suponiendo movimiento subsónico en los dos orificios, se pide:

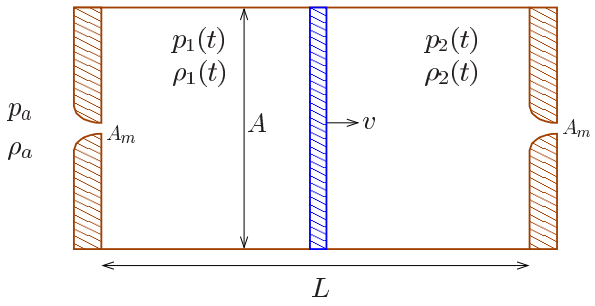


Figura 18.21: Carga y descarga de un depósito a través de toberas convergentes.

a) Gastos másicos de aire que entra en el depósito 1 (G_1) y que sale del 2 (G_2) en función de p_a, ρ_a, p_1, p_2 y ρ_2.

b) Aplicando las ecuaciones de conservación de masa y energía, escribir las ecuaciones que determinan la evolución de la presión y densidad en los dos depósitos.

c) Simplificar el problema para el caso de que el movimiento en los dos orificios fuese a números de Mach mucho menores que la unidad.

14. Una corriente supersónica se quiere reducir hasta velocidad nula, que será alcanzada en la cámara de remanso posterior a la tobera, para lo que se utiliza la tobera convergente–divergente de la figura 18.22 (siendo $M_3 = 0{,}05$). Las condiciones en la sección de entrada son conocidas: $M_1 = 2{,}5$, $T_1 = 200$ K, $p_1 = 0{,}2$ atm, mientras que de la forma de la tobera es conocida su área mínima, $A_m = 0{,}3$ m^2. Se pretende calcular el área de la tobera en su sección de entrada y salida, A_1 y A_3, respectivamente, así como las condiciones de remanso en la cámara final, p_0, ρ_0 y T_0, cuando aparece una onda de choque normal en el tramo divergente en una sección $A_{oc} = 1{,}5A_m$, figura 18.22. Supóngase $\gamma = 1{,}4$, $R_g = 287$ J/Kg K, 1 atm$\simeq$101300 Pa.

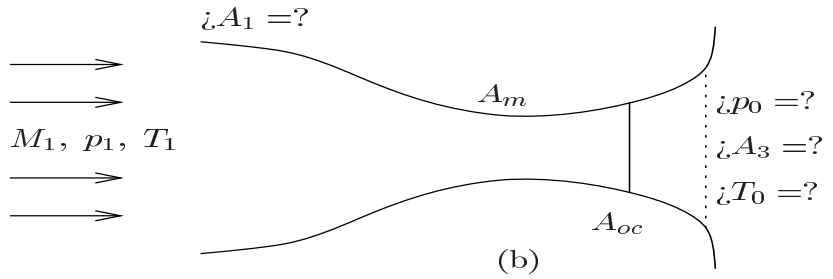


Figura 18.22: Flujo supersónico sobre una tobera.

15. El túnel aerodinámico supersónico de la figura 18.23 consta de una tobera convergente-divergente a su entrada, por el que entra aire procedente de un depósito con condiciones de remanso conocidas, un tramo de sección constante $A_p = 1$ m^2 (la sección de ensayos para estudiar el flujo supersónico alrededor de prototipos) y una tobera convergente-divergente a su salida que ajusta la corriente de aire a las condiciones atmosféricas $p_s = p_a = 1$ atm ($M_s = 0{,}05$). En el tramo de ensayos se quiere conseguir un número de Mach $M_p = 3$, para lo que se deberá determinar el área mínima de la tobera de entrada A_{m1}, el de la salida A_{m2} y A_s, v_s y T_s cuando el flujo es isentrópico en todo el túnel.

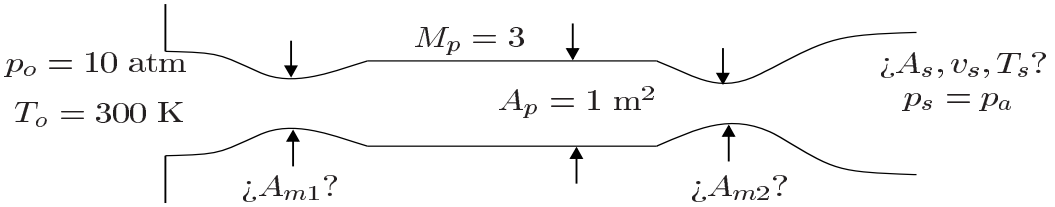


Figura 18.23: Túnel aerodinámico

16. El reactor de un avión supersónico tiene una entrada en forma de tobera convergente–divergente (ver figura 18.24) cuya área de entrada es de 2 m^2 y la de salida de 1,75 m^2. El área de su garganta es variable dependiendo de la velocidad de vuelo.

    Para las dos condiciones de vuelo siguientes:

    a) $v_1 = 195$ m/s, $T_1 = -10$ ^{o}C y $p_1 = 0{,}75$ atm, siendo $M_3 < 1$ [ver figura 18.24(a)]; y
    b) $v_1 = 612$ m/s, $T_1 = -40$ ^{o}C y $p_1 = 0{,}25$ atm, siendo $M_3 > 1$ y con una onda de choque normal a la entrada de la tobera [ver figura 18.24(b)],

    obtener el área que habría que fijar en la garganta para que el movimiento en la tobera sea isentrópico con condiciones sónicas en la garganta ($M = 1$ en A_2), así como el gasto que circula por la tobera y las condiciones a la salida M_3, p_3 y T_3. Datos: $R_g = 287$ J/Kg K, $\gamma = 1{,}4$.

17. La cámara de combustión de un avión supersónico descarga los gases de la combustión a través de la tobera convergente-divergente de la figura 18.25. Teniendo en cuenta la distribución de presión en la atmósfera estándar dada por la expresión $p = p_0\, \mathrm{e}^{-z/\alpha}$, con $p_0 = 101325$ Pa, $\alpha \approx 8000$ m y z en metros, se pide calcular la altura H de vuelo del avión para que:

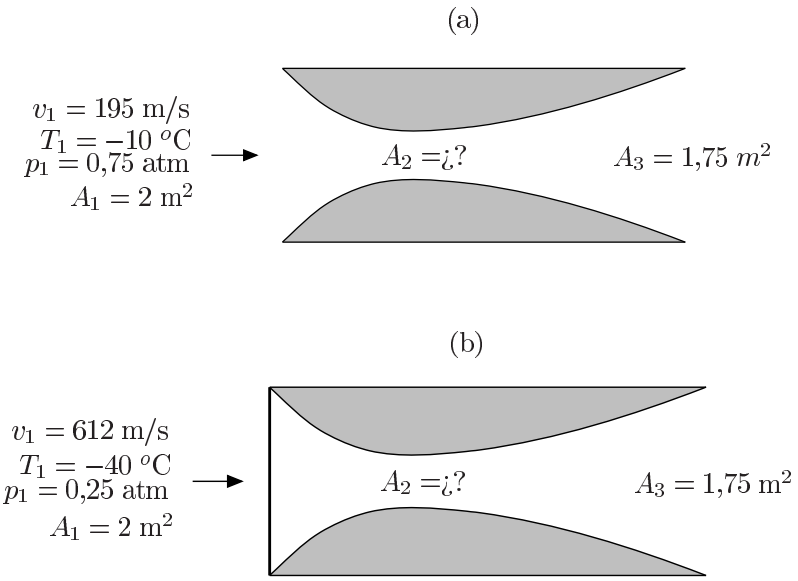


Figura 18.24

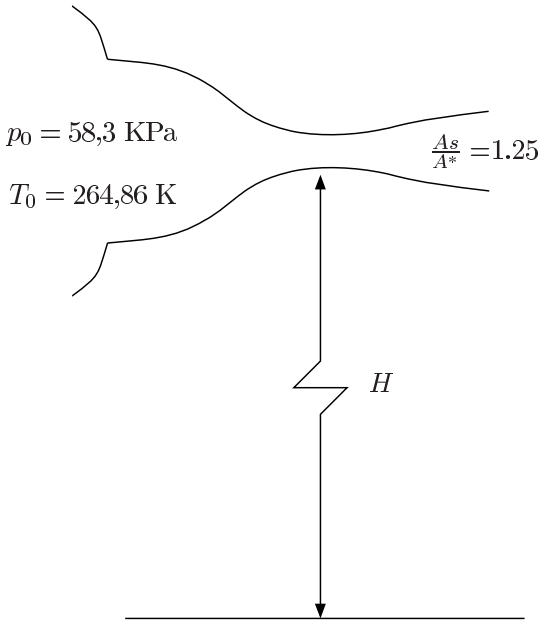


Figura 18.25: Cámara de combustión y tobera de expulsión de gases.

a) el flujo sea subsónico en toda la tobera con condiciones críticas en la sección de área mínima;

b) el flujo sea isentrópico y supersónico a la salida; y

c) aparezca una onda de choque en la sección de salida.

Por otro lado, si la altura de vuelo es a $H = 7$ Km, ¿cuánto valdrá el número de Mach a la salida de la tobera?

Práctica de laboratorio: Descarga de un depósito

Objetivo, montaje experimental, ecuaciones y definiciones

Con esta práctica se pretende estudiar el proceso de descarga del aire contenido en un depósito a presión a través de un orificio, comparando las medidas experimentales de la evolución temporal de la presión en el interior del depósito (p_0) y del gasto másico de descarga (G) con las prediciones teóricas que se han visto en las lecciones 17 y 18, suponiendo que el orificio se comporta como una tobera convergente con una sección mínima a la salida. En particular, se considerarán dos fases en la descarga: una primera en la que el orificio es *crítico* (condiciones sónicas en la sección de salida del orificio), durante la cual el gasto es crítico y no depende de la presión atmosférica (p_a) en la que descarga el depósito, y una segunda fase en la que todo el flujo en el orificio es subsónico y el gasto de descarga depende de la presión atmosférica. La primera fase tendrá lugar mientras que la presión en el depósito sea mayor que $p_a[(\gamma+1)/\gamma]^{\gamma/(\gamma-1)}$ [ver (17.28)], y por ello se tomará una presión inicial en el depósito suficientemente mayor que ese valor. Téngase en cuenta que el gasto de descarga nunca es constante, ni siquiera en la primera fase en la que es crítico, pues las condiciones de remanso (presión y densidad) en la tobera (orificio) son las del depósito, que van disminuyendo durante el proceso de descarga. Se supondrá, además, que durante el proceso de descarga es despreciable el intercambio de calor entre el aire contenido en el depósito y el exterior a través de las paredes del depósito, lo cual simplificará la ecuación de la energía en el depósito a la ecuación isentrópica (18.15).

En la figura 18.26 se representa un esquema de la instalación de la práctica. Básicamente consta de un depósito de volumen V (de 100 l de capacidad), un compresor, que cargará el depósito hasta la presión inicial a partir de la cual se procederá a la descarga, dos válvulas (una de ellas será la que conecte el depósito con la tobera de salida), una tobera convergente (con un orificio de 1 mm de diámetro en su salida), un medidor de presión y un caudalímetro, estos dos últimos conectados a un ordenador mediante una tarjeta de adquisición de datos.[2]

Al tratarse la boquilla de salida de una tobera convergente con la sección de área mínima en la sección de salida s, el máximo número de Mach que se conseguirá en la tobera será de 1 y precisamente en la salida, es decir, $M_s = 1$, que, de acuerdo con (17.25), ocurrirá justo cuando $p_0/p_a = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}$. Por tanto, el depósito se cargará a una presión inicial p_{0i} (el subíndice i indicará condiciones iniciales) tal que las condiciones iniciales en la sección de salida una vez que comience la descarga, sean sónicas, lo cual requiere que $p_{0i}/p_a > \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}$. Este dato conocido de presión p_{0i} nos dará la condición inicial para determinar la evolución temporal teórica de la presión. Por otro lado, debido a un tiempo elevado de carga a presión p_{0i}

[2]El montaje experimental ha sido construido y puesto a punto por D. Sergio Pinazo Ortega.

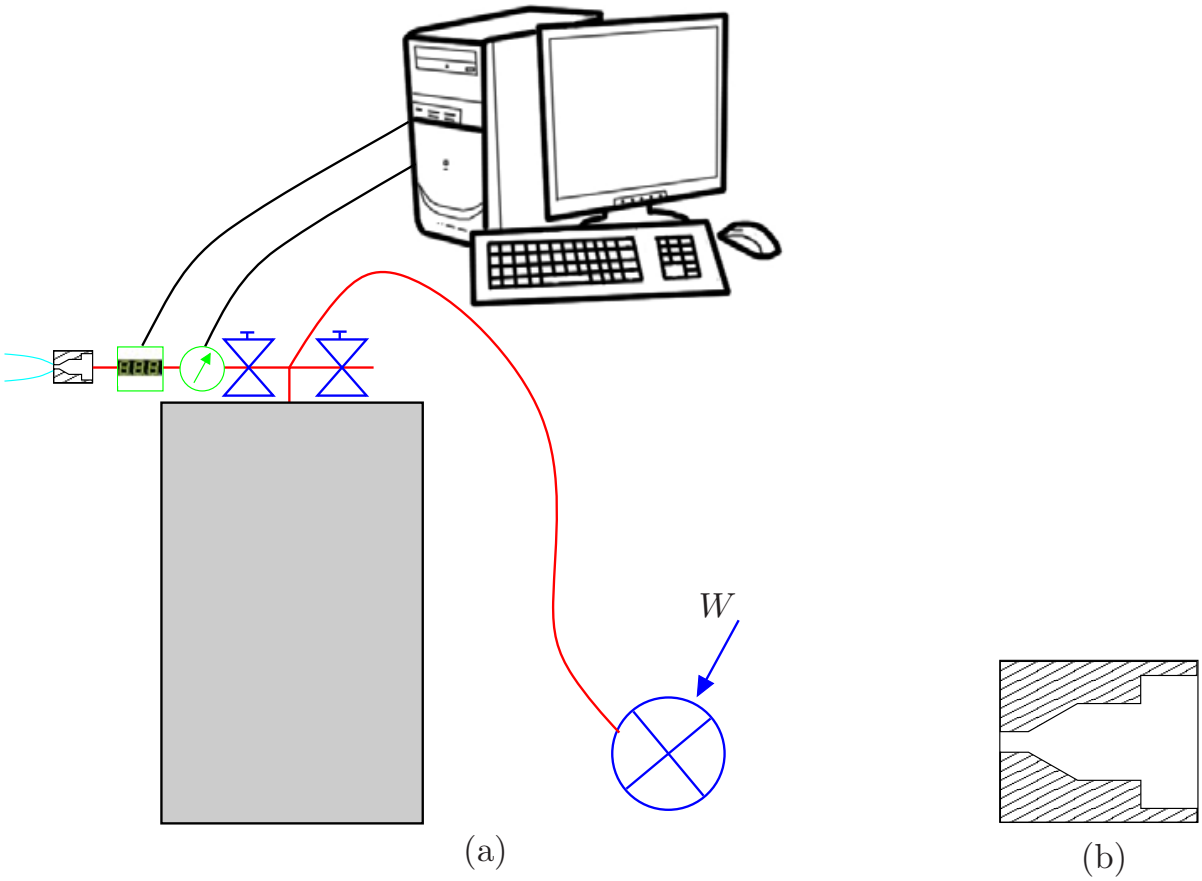


Figura 18.26: (a) Esquema de la instalación. (b) Ampliación de la sección longitudinal de la tobera convergente (el diámetro de salida es de 1 mm).

antes de iniciar la descarga, la temperatura del aire en su interior se podrá suponer que es la ambiental, es decir, $T_{0i} = T_a$. Estos datos iniciales de presión y temperatura permiten conocer la densidad inicial del aire en el depósito ρ_{0i}, necesaria también para calcular la evolución teórica de la densidad en el depósito que, junto con la evolución de la presión y al ser el aire un gas considerado como perfecto, permitirá obtener también la evolución teórica de la temperatura del aire en el depósito.

Con las consideraciones previas hechas y usando las variables adimensionales

$$\eta = \frac{\rho_0}{\rho_a},\ \zeta = \frac{p_0}{p_a},\ \mathcal{G} = \frac{G}{G_a} \text{ y } \tau = \frac{t}{t_c}, \tag{18.44}$$

con $G_a = \rho_a a_a A_s \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(1-\gamma)}}$ [ecuación (17.23) con condiciones atmosféricas y $M = 1$], las ecuaciones adimensionales que rigen la descarga de un depósito se escriben

$$\frac{d\eta}{d\tau} = -\mathcal{G}, \tag{18.45}$$

$$\frac{\zeta}{\eta^\gamma} = \text{constante}, \tag{18.46}$$

$$\mathcal{G} = \sqrt{\eta\zeta} M_s \left(\frac{2 + (\gamma - 1) M_s^2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(1-\gamma)}}, \tag{18.47}$$

que se corresponden con las ecuaciones (18.9), con $-G$, (18.15) y (17.20), respectivamente, y donde se ha usado como tiempo característico (de descarga) $t_c = V\rho_a/G_a$. Las condiciones (dimensionales) iniciales del proceso de descarga serían, $T_{0i} = T_a$, $p_{0i} = k\, p_a$, con $k > \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}$, y $\rho_{0i} = p_{0i}/[R_g T_{0i}] = k\, \rho_a$, de modo que para las adimensionales se tendría, de acuerdo con (18.44),

$$\eta(0) = k \equiv \eta_i, \ \zeta(0) = k \equiv \zeta_i. \tag{18.48}$$

El sistema de ecuaciones (18.45)–(18.47) proporciona, por tanto, la evolución teórica de la descarga del depósito desde las condiciones iniciales hasta las atmosféricas. No obstante, y como se anticipó previamente, su resolución se lleva a cabo en dos etapas: la primera, con la consideración de condiciones críticas en la sección de área mínima a la salida ($M_s = 1$); y la segunda, con flujo subsónico en la salida ($M_s < 1$). A continuación se verán las ecuaciones que gobiernan cada una de estas etapas incluyendo en ellas las consideraciones asociadas a cada una.

I.- Orificio crítico: Esta situación se dará mientras $\zeta \geq \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}$. Además, también se cumple que $M_s = 1$ con lo que (18.45)–(18.47) se convierten en

$$\frac{d\eta}{d\tau} = -\mathcal{G}, \tag{18.49}$$

$$\frac{\zeta}{\eta^\gamma} = \text{constante} = \frac{\zeta_i}{\eta_i^\gamma} \equiv \mathcal{I}, \tag{18.50}$$

$$\mathcal{G} = \sqrt{\eta\zeta}. \tag{18.51}$$

De (18.50), se obtiene $\zeta = \mathcal{I}\eta^\gamma$, por lo que sustituyendo en (18.51) se llega a $\mathcal{G} = \sqrt{\mathcal{I}\eta^{\gamma+1}}$, que introducido en (18.49) proporciona la ecuación para la evolución de η

$$\frac{d\eta}{d\tau} = -\sqrt{\mathcal{I}\eta^{\gamma+1}} = -\sqrt{\mathcal{I}}\eta^{\frac{\gamma+1}{2}}, \quad \text{siendo} \quad \eta(0) = \eta_i. \tag{18.52}$$

Esta ecuación diferencial ordinaria tiene solución analítica que es

$$\eta = \left(\frac{\gamma+1}{2} \tau \sqrt{\mathcal{I}} + \eta_i{}^{\frac{1-\gamma}{2}} - \tau\sqrt{\mathcal{I}} \right)^{-\frac{2}{\gamma-1}}. \tag{18.53}$$

Con la densidad adimensional η conocida, la presión adimensional se escribe

$$\zeta = \mathcal{I}\left(\frac{\gamma+1}{2} \tau \sqrt{\mathcal{I}} + \eta_i{}^{\frac{1-\gamma}{2}} - \tau\sqrt{\mathcal{I}} \right)^{-\frac{2\gamma}{\gamma-1}}. \tag{18.54}$$

Esta solución vale mientras $\zeta > \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}$, por lo que de (18.54) se puede obtener el tiempo (adimensional) en que esto ocurre, es decir, $\zeta(\tau_{sub}) = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}$. Así, el tiempo en el que las condiciones en la sección de salida dejan de ser sónicas es

$$\tau_{sub} = \frac{\sqrt{\frac{8\mathcal{I}^{\frac{(\gamma-1)}{\gamma}}}{\gamma+1}} - 2\eta_i{}^{\frac{1-\gamma}{2}}}{\sqrt{\mathcal{I}}(\gamma-1)}. \tag{18.55}$$

Para tiempos mayores el flujo es subsónico en toda la tobera, incluida la salida, y lo anterior deja de ser válido, requiriendo su estudio nuevas consideraciones, como se verá a continuación.

II.- Orificio subsónico: Esta situación se alcanza en el momento en que $\zeta < \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}$, para $\tau > \tau_{sub}$. En este caso, en la sección de salida se tiene $M_s < 1$, siendo la condición de contorno que determina el gasto $p_s = p_a$. El modo de proceder con la resolución de este caso sería mediante la resolución del sistema de ecuaciones (18.45)–(18.47), al que hay que añadir una ecuación más para conocer el número de Mach en la sección de salida, ecuación (17.25) evaluada en la salida s, quedando el sistema de ecuaciones a resolver como

$$\frac{d\eta}{d\tau} = -\mathcal{G}, \tag{18.56}$$

$$\frac{\zeta}{\eta^\gamma} = \mathcal{I},\ \zeta = \mathcal{I}\eta^\gamma, \tag{18.57}$$

$$\mathcal{G} = \sqrt{\eta\zeta} M_s \left(\frac{2+(\gamma-1)M_s^2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(1-\gamma)}}, \tag{18.58}$$

$$M_s = \sqrt{\frac{2(\zeta^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}-1)}{\gamma-1}}. \tag{18.59}$$

Sustituyendo ahora (18.57) y (18.59) en (18.58), y ésta en (18.56), se obtiene una única ecuación para la evolución de la densidad η con el tiempo τ:

$$\frac{d\eta}{d\tau} = -a\sqrt{b\eta^{\gamma-1}+c}, \quad \text{siendo} \quad \eta(\tau_{sub}) = \left[\frac{\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{\mathcal{I}}\right]^{1/\gamma}, \tag{18.60}$$

y donde

$$a = \left(\frac{2\mathcal{I}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(1-\gamma)}},\ b = \frac{2\mathcal{I}^{\frac{2\gamma-1}{\gamma}}}{\gamma-1} \text{ y } c = \frac{-2\mathcal{I}}{\gamma-1}. \tag{18.61}$$

Esta ecuación no tiene solución analítica para un valor arbitrario de γ y ha de obtenerse numéricamente. A modo de ejemplo, en la figura 18.27 se muestra la evolución de las magnitudes adimensionales η, ζ y $\mathcal{G}$ respecto a τ, donde la línea vertical separa la parte de condiciones críticas en la salida de condiciones subsónicas. Para obtener esta evolución se ha considerado $k = 3$, $T_a = 20$ ºC y que el gas es aire ($\gamma = 1{,}4$).

Realización de la práctica y presentación de resultados

Al iniciar la práctica el estudiante se encontrará con el sistema preparado para que solo tenga que, por un lado, abrir la válvula para que se inicie la descarga y, por otro, monitorizar la evolución de la presión en el depósito y el gasto de salida durante la descarga. Su tarea consistirá en observar en el ordenador la evolución temporal de la presión del depósito y el gasto y, una vez finalice el proceso de descarga, almacenar en un dispositivo de memoria las evoluciones temporales de la presión y el gasto que serán usadas posteriormente para su comparación con las relaciones teóricas anteriores.

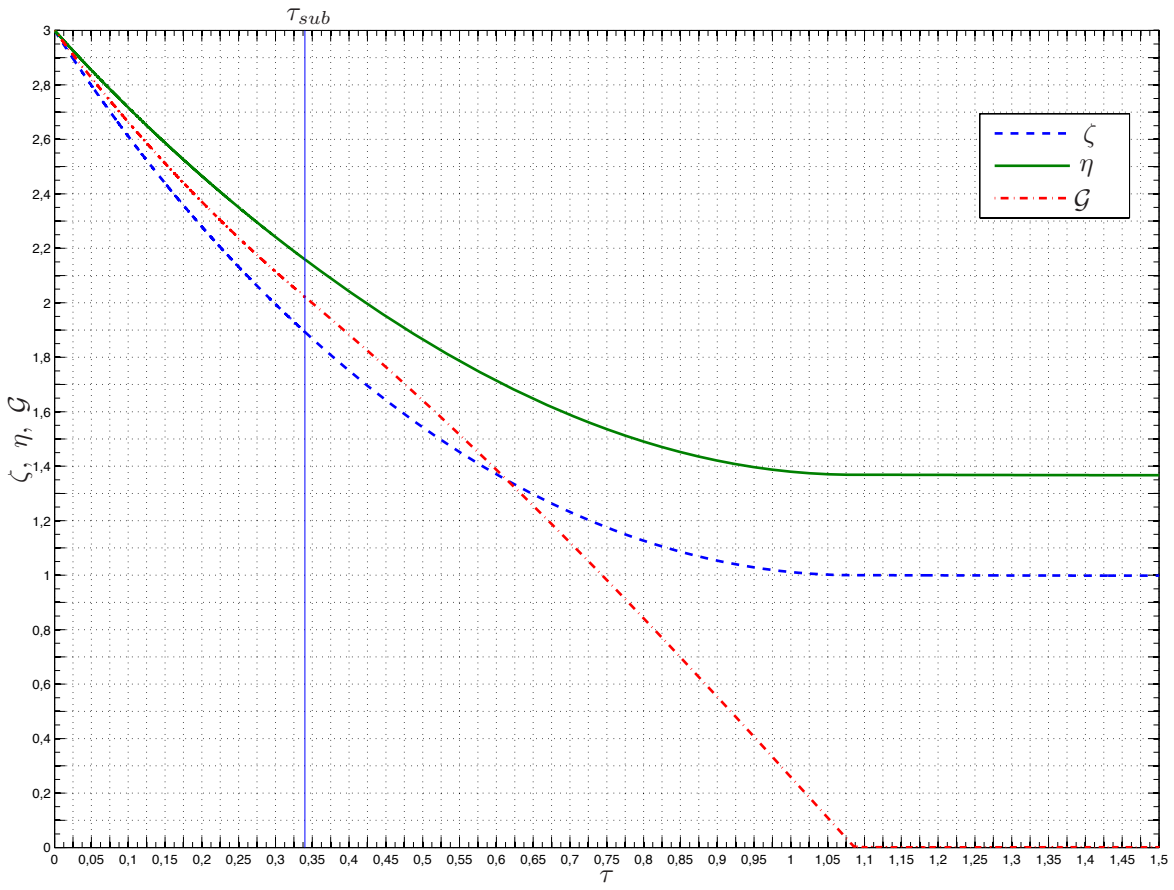


Figura 18.27: Evolución de las magnitudes adimensionales η, ζ y $\mathcal{G}$ frente a τ para $k = 3$, $T_a = 20$ °C y $\gamma = 1{,}4$.

Detalladamente y considerando que el depósito estará cargado cuando llegue al laboratorio, los pasos que el alumno llevará a cabo para completar la práctica serán:

1. Poner en marcha el equipo informático para la adquisición de datos, así como el software encargado de ello.

2. Tomar nota de la temperatura ambiente T_a, que será la condición inicial de la temperatura del aire en el depósito al iniciarse la descarga y servirá para conocer la densidad inicial del aire en el depósito.

3. Abrir completamente la válvula. En este momento el ordenador debería comenzar a registrar la evolución temporal tanto de la presión como del caudal que indican los respectivos medidores. La presión monitorizada justo al abrir la válvula ($t = 0$) será considerada como la inicial, la cual permitirá determinar el valor de k (recuérdese que $p_{0i} = k\, p_a$).

4. Una vez la descarga concluya, que se considerará cuando la presión del depósito sea prácticamente la atmosférica (será de unos 10 minutos si $k = 3$), se parará la toma de datos, se grabarán en el ordenador y se cerrará la aplicación de adquisición de datos. Hecho esto, el alumno se grabará en un dispositivo de almacenamiento personal las evoluciones de la presión y del caudal.

Con la información que el estudiante se grabará debe llevar a cabo la comparación entre la evolución de las magnitudes monitorizadas experimentales y las teóricas. Dicha comparación se podrá hacer bien a través de la tabla del anexo o bien gráficamente. Para esto último, el alumno tendría que usar la solución analítica dada en (18.54) junto con la solución obtenida tras la integración numérica de (18.60), o usar el código en Matlab que genera la solución completa, disponible en un fichero comprimido en este enlace.

Anexo: Hoja de toma de datos

Temperatura ambiental inicial:

t (s)	τ	$p_{0_{exp}}$ (atm)	ζ_{exp}	G_{exp} (kg/s)	$\mathcal{G}_{exp}$	ζ_{teo}	$\mathcal{G}_{teo}$

CAPÍTULO 19

Capa límite laminar incompresible. Resistencia aerodinámica

19.1. Concepto de capa límite

Hasta principios del siglo XX las teorías "viscosa" e "ideal" de la Mecánica de Fluidos se habían desarrollado prácticamente por separado:

- La teoría ideal, más antigua, iniciada por los Bernoulli y Euler entre otros, acertaba a describir ciertos flujos con gran precisión, muy especialmente la propagación de diversos tipos de ondas en fluidos; pero fallaba estrepitosamente a la hora de predecir la resistencia aerodinámica de un objeto moviéndose en el seno de un fluido, un problema de enorme interés práctico;
- La teoría viscosa, desarrollada a lo largo del siglo XIX, predecía el comportamiento de líquidos con gran viscosidad o de flujos muy lentos; pero no servía o era impracticable a la hora de predecir la resistencia aerodinámica en cuanto la velocidad del objeto no era extremadamente pequeña, dejando de tener utilidad práctica, excepto en problemas muy particulares como el de la sedimentación descrito en la lección 14.

Ambas teorías estaban enfrentadas por la condición de no deslizamiento del fluido sobre las superficies sólidas, que en la teoría ideal no es necesaria y en la viscosa sí lo es. Dado el éxito de la teoría ideal para describir ciertos movimientos fluidos, no es de extrañar que se pusiera en duda la necesidad de esta condición de contorno, salvo en líquidos muy viscosos, cuyo comportamiento se pensaba que podría ser diferente.

Fue en 1904, en un trabajo presentado por el físico e ingeniero alemán Ludwig Prandtl en el Tercer Congreso Internacional de Matemáticas celebrado en Heidelberg y titulado *Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung* (que se puede traducir como *Sobre el movimiento de fluidos con muy poca fricción*), donde se introdujo por primera vez el concepto de capa límite: cerca de las paredes sólidas los efectos viscosos son importantes por muy pequeña que sea la viscosidad del fluido y estos son los responsables de que se cumpla la condición de no deslizamiento.

Así, según el trabajo de Prandtl, los flujos de fluidos con viscosidad pequeña (flujos a número de Reynolds grande diríamos ahora) constan de dos regiones diferenciadas: una *externa* donde el fluido se puede considerar como ideal, y una *capa límite* delgada, alrededor

de las superficies sólidas, donde los efectos viscosos son importantes, no porque la viscosidad sea mayor allí, sino porque el gradiente de la velocidad normal a la superficie es muy acusado al ser una capa muy delgada, de forma que el término de fuerzas viscosas en la ecuación de cantidad de movimiento se hace del mismo orden que el término convectivo en el interior de esta delgada capa.

Prandtl clarificó así la controversia de la condición de no deslizamiento en fluidos, unificando las hasta entonces dos inconexas ciencias que describían los flujos ideales y los fluidos viscosos. El concepto de capa límite no solo permitió predecir la resistencia de fricción en flujos con altos números de Reynolds, sino que también permitió explicar el fenómeno de separación de la corriente (incluido también por Prandtl en su pequeño artículo citado) y así entender la resistencia aerodinámica de los cuerpos *romos.* Por todo ello se le considera como el padre de la Mecánica de Fluidos actual.

Desde un punto de vista matemático, la teoría subyacente al concepto de capa límite se ha extendido a otros muchos problemas de la Ingeniería y la Física Aplicada gobernados por ecuaciones que presentan una estructura similar: un parámetro pequeño que multiplica al término con derivadas de mayor orden; si se desprecia este término no se pueden imponer la totalidad de las condiciones de contorno, por lo que debe existir una capa (límite) delgada donde ese término no se puede despreciar. La solución global aproximada consta de dos partes, una externa y otra interna que se acoplan *asintóticamente.*

En esta lección solo se presentarán las ecuaciones de capa límite en el caso más simple de un flujo bidimensional, incompresible y estacionario y se resolverán para el caso de una placa plana semiinfinita, de manera que el estudiante pueda tener una idea de cómo se calcula la resistencia de fricción en un caso sencillo, expresión que por otro lado puede ser útil para estimar la resistencia de fricción en geometrías más complejas. También se explicará el fenómeno de separación de la capa límite, de manera que será posible concluir la lección con un resumen cualitativo sobre la resistencia aerodinámica de cuerpos esbeltos y de cuerpos romos.

19.2. Ecuaciones y condiciones de contorno

Las ecuaciones en el interior de la capa límite se simplifican, principalmente, por el hecho de que el espesor de la misma (cuyo orden de magnitud característico se designará por δ), es mucho menor que cualquier otra escala de longitud del problema, como, por ejemplo, la longitud característica que define el movimiento a lo largo de la superficie, L, o el radio de curvatura característico de la superficie, R. Suponiendo que el movimiento es bidimensional, esta última condición ($\delta \ll R$) nos permite utilizar coordenadas cartesianas (x, y), donde x es la coordenada (no necesariamente rectilínea) a lo largo de la superficie e y es la coordenada normal a la misma (ver figura 19.1).

El orden de magnitud del espesor δ de la capa límite se puede obtener sin más que imponer la condición física que la define: en el interior de la capa límite las fuerzas viscosas son del mismo orden que las fuerzas de inercia

$$|\rho\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}| \sim \frac{\rho U_o^2}{L} \sim |\mu\nabla^2\vec{v}| \sim \frac{\mu U_o}{\delta^2}\,, \tag{19.1}$$

$$\frac{\delta}{L} \sim \left(\frac{\nu}{U_o L}\right)^{1/2} \equiv \frac{1}{Re^{1/2}}\,, \tag{19.2}$$

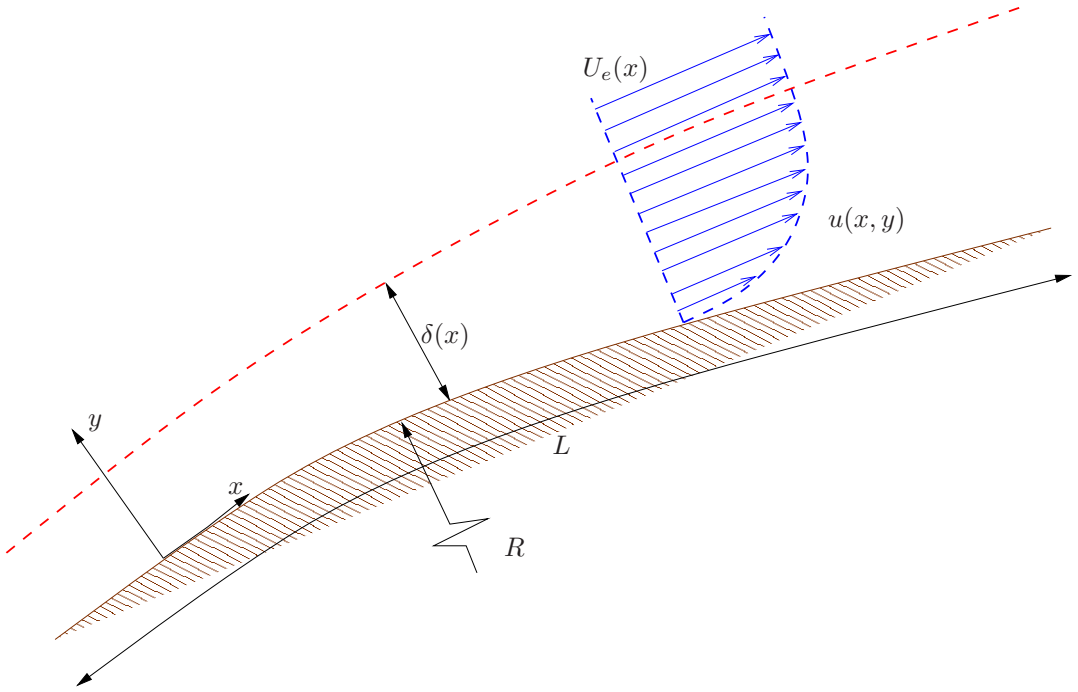


Figura 19.1: Capa límite bidimensional sobre una superficie.

donde U_o es la velocidad característica en la dirección x. Así, $\delta/L \to 0$ cuando $Re \to \infty$, como era de esperar. De esta forma, a pesar de que ν es muy pequeño, la rápida variación de la velocidad del fluido en una distancia δ tan pequeña (proporcional a $\nu^{1/2}$) es suficiente para que el término viscoso no sea despreciable, aunque sí lo sea en el exterior de la capa límite.

Considerando, como es el objetivo de esta lección, sólo el problema de la capa límite viscosa o de velocidad, es decir, considerando sólo las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento, que se suponen desacopladas de la ecuación de la energía (flujo incompresible con propiedades constantes), las ecuaciones de partida son:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{19.3}$$

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{19.4}$$

$$\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right), \tag{19.5}$$

donde $\vec{v} = u\vec{e}_x + v\vec{e}_y$. Si, como se ha dicho, δ y L son las longitudes características en las direcciones y y x, respectivamente, y V_o y U_o las velocidades características en esas mismas direcciones, de la ecuación de continuidad se tiene

$$V_o \sim \frac{\delta}{L} U_o \ll U_o, \tag{19.6}$$

mientras que de las de cantidad de movimiento se deduce que

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \sim \left(\frac{\delta}{L}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \ll \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \tag{19.7}$$

$$\Delta_T p \sim \frac{\rho V_0^2}{\rho U_0^2} \Delta_L p \sim \left(\frac{\delta}{L}\right)^2 \Delta_L p \ll \Delta_L p, \tag{19.8}$$

donde la primera condición indica que las derivadas en x de los términos viscosos son despreciables frente a las derivadas respecto a y, mientras que la segunda indica que la variación transversal de la presión en la capa límite ($\Delta_T p$) es también despreciable frente a la variación longitudinal ($\Delta_L p$) de la misma. Ambas condiciones se traducen, por tanto, en que la ecuación de cantidad de movimiento en la dirección y es prácticamente irrelevante y puede sustituirse por $\partial p/\partial y = 0$; es decir, p es sólo función de x y viene dada por, o es conocida a través de, el movimiento (ideal) externo a la capa límite, puesto que no varía en dirección transversal. Suponiendo que $u = U_e(x)$ *lejos* de la superficie sólida (en la escala δ de la capa límite), la ecuación de Bernoulli (puesto que lejos de la capa límite el fluido se puede considerar como ideal) proporciona

$$\frac{\partial p}{\partial x} \simeq \frac{dp}{dx} = -\rho U_e \frac{dU_e}{dx}. \tag{19.9}$$

Con todas estas simplificaciones, las ecuaciones que gobiernan el movimiento en el interior de una capa límite bidimensional, incompresible y estacionaria son:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{19.10}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = U_e \frac{dU_e}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{19.11}$$

que son las ecuaciones que escribió Prandtl en su artículo antes mencionado (por supuesto, sin deducirlas allí, pues el reducido espacio del mismo no daba para tanto). Como condiciones de contorno hay que imponer la condición de no deslizamiento en la pared,

$$u(x, 0) = v(x, 0) = 0, \tag{19.12}$$

la condición de acople con la solución ideal exterior,

$$u(x, y) \to U_e(x), \quad \text{para} \quad y/\delta \to \infty, \tag{19.13}$$

y una condición *inicial* para u,

$$u(x_o, y) = u_o(y). \tag{19.14}$$

Debe observarse que el acoplamiento con la solución exterior [condición (19.13)] no es para $y \to \infty$, sino $y/(LRe^{-1/2}) \to \infty$; es decir, para y muy grande en relación a la escala de la capa límite, pero pequeño en relación a la escala exterior L (acoplamiento asintótico en una escala intermedia entre δ y L).

El proceso de resolución de un problema en la aproximación de capa límite sería el siguiente (para el caso presente de un flujo estacionario, bidimensional e incompresible alrededor de un cuerpo):

1. dado el contorno del cuerpo y las condiciones aguas arriba ($p_\infty, \vec{v}_\infty,\ T_\infty$), se resuelven las ecuaciones de Euler que proporcionan los campos de velocidad y de presión ideales o solución *externa* (y de temperatura, por supuesto, pero nos olvidamos de ella por centrarnos sólo en el problema mecánico de velocidad-presión): $p(x)$ y la velocidad $U_e(x)$ a lo largo de la superficie del cuerpo, donde U_e no cumple la condición de no deslizamiento, en general; y

2. con $U_e(x)$ conocido, las ecuaciones y condiciones de contorno de la capa límite (19.10)–(19.14) proporcionarían el campo de velocidad $\vec{v}$ en las proximidades de la superficie, con lo que quedaría resuelto el problema completo. Recuérdese que el campo de presión en la capa límite coincide con el exterior ideal $p(x)$ y, por tanto, ya conocido.

Esta solución obtenida permite calcular, por ejemplo, la fuerza de fricción que el fluido ejerce sobre el cuerpo, que, por unidad de área, sería $\tau_f = \mu \partial u/\partial y|_{y=0}$. Por otro lado, la fuerza de presión viene directamente dada por la solución ideal $p(x)$, puesto que la presión permanece prácticamente constante *a través* de la capa límite (esto último no sería cierto si la capa límite se separase, ver sección 19.4). Este proceso de solución aproximado es mucho más fácil que el de resolver las ecuaciones completas de Navier-Stokes, pues tanto las ecuaciones para flujos ideales de Euler, como las de capa límite de Prandtl, son bastante más simples y se pueden resolver analítica o numéricamente con mucho menos esfuerzo; los errores cometidos son del orden de $Re^{-1} \ll 1$ (en el supuesto de que no se separe la capa límite). En general, para una forma arbitraria de la superficie [es decir, para una forma arbitraria de $U_e(x)$], las ecuaciones de la capa límite se tienen que resolver numéricamente. Sin embargo, existen varios casos sencillos, que tienen también bastante importancia práctica, en los que se puede reducir el sistema de ecuaciones en derivadas parciales (19.10)-(19.11) a una única ecuación diferencial ordinaria, por lo que la velocidad en la capa límite se obtiene de forma *analítica.* A uno de esos casos, el más simple posible, se dedicará la sección siguiente, cuyos resultados tienen, como se verá, una trascendencia práctica más allá del mero caso considerado, pues proporcionan una buena estimación de la resistencia de fricción de cuerpos fuselados a altos números de Reynolds. También existen métodos aproximados (integrales) de solución de las ecuaciones de capa límite para una función $U_e(x)$ arbitraria que son muy precisos y fáciles de implementar, y por ello muy utilizados en la práctica ingenieril, pero que no serán tratados aquí (ver referencias).

19.3. Capa límite sobre una placa plana. Solución de Blasius

Considérese el problema de una corriente sobre una placa plana semiinfinita con ángulo de incidencia nulo, de forma que la velocidad del movimiento ideal externo no se ve afectado por ella: $U_e = \text{constante} \equiv U$ (ver Fig. 19.2). De esta forma, el gradiente de presión es nulo y las ecuaciones y condiciones de contorno para la capa límite (19.10)-(19.14) se reducen a

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0\,, \tag{19.15}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,, \tag{19.16}$$

$$u = v = 0,\ y = 0;\ u \to U,\ y/\delta \to \infty;\ u = U,\ x = 0. \tag{19.17}$$

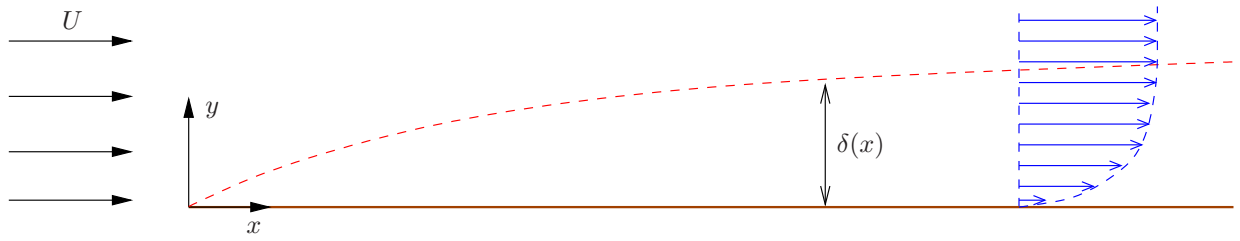


Figura 19.2: Capa límite sobre una placa plana con ángulo de incidencia nulo

Este problema tiene solución de semejanza para la velocidad adimensional u/U respecto a una cierta variable de semejanza η que ahora se definirá. Esto quiere decir que u/U no es una función de x y de y por separado, sino de una determinada combinación de ambas variables independientes. Físicamente, la semejanza de la solución está basada en el hecho de que no hay ninguna longitud característica en el problema, por lo que u/U debe ser una función de $y/\delta(x)$, donde, de acuerdo con la discusión de la sección anterior, $\delta(x)/x \sim \sqrt{\nu/Ux}$, es decir, $\delta(x) \sim \sqrt{\nu x/U}$. De esta manera, la variable de semejanza se define como $\eta = \dfrac{y}{\sqrt{\nu x/U}}$. Suponiendo que u/U es una función exclusivamente de η y utilizando la función de corriente se llega a una única ecuación diferencial ordinaria de tercer orden que Blasius, un discípulo de Prandtl, derivó y resolvió en 1908. Aquí no se darán los detalles matemáticos del problema,[1] solo se resumirán los principales resultados desde un punto de vista práctico:

1. El espesor de la capa límite, definido como la distancia a la pared en la que se alcanza el 99 % del valor de U, crece a lo largo de la placa como

$$\delta(x) \simeq 4{,}95\sqrt{\frac{\nu x}{U}}; \tag{19.18}$$

2. El gradiente de velocidad sobre la placa plana varía a lo largo de ella como

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} \simeq 0{,}332U\sqrt{\frac{U}{\nu x}} = \frac{0{,}332U}{x}\sqrt{\frac{Ux}{\nu}}; \tag{19.19}$$

3. El esfuerzo de fricción sobre la placa plana varía a lo largo de ella como

$$\tau_f = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial x}\right)_{y=0} \simeq \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = 0{,}332\sqrt{\frac{\rho\mu U^3}{x}}. \tag{19.20}$$

Este último resultado se puede usar para calcular de forma aproximada la resistencia que ofrece un fluido de densidad ρ y viscosidad μ al movimiento con velocidad U de una placa plana de longitud L con ángulo de ataque nulo, siempre que L sea muy grande en relación a $\delta(L) \sim \sqrt{\nu L/U}$ (o, lo que es lo mismo, $Re^{1/2} \gg 1$, donde Re está basado en L). Por unidad de longitud transversal al movimiento, y teniendo en cuenta las dos caras de la placa, se tiene la fuerza de resistencia por fricción viscosa:

$$F_f = 2\int_0^L \tau_f dx \simeq 1{,}328\sqrt{\rho\mu L U^3}. \tag{19.21}$$

[1] El alumno interesado en más detalles sobre este desarrollo puede consultar, por ejemplo, Fernández Feria, 2005.

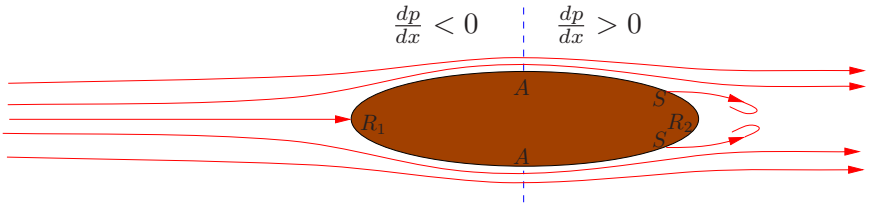


Figura 19.3: Flujo alrededor de un cuerpo sólido.

Se suele definir el coeficiente de fricción

$$C_f \equiv \frac{F}{\rho U^2 L/2} \simeq 2{,}656 Re^{-1/2}, \;\; Re \equiv \frac{LU}{\nu}. \tag{19.22}$$

Estos resultados no solo se pueden utilizar para calcular aproximadamente la resistencia aerodinámica de placas planas finitas que se mueven paralelamente a sí mismas (ver ejemplo al final de la lección), también para estimar la resistencia aerodinámica a altos números de Reynolds de cuerpos fuselados (esbeltos en la dirección del movimiento relativo al fluido), en los que la capa límite no se separa (ver sección 19.4). Es interesante notar que la fuerza de resistencia es proporcional a $U^{3/2}$, ley potencial intermedia entre la lineal para flujos muy viscosos (ley de Stokes válida para $Re \ll 1$, ver lección 14) y la cuadrática para cuerpos romos a altos números de Reynolds en los que se separa la capa límite (como se verá más adelante).

19.4. Separación de la capa límite

En la capa límite sobre la superficie de un cuerpo con forma arbitraria la presión no es constante, como ocurre en la placa plana, sino que, al existir una velocidad externa a la capa límite que depende de x, $U_e(x)$, existen gradientes de presión a lo largo de la capa límite. La resolución de las ecuaciones (19.10)–(19.11) con un término $dp/dx = -\rho U_e \, dU_e/dx$ arbitrario se suele hacer por métodos integrales aproximados o por integración numérica directa de las ecuaciones, que no se van a tratar aquí. Lo que sí se verá a continuación es la explicación cualitativa del fenómeno del desprendimiento o separación de la capa límite y su relación con los gradientes *adversos* de presión.

Considérese, por ejemplo, el flujo alrededor de un cuerpo a $Re \gg 1$ (figura 19.3). Si no existiese separación de la corriente, habría dos puntos de remanso en el flujo, uno en el borde de ataque (R_1 en figura 19.3) y otro en el lado opuesto (R_2). En estos puntos la velocidad es cero y la presión, de acuerdo con el teorema de Bernoulli, $p + \rho v^2/2 =$ constante, sería máxima. En los puntos de anchura máxima del cuerpo en relación a la corriente incidente (puntos marcados con A en la figura), la velocidad ideal es máxima y la presión es mínima. Por tanto, la presión $p(x)$ en la capa límite decrece desde R_1 hasta A y vuelve a crecer desde A hasta R_2.[2] Sin embargo, en la zona donde la presión crece, la capa límite no siempre permanece adherida al cuerpo y se puede producir el fenómeno de separación de la capa límite en un cierto punto marcado con S en la figura 19.3; en otras palabras, cuando existe

[2]Esto daría lugar a una resistencia de presión igual a cero, lo que constituye la llamada paradoja de D'Alambert de los flujos ideales alrededor de cuerpos. El concepto de capa límite de Prandtl y su separación, que se explica a continuación, resuelven esta paradoja.

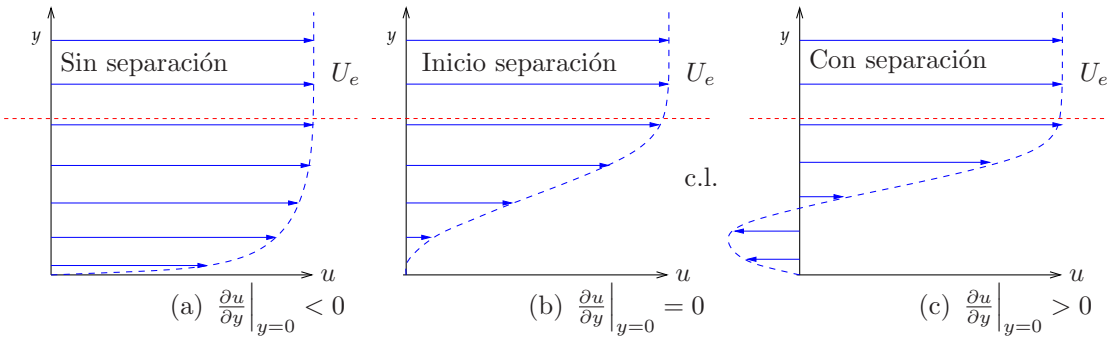


Figura 19.4: Perfiles de velocidad antes (a), en el momento (b), y después (c) de la separación de la capa límite.

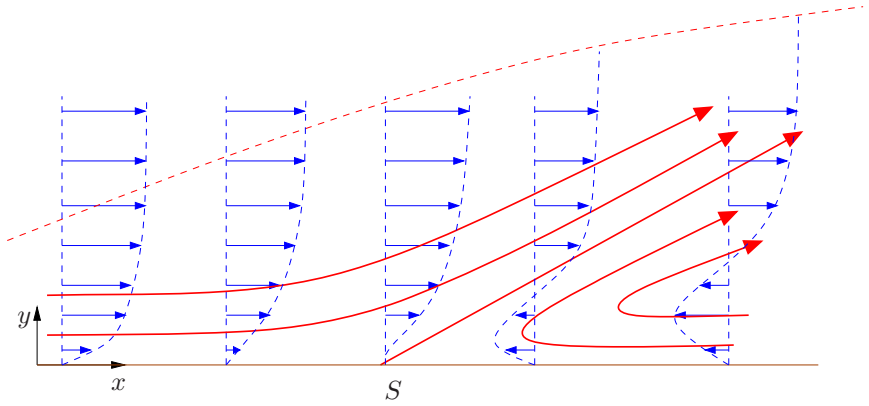


Figura 19.5: Líneas de corriente y vectores velocidad en el entorno del punto de separación de la capa límite.

un gradiente *adverso* de presión, puede ocurrir que la suma de las fuerzas de fricción en la pared y de presión adversa contrarresten la cantidad de movimiento del fluido, llegando a provocar una corriente invertida cerca de la pared, separando la capa límite de la misma. En la figura 19.4 se puede ver el perfil de velocidad en tres posiciones diferentes a lo largo de una superficie sólida, mostrándose en la (c) el típico perfil de velocidad una vez que la capa límite se ha desprendido (ver figura 19.5, donde se amplía la región en torno al punto de separación S).

Para analizar este fenómeno se escribe la ecuación de cantidad de movimiento de la capa límite (19.11) justo en la pared ($y = 0$), donde $u = v = 0$:

$$-\frac{dp}{dx} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{y=0} = 0. \tag{19.23}$$

Si se produce la separación de la capa límite (inversión del movimiento cerca de la pared), su inicio o punto de separación viene definido por $(\partial u/\partial y)_{y=0} = 0$ (ver figura 19.4); es decir, el esfuerzo de fricción debe ser nulo en ese punto. Cuando el gradiente de presión es favorable ($dp/dx < 0$), de la ecuación anterior se tiene que $(\partial^2 u/\partial y^2)_{y=0} < 0$, implicando que $\partial^2 u/\partial y^2 < 0$ en toda la capa límite, y no se puede producir un punto de separación (ver figura 19.6). Sin embargo, si el gradiente de presión es adverso ($dp/dx > 0$), como $\partial^2 u/\partial y^2$ debe ser negativo lejos de la pared, existe un punto de inflexión ($\partial^2 u/\partial y^2 = 0$) en el perfil de velocidad en la capa límite (figura 19.6); este punto de inflexión no implica que se produzca el punto

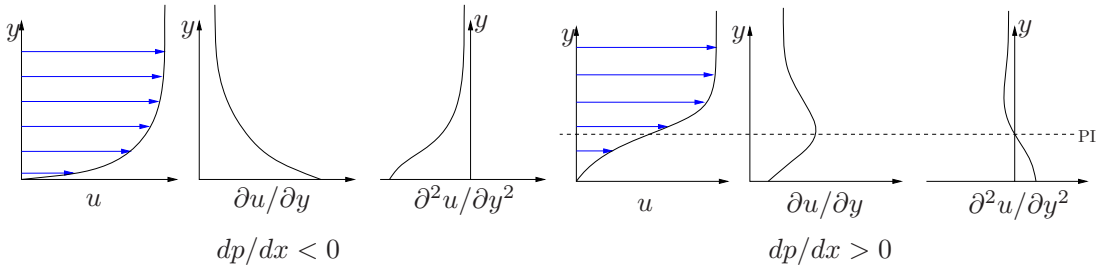


Figura 19.6: Perfil de velocidad y de sus derivadas primera y segunda en la capa límite con $dp/dx < 0$ y $dp/dx > 0$.

de separación de la capa límite, pero sí es una condición necesaria para ello. La existencia de un gradiente adverso de presión es, por tanto, condición necesaria, pero no suficiente, para la separación de la capa límite. Generalmente, si $dp/dx > 0$ la separación ocurre. El que lo haga mucho antes del punto R_2 o muy cerca de él depende de cómo de intenso sea el gradiente adverso de presión, es decir, de la *forma* del cuerpo. Por tanto, la fuerza de resistencia de un cuerpo depende mucho de su forma (lo cual es bastante intuitivo; ver sección siguiente). Para tener una idea global de cómo son las líneas de corriente y los perfiles de velocidad en el entorno del punto de separación, en la figura 19.5 se muestran ambas propiedades.

La separación de la capa límite no sólo se produce en flujos *externos* alrededor de cuerpos, sino que también se puede producir en flujos *internos* en conductos, siempre que exista un gradiente adverso de presión, el cual está asociado a la existencia de una zona *divergente* del conducto.

19.5. Resistencias de fricción y de presión

Como se estableció en la sección 14.1, la fuerza de resistencia que un determinado fluido ejerce sobre un cuerpo que se mueve en su seno se suele descomponer en dos, una correspondiente a las fuerzas viscosas y otra a las fuerzas de presión sobre la superficie del cuerpo:[3]

$$\vec{F}_r = \int_S \overline{\overline{\tau}}' \cdot \vec{n} ds - \int_S p_d \vec{n} ds \equiv \vec{F}_{rf} + \vec{F}_{rp}. \tag{19.24}$$

Ya se vió (sección 14.2) que para $Re \ll 1$ estas fuerzas son proporcionales a la velocidad relativa del cuerpo. Para el caso de una esfera la fuerza total viene dada por la ley de Stokes [ecuación (14.45)], donde 2/3 de la resistencia es debida a la viscosidad y el tercio restante es resistencia de presión.

En los flujos ideales ($Re \to \infty$), no existe resistencia de fricción y la resistencia de presión se puede demostrar que es nula, por lo que la fuerza de resistencia de un cuerpo que se mueve ideal y estacionariamente en un fluido es cero. Evidentemente, esto no es cierto para flujos reales, por muy grande que sea el número de Reynolds. Por un lado siempre existe una resistencia de fricción asociada a la condición de no deslizamiento entre el fluido y la pared sólida. Esta resistencia se calcula resolviendo la capa límite viscosa adyacente a la superficie del cuerpo, de la que ya hemos visto el caso de una placa plana con ángulo de incidencia nulo, cuya resistencia viscosa [ecuación (19.21)] se puede utilizar aproximadamente para cuerpos

[3] Quitando la presión hidrostática que da lugar a la fuerza de flotabilidad de Arquímedes, que no es una fuerza de resistencia.

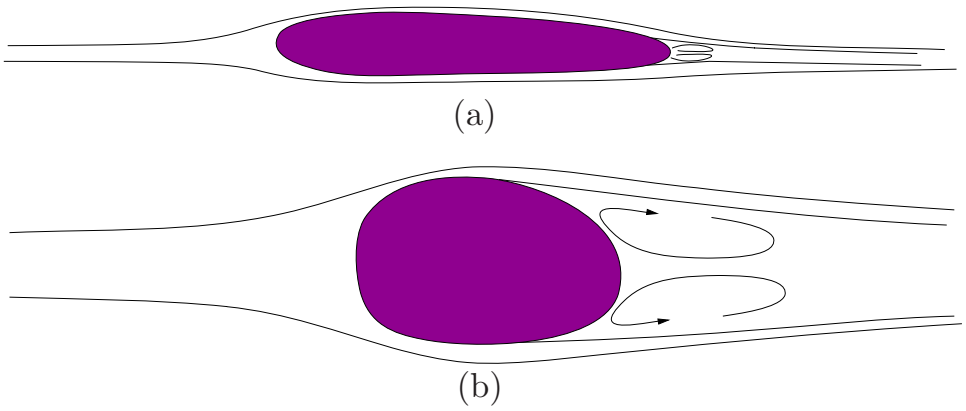


Figura 19.7: Cuerpo (a) fuselado y (b) romo

fuselados, donde los gradientes de presión son pequeños. Por otra parte, aunque la presión en la capa límite coincide prácticamente (cuando $Re \gg 1$) con la presión exterior dada por la teoría ideal, la resistencia de presión no es nula, como predice dicha teoría, puesto que la capa límite se desprende en el movimiento alrededor de un cuerpo cerrado. Por consiguiente, en la parte posterior del cuerpo la corriente se separa y los efectos viscosos dejan de estar confinados en una capa delgada, para afectar a una fracción importante del fluido, formándose lo que se denomina una *estela*. Cuando el cuerpo es **fuselado** [ver, por ejemplo, la figura 19.7(a)], los gradientes de presión son muy suaves y la corriente se separa casi al final del cuerpo, siendo así muy pequeña la resistencia de presión en relación a la de fricción. En estos casos la corriente exterior predicha por la teoría ideal se aproxima bastante a la real, y la única *corrección* necesaria a esa teoría es la resistencia de fricción calculada por la teoría de capa límite. Por el contrario, cuando el cuerpo es **romo**, los gradientes de presión son tan acusados que la capa límite se separa en cuanto éstos comienzan a ser adversos [puntos de máxima velocidad A de la figura 19.7(b)] o incluso antes, como ocurre en el caso de un cilindro circular. Detrás del punto de separación el flujo no es irrotacional, sino que la viscosidad afecta a todo el fluido, y se forma una estela que suele ser turbulenta. En ella la presión es prácticamente constante y aproximadamente igual a la presión del punto de separación, que, por otra parte, coincide prácticamente con la presión mínima que se alcanza en los puntos A. Por consiguiente, la diferencia entre las presiones en las partes frontal y trasera del cuerpo es bastante grande, dando lugar a una fuerza de presión que suele ser mucho mayor que la resistencia de fricción. A la **resistencia** de presión también se le suele llamar **de forma** puesto que, como se acaba de ver, depende casi exclusivamente de la forma del cuerpo. En cuerpos romos esta resistencia de presión se puede estimar teniendo en cuenta que, de acuerdo con la ecuación de Bernoulli, la diferencia de presión entre el punto de remanso frontal y el de separación, que suele estar en torno al punto de presión mínima, es del orden de ρU^2, donde U es la velocidad relativa del cuerpo y ρ la densidad del fluido, por lo que la fuerza de resistencia de presión es del orden de $\rho U^2 A$, donde A es el área frontal del cuerpo.

Resumiendo, en un cuerpo fuselado la resistencia suele ser pequeña y es una resistencia de fricción casi exclusivamente. En un cuerpo romo la resistencia suele ser grande debido a que la resistencia de presión es mucho mayor que la de fricción. En la tabla de la figura 19.8 se resumen las diferentes situaciones, incluyendo el límite viscoso ($Re \ll 1$) considerado en

Re <<1	Re>>1 Cuerpo fuselado	Re>>1 Cuerpo romo
$F_r \propto \mu L U$	$F_r \sim F_{rf} \propto b\sqrt{\rho\mu L}\, U^{3/2}$	$F_r \sim F_{rp} \propto \rho U^2 A$
$C_D \propto Re^{-1}$	$C_D \sim C_f \propto Re^{-1/2}$	$C_D \sim C_p \simeq$ constante

Figura 19.8: Fuerza de resistencia (módulo, F_r) y coeficiente de resistencia (C_D) para diferentes regímenes de flujo y formas del cuerpo. $Re = \rho U L/\mu$.

la lección 14. El coeficiente de resistencia se define como el módulo de la fuerza de resistencia F_r adimensionalizado con la presión dinámica multiplicada por un área característica:

$$C_D = \frac{F_r}{\frac{1}{2}\rho U^2 A}\,. \tag{19.25}$$

En un cuerpo romo $A \propto L^2$, mientras que en el caso del cuerpo fuselado $A \propto bL$, donde b es una anchura característica del cuerpo perpendicular a la corriente.

Para terminar esta sección es conveniente indicar que la fuerza de resistencia se ve sustancialmente modificada cuando la capa límite pasa a ser turbulenta por encima de un número de Reynolds crítico. Esta transición aumenta la resistencia de fricción, pero disminuye sustancialmente la fuerza de presión en cuerpos romos al retrasar el fenómeno de separación de la capa límite. Pero esto no se podrá describir con claridad hasta que no se traten los flujos turbulentos en las lecciones siguientes.

19.6. Ejemplo de aplicación de la solución de Blasius.

Un pequeño insecto se encuentra depositado sobre el exterior de una ventanilla de un coche, como se muestra en la figura 19.9. Suponiendo que el flujo de aire (de densidad $\rho = 1{,}2$ kg/m^3 y viscosidad cinemática $\nu = 1{,}5\,10^{-5}$ m^2/s) que se mueve sobre la ventanilla se puede aproximar por el que incide sobre una placa plana y que se inicia en su borde delantero, determinar:

- velocidad que debe alcanzar el coche para que el insecto se despegue de la ventanilla si su adherencia al cristal que soporta un esfuerzo máximo de 1 N/m^2; y
- con el insecto eliminado, la fuerza de resistencia sobre la ventanilla si el coche viaja a 120 km/h.

Solución.

Suponiendo, como se dice en el enunciado, que el flujo sobre la ventanilla se puede equiparar al que ocurre sobre una placa plana cuando incide una velocidad uniforme U sobre ella, se puede considerar que a lo largo de la ventanilla se origina el perfil de velocidades de Blasius, del que podemos saber, de acuerdo con (19.20), el esfuerzo que existe en cualquier posición x de la superficie, medida x, en nuestro caso, desde el inicio de la ventanilla. Como el insecto

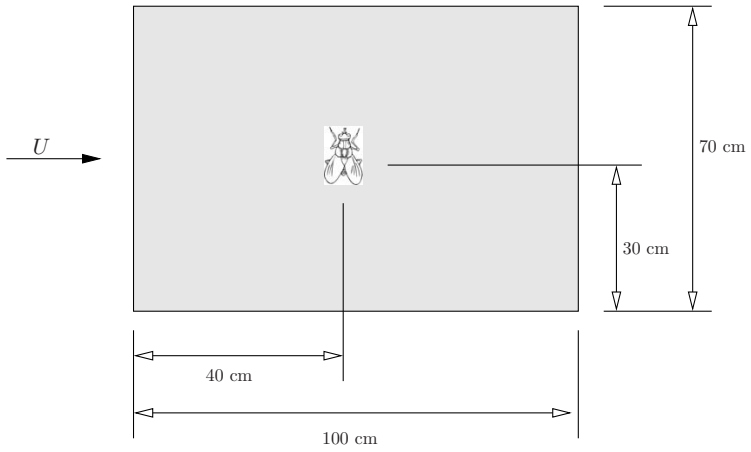


Figura 19.9: Insecto sobre una ventanilla.

está situado a $x = 40$ cm del borde de la ventanilla y el esfuerzo que debería existir en ese punto debería ser mayor de 1 N/m^2 para conseguir despegarlo, de (19.20) se puede obtener la velocidad necesaria para que esto ocurra:

$$\tau_f = 0{,}332\sqrt{\frac{\rho\mu U^3}{x}} = 0{,}332\sqrt{\frac{1{,}2\ \text{kg/m}^3 \times 1{,}8\,10^{-5}\ \text{kg/(m s)} \times U^3}{0{,}4\ \text{m}}} \geq 1\ \text{N/m}^2, \qquad (19.26)$$

donde se ha utilizado que $\mu = \nu\rho$ y, de donde se obtiene que $U \gtrsim 75$ m/s $= 270$ km/h.

Por otro lado, para calcular la fuerza de resistencia sobre la ventanilla cuando $U = 120$ km/h, se usará (19.21) pero teniendo en cuenta que sólo la cara exterior de la misma es la que está sometida a la corriente de aire con velocidad U. Esto supone que la fuerza de resistencia sobre la superficie de la ventanilla de tamaño $b \times L = 0{,}7 \times 1{,}0$ m^2, se obtiene, usando para ello (19.20), como

$$F = b\int_0^L \tau_f dx \simeq 0{,}664 b\sqrt{\rho\mu L U^3} \approx 0{,}8\ \text{N}, \qquad (19.27)$$

o, de modo adimensional a través del coeficiente de fricción, queda como

$$C_f \equiv \frac{F}{\frac{\rho U^2}{2} bL} \simeq 1{,}328 Re^{-1/2} \approx 9{,}0\,10^{-4}, \qquad (19.28)$$

donde se ha usado $Re \equiv \frac{LU}{\nu} = 2{,}22 \times 10^6$.

Referencias.

- D.J. ACHESON, 1990. Capítulo 8.
- R. FERNÁNDEZ FERIA, 2005. Capítulo 27.
- S. GOLDSTEIN, 1969.
- R.A. GRANGER, 1995. Capítulo 14.
- L. ROSENHEAD, 1988. Capítulos I y V.

- H. SCHLICHTING y K. GERSTEN, 2000. Capítulos II, VII y IX.
- F.M. WHITE, 1983. Capítulo 7.

Lectura sugerida:

Ludwig Prandtl's Boundary Layer. John D. Anderson, Jr. *Physics Today,* vol. 58(12), p. 42 (2005).

TEMA VIII:
Introducción a la Turbulencia y flujo turbulento en conductos

CAPÍTULO 20

Introducción a la turbulencia

20.1. Introducción

La mayoría de los flujos que se presentan en la Naturaleza y en las aplicaciones ingenieriles y tecnológicas son turbulentos. Desde las corrientes de agua en ríos y canales hasta casi todos los flujos que se producen en la industria química, donde la eficacia de la mezcla fluida es un requisito importante, pasando por innumerables tipos de flujos. El flujo laminar es la excepción, no la regla; solo se produce para altas viscosidades, dimensiones pequeñas o pequeñas velocidades ($Re \ll 1$). Así, en temas anteriores hemos estudiado soluciones exactas de las ecuaciones de Navier-Stokes bajo la simplificación de flujo unidireccional o movimiento dominado por la viscosidad, $ReD/L \ll 1$. Del mismo modo, hemos visto como cuando $Re \gg 1$, en el caso de flujo alrededor de cuerpos, o $ReD/L \gg 1$ en el caso de flujo en el interior de conductos, los efectos viscosos son despreciables en la mayor parte del campo fluido (excepto en la capa límite) dando lugar a las ecuaciones de Euler. En este tema veremos como, en realidad, cuando el número de Reynolds de un flujo es suficientemente alto, éste es inestable frente a pequeñas perturbaciones y, por tanto, no se encuentran las soluciones anteriormente estudiadas. Por el contrario, estas perturbaciones se desarrollan conforme el flujo evoluciona dando lugar al fenómeno conocido como **turbulencia**, caracterizada por rápidas variaciones tanto espaciales como temporales de las magnitudes fluidas.

Un primer contacto con la turbulencia ya se tuvo en este curso con la práctica del experimento de Reynolds, donde se caracterizó la transición a la turbulencia en un conducto, transición originada por la inestabilidad del flujo *laminar* de Hagen-Poiseuille por encima de un cierto valor crítico del número de Reynolds. Imaginemos ahora que repetimos el mismo experimento de Reynolds pero midiendo la variación temporal de la velocidad longitudinal en un punto arbitrario (punto A de la figura 20.1) en el interior de una tubería de diámetro D. Esta medición de la velocidad instantánea se podría hacer con diversas técnicas como, por ejemplo, anamometría térmica o anemometría láser. Si el caudal, Q, que circula por la tubería fuese tal que $Re = 4Q/(\pi\nu) < Re_c = 2300$ (recuérdese que el flujo en el interior de un conducto se puede considerar laminar si $Re < 2300$, mientras que diremos que dicho flujo es turbulento si $Re \gtrsim 4000$) la velocidad del punto A, $u_A(t)$, sería constante tal y como se muestra en el caso laminar de la figura 20.1. Si ahora incrementamos Q de forma que $Re \sim Re_c$ aparecen de forma espontánea pequeñas perturbaciones de la velocidad que posteriormente se atenúan. En este caso decimos que el flujo está en transición. Sin embargo, si aumentamos todavía más Q, podremos observar como $u_A(t)$ varía con el tiempo

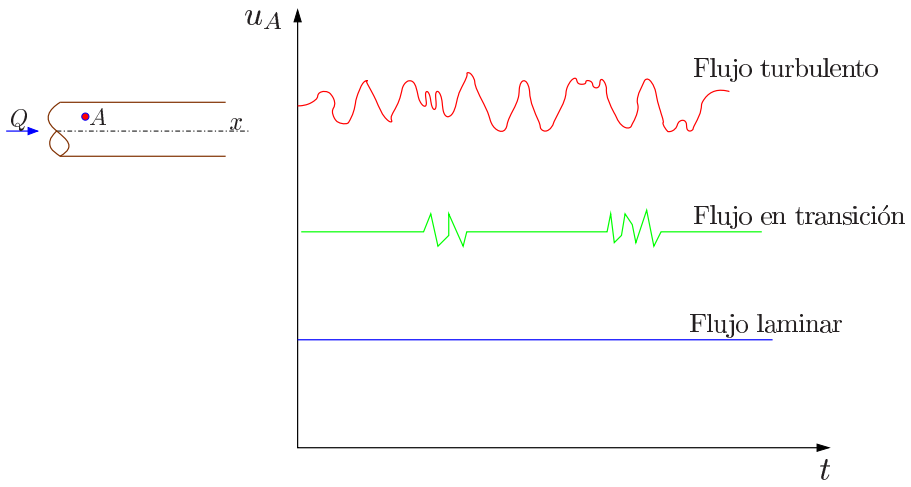


Figura 20.1: Velocidad instantánea en un punto de un conducto para tres caudales (número de Reynolds) diferentes.

caóticamente, oscilando en torno a valor medio: el flujo se ha hecho turbulento. Estas oscilaciones introducen un mecanismo de transporte, adicional al transporte molecular ya estudiado previamente, conocido como transporte turbulento. El transporte turbulento de masa, cantidad de movimiento y energía es un mecanismo mucho más eficaz que el molecular que tiende a homogeneizar la densidad, velocidad y temperatura en un campo fluido.

En esta lección, complementada con el video didáctico que se comentará en la sesión práctica, se verán las características generales de los flujos turbulentos, mientras que en la lección siguiente se verá la única aplicación práctica de los flujos turbulentos de este curso (complementada también con una práctica de laboratorio): el flujo turbulento en conductos. Aunque, como se ha dicho, la mayoría de los flujos de interés ingenieril son turbulentos, es imposible abordar con rigor otros flujos turbulentos de interés práctico en este curso introductorio de Mecánica de Fluidos para ingenieros. En cualquier caso, el flujo turbulento en conductos es, con diferencia, el más relevante en el ámbito de la ingeniería y en su estudio se introducen conceptos y soluciones que son válidas también para abordar cualquier otro flujo turbulento en las proximidades de una pared sólida. Un resultado importante al que se llegará, que ya se vio en la práctica del experimento de Reynolds y que es evidente a la vista de las fluctuaciones de la velocidad en los flujos turbulentos, es que la fricción de un flujo turbulento sobre una pared sólida es mucho mayor que en un flujo laminar con la misma velocidad media externa, lo cual tiene como consecuencia que, en un conducto, la caída de presión es mayor para un mismo caudal y, por tanto, mayor la potencia de la bomba necesaria para vehicular el fluido en el conducto si el flujo es turbulento.

Con los fundamentos que se ven en estas dos lecciones, el estudiante podrá abordar sin dificultad el estudio de cualquier otro tipo de flujo turbulento de interés ingenieril (ver referencias citadas al final de la lección).

20.2. Propiedades de los flujos turbulentos

Es difícil dar una definición precisa de la turbulencia. Sin embargo, cualquiera que haya observado el humo que emana de un cigarrillo o la estela que se forma detrás de un objeto



(a)



(b)

Figura 20.2: Ejemplos de flujos turbulentos: (a) humo emanando de un cigarro y (b) corriente en un tramo de un río.

interpuesto en la corriente de un río (ver figura 20.2) tiene una idea más o menos clara de lo que es un flujo turbulento. Por ello, la mejor forma de introducir los flujos turbulentos, antes de pasar a una descripción matemática más precisa, es enumerar las propiedades fundamentales que los caracteriza.

Irregularidad y aleatoriedad. Los flujos turbulentos son irregulares, *caóticos*. De aquí la imposibilidad (o, en cualquier caso, la ineficacia) de un tratamiento determinista para su descripción; en su lugar se recurre a métodos estadísticos.

Difusividad. Los flujos turbulentos son muy efectivos en difundir cantidad de movimiento, masa y energía. Un flujo con aspecto irregular, pero en el que esa irregularidad no venga

acompañada de una difusión efectiva, no es turbulento. Este aspecto de la difusión es el que hace a los flujos turbulentos más *atractivos* en muchas aplicaciones tecnológicas.

Es el responsable, entre otros ejemplos, de la mezcla efectiva y rápida de las diferentes especies químicas requerida para que las reacciones químicas se produzcan más rápidamente; retrasa o previene la separación de la capa límite, disminuyendo la resistencia aerodinámica; aumenta la resistencia de los flujos en conductos en relación al flujo laminar; incrementa la velocidad de transmisión de calor entre una pared sólida y un fluido en cualquier máquina que utilice un fluido; etc.

Número de Reynolds grande. Como se comentó previamente, los flujos turbulentos ocurren siempre a altos números de Reynolds, ya que, normalmente, la turbulencia ocurre como consecuencia de inestabilidades de los flujos laminares cuando el número de Reynolds supera un cierto valor crítico, que suele ser grande. Desde un punto de vista matemático, lo que ocurre es que por encima de este número de Reynolds existe una interacción entre los términos viscoso e inercial no lineal de la ecuación de cantidad de movimiento, dando lugar a inestabilidades que desembocan en un movimiento caótico, imposible de predecir determinísticamente. La dificultad matemática de predecir los flujos turbulentos está así asociada a la no linealidad de las ecuaciones, y muchos de los últimos avances que se han hecho en el problema de la turbulencia provienen del estudio de los sistemas dinámicos no lineales que, incluso con un reducido número de grados de libertad, producen movimientos caóticos.

Tridimensionalidad y rotacionalidad. La turbulencia se caracteriza por las fluctuaciones, no sólo de la velocidad, sino también de la vorticidad. Es decir, los flujos turbulentos no son nunca irrotacionales, sino que se caracterizan por niveles muy altos de las fluctuaciones de la vorticidad.

Disipación. Los flujos turbulentos son siempre disipativos, propiedad relacionada con la difusividad. Esto implica que las corrientes turbulentas necesitan un suministro continuo de energía para vencer la disipación viscosa. Sin este suministro las fluctuaciones turbulentas decaerían por viscosidad y el movimiento dejaría paulatinamente de ser turbulento. Por la misma razón, un movimiento (irregular) en donde no se produzcan esfuerzos viscosos que disipen las fluctuaciones no sería turbulento. Ésta es, por ejemplo, la distinción fundamental entre algunos tipos de ondas con movimiento muy irregular, donde no hay disipación, y los movimientos turbulentos, que son esencialmente disipativos. El mecanismo por el cual la energía se transfiere desde las fluctuaciones de mayor tamaño, donde no existe disipación ($Re \gg 1$), hasta fluctuaciones con escalas mucho menores donde se produce la disipación, esencial en los flujos turbulentos, es lo que se conoce como *cascada de energía* (ver sección siguiente).

Medio continuo. Las escalas más pequeñas de las fluctuaciones turbulentas son generalmente mucho mayores que las escalas de los movimientos moleculares, por lo que las fluctuaciones de las propiedades del fluido son las de un medio continuo, gobernadas por las ecuaciones de Navier-Stokes. Esto no quiere decir que se puedan encontrar soluciones de estas ecuaciones ya que, como se dijo antes, las soluciones son caóticas (irregulares y aleatorias), haciéndose necesaria una descripción estadística del movimiento; pero las ecuaciones que describen el movimiento y que se toman como base de partida son las ecuaciones de Navier-Stokes. Por otra parte, al ser la turbulencia

una consecuencia casi exclusiva de la estructura de las ecuaciones del movimiento (no linealidad) y no del fluido en sí (de la estructura molecular), la mayoría de las propiedades dinámicas de los movimientos turbulentos son las mismas para todos los fluidos, independientemente de que sean gases o líquidos, siempre que el número de Reynolds sea suficientemente grande. Esto hace que, desde un punto de vista estadístico, el estudio de la turbulencia se pueda hacer en general.

20.3. Escalas de la turbulencia. Cascada de energía. Microescala de Kolmogorov

Se ha dicho que los flujos turbulentos se caracterizan por la disipación viscosa y porque el número de Reynolds es grande. Estas dos características podrían parecer contradictorias, pero no lo son debido a que en la turbulencia existen muchas escalas espaciales y temporales.

Las inestabilidades hidrodinámicas, que constituyen el origen de los flujos turbulentos, dan primeramente lugar a fluctuaciones con un tamaño que, en la mayoría de los casos, es del mismo orden que la longitud característica del flujo laminar original, L. Bajo ciertas condiciones, estas grandes fluctuaciones son a su vez inestables, dando lugar a fluctuaciones y torbellinos cada vez de menor tamaño, de manera que se va produciendo una transferencia de energía desde los torbellinos de escala mayor a torbellinos más pequeños, lo que se suele denominar como cascada de energía. En la escala mayor, el número de Reynolds asociado es elevado (requisito indispensable para que pueda existir turbulencia) y el flujo se puede considerar ideal, no existiendo disipación viscosa en esa escala, por lo que el proceso de transferencia continúa hasta que la escala es tan pequeña que la disipación viscosa actúa, difundiendo y disipando los torbellinos. De acuerdo con este proceso, la turbulencia no se puede mantener a sí misma, dependiendo de su entorno para obtener energía.

Obviamente, la escala de los torbellinos más pequeños donde se disipa la energía es tal que el número de Reynolds asociado a ellos es de orden unidad. Esto da un criterio para estimar el orden de magnitud de la escala espacial y temporal más pequeña de la turbulencia, denominada **microescala de Kolmogorov**. La generación de esta escala pequeña de las fluctuaciones es debida a los términos no lineales de la ecuación del movimiento, impidiendo los términos viscosos que las escalas sean infinitamente pequeñas, ya que disipan su energía en calor. Por tanto, la escala más pequeña se autoajusta automáticamente al valor de la viscosidad ν, que es pequeño (más precisamente, Re^{-1} es pequeño). Como las fluctuaciones con escala de longitud pequeña tienen también una escala temporal pequeña, se puede suponer que estas fluctuaciones son estadísticamente independientes de las fluctuaciones mucho más lentas de la escala grande y del flujo medio. Es decir, la escala más pequeña a la que se disipa la energía turbulenta tiene que ser *universal*, en el sentido de que no depende de las particularidades de los grandes *torbellinos* ni del movimiento medio de cada flujo turbulento, dependiendo así, exclusivamente, de la viscosidad cinemática ν y de la velocidad de transferencia de energía ϵ desde las grandes escalas a la escala pequeña, que es también la velocidad a la que se disipa la energía en la escala pequeña, transformándose en calor. Esta es la llamada *teoría de equilibrio universal de Kolmogorov*, cuyos resultados concuerdan muy bien con las observaciones experimentales (como se verá en el video didáctico).

Como ϵ tiene dimensiones de $[L]^2[t]^{-3}$ y $[\nu] = [L]^2[t]^{-1}$, mediante un simple análisis dimensional se pueden estimar los órdenes de magnitud de las escalas espaciales, temporales

y de velocidad en los que se disipa la energía turbulenta:

$$l = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon}\right)^{1/4} , \ \tau = \left(\frac{\nu}{\epsilon}\right)^{1/2} , \ v = (\nu\epsilon)^{1/4}, \tag{20.1}$$

que constituyen la microescala de Kolmogorov, también llamada *escala interna* de la turbulencia. Obviamente, el número de Reynolds asociado a esta microescala es de orden unidad: $lv/\nu = 1$.

Para tener una idea más precisa de la microescala de Kolmogorov habría que relacionar la velocidad de disipación de energía ϵ con la longitud y la velocidad características de las escalas grandes de la turbulencia (que en muchas ocasiones coinciden con las del flujo medio). Si V es la velocidad característica de las fluctuaciones mayores, la energía cinética por unidad de masa asociada a ellas será de orden de V^2. Suponiendo que esta energía se transfiere a las escalas menores en un tiempo característico del orden de L/V, donde L es el tamaño característico de estas fluctuaciones, se tiene que la energía se transfiere a una velocidad V^3/L, que es también la velocidad de energía disipada en la microescala,

$$\epsilon \sim V^3/L \, . \tag{20.2}$$

Esta estimación implica que una fluctuación o torbellino pierde una fracción importante de su energía cinética, proporcional a V^2, en el tiempo que *da una vuelta*. Esto no quiere decir que en ese tiempo se disipe esa energía, sino que se transfiere a una escala más pequeña, hasta que al final del proceso se disipa en la microescala. Sustituyendo (20.2) en (20.1) se tienen las siguientes relaciones:

$$\frac{l}{L} \sim \left(\frac{VL}{\nu}\right)^{-3/4} = Re^{-3/4} \, , \tag{20.3}$$

$$\frac{\tau}{t_c} \sim \frac{\tau V}{L} \sim \left(\frac{VL}{\nu}\right)^{-1/2} = Re^{-1/2} \, , \tag{20.4}$$

$$\frac{v}{V} \sim \left(\frac{VL}{\nu}\right)^{-1/4} = Re^{-1/4} \, , \tag{20.5}$$

donde $Re = (VL/\nu) \gg 1$ es el número de Reynolds de la escala grande. Estas relaciones nos indican que las escalas de longitud, tiempo y velocidad de los torbellinos más pequeños son mucho menores que las de los grandes torbellinos. A medida que el número de Reynolds aumenta, la separación entre las escalas también aumenta al hacerse más pequeña la microescala de Kolmogorov, por lo que la independencia estadística de esta microescala será más evidente a grandes números de Reynolds.

20.4. Tratamiento matemático de la turbulencia

Como se ha visto, las fluctuaciones más pequeñas de la turbulencia ocurren en una escala (microescala de Kolmogorov) que decrece potencialmente con el inverso del número de Reynolds, pero siempre permanece mucho mayor que la escala del movimiento molecular. Experimentalmente se comprueba que esto es cierto incluso en los casos con números de Reynolds y de Mach muy grandes. Por tanto, excepto en casos muy extremos (flujos

con números de Mach muy altos, donde ni siquiera es válida la hipótesis de equilibrio termodinámico local), los flujos turbulentos pueden ser descritos apropiadamente por las ecuaciones de Navier-Stokes. Estas ecuaciones son deterministas, en el sentido de que dadas la posición y la velocidad de todas las partículas fluidas (en todas las escalas) en un instante t_o, en principio existe solución de las ecuaciones para cada $t > t_o$. Es decir, la turbulencia es un fenómeno *determinista,* a pesar de lo intrincado e irregular de los movimientos turbulentos. Sin embargo, debido a la no linealidad de las ecuaciones, fuente de las inestabilidades, cualquier perturbación infinitesimal de las condiciones iniciales da lugar a una solución sustancialmente diferente. Esto no solo afecta a la computación numérica, en el sentido de que es imposible conocer con precisión absoluta las condiciones iniciales, sino que es algo más profundo, relacionado con el indeterminismo intrínseco y, por tanto, la no predecibilidad, de ciertos sistemas dinámicos no lineales, como el movimiento de un fluido, en algunos rangos paramétricos. No obstante, la simulación numérica directa está dando resultados cada vez más interesantes en flujos con número de Reynolds moderado. Para altos números de Reynolds, la simulación sólo puede tratar las escalas mayores del flujo [recuérdese que la microescala de Kolmogorov decrece a medida que aumenta Re], y estos resultados están proporcionando información muy valiosa sobre la estructura de la turbulencia. Pero la imprecisión asociada a las pequeñas escalas y a las condiciones iniciales, amplificada por la no linealidad de las ecuaciones, da lugar a que después de un cierto periodo de tiempo el flujo turbulento simulado difiera significativamente del flujo real.

De lo anterior se desprende la conveniencia (y también la necesidad) de usar métodos estadísticos para tratar la turbulencia, de los cuales nos ocuparemos exclusivamente en lo que sigue. Obviamente, la simulación numérica no ha sido posible hasta el desarrollo de los potentes ordenadores modernos, y, aún así, de acuerdo con lo dicho anteriormente, hay que utilizar hipótesis estadísticas para modelar las escalas más pequeñas de la turbulencia si se quiere simular flujos con números de Reynolds moderados y altos. Estas hipótesis introducen *ruido de fondo* en la simulación numérica, haciéndolas poco (o nada) precisas para tiempos grandes. Por ello, a pesar de que, como se dijo antes, la simulación numérica está proporcionando resultados muy interesantes, el tratamiento clásico estadístico, complementado con hipótesis semiempíricas o fenomenológicas, ha sido, y sigue siendo, muy útil para resolver problemas ingenieriles, sobre todo para aquellos problemas relacionados con flujos turbulentos en las inmediaciones de paredes sólidas, que serán los únicos abordados aquí.

En el tratamiento estadístico clásico de la turbulencia las magnitudes fluidas se descomponen en dos partes, un valor medio y una fluctuación con media nula. Así, por ejemplo, la velocidad $\vec{v}(\vec{x},t)$ se descompone en un valor medio $\vec{V}(\vec{x})$ y una fluctuación $\vec{v}'(\vec{x},t)$,

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}', \tag{20.6}$$

de forma que

$$\vec{V} = \lim_{t_o \to \infty} \frac{1}{t_o} \int_t^{t+t_o} \vec{v} dt. \tag{20.7}$$

Las magnitudes medias (promediadas en el tiempo) se designarán mediante una barra encima. Para simplificar la notación, no se utilizarán vectores, sino sus componentes. Obviamente el valor medio de las fluctuaciones es nulo,

$$\overline{v_i'} = \lim_{t_o \to \infty} \frac{1}{t_o} \int_t^{t+t_o} (v_i - V_i) dt \equiv 0. \tag{20.8}$$

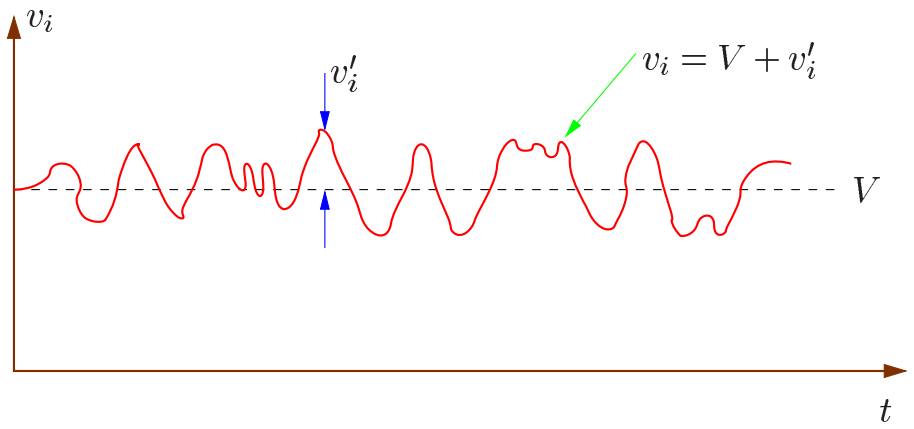


Figura 20.3: Descomposición de una de las componentes de la velocidad como suma de una velocidad media más una fluctuación.

En la figura 20.3 se puede ver un ejemplo de la evolución temporal de una magnitud fluida (velocidad en este caso) con indicación de su valor medio y sus fluctuaciones. Análogamente a la descomposición de la velocidad se hará para las demás magnitudes fluidas. Por ejemplo, la presión y la temperatura (se considerará que el flujo es incompresible, con lo que la densidad es constante) quedarán como

$$T = \theta + T', \; p = P + p', \tag{20.9}$$

$$\overline{T'} = \overline{p'} = 0. \tag{20.10}$$

20.5. Ecuaciones de Reynolds. Esfuerzos aparentes de Reynolds

La descomposición de las magnitudes fluidas en valores medios y fluctuaciones fue hecha por Reynolds (1895) con el objetivo de obtener ecuaciones para las magnitudes medias. De esta forma, en vez de utilizar las ecuaciones de Navier-Stokes para las magnitudes fluidas en cada punto y en cada instante, se utilizan las ecuaciones para los valores medios, las cuales, con ciertas hipótesis semi-empíricas que veremos más adelante, proporcionan una información muy útil sobre el flujo, sobre todo desde un punto de vista ingenieril.

Suponiendo, por simplicidad, que el flujo es incompresible y teniendo sólo en cuenta las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento, tomando el valor medio de la primera, $\nabla \cdot \vec{v} = 0$, y utilizando las definiciones y resultados de la sección anterior, se tiene que el flujo medio es incompresible:

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_i} = 0. \tag{20.11}$$

Restando esta ecuación de $\partial v_i/\partial x_i = 0$, se tiene que las fluctuaciones son también solenoidales:

$$\frac{\partial v_i'}{\partial x_i} = 0. \tag{20.12}$$

Análogamente, tomando valores medios de la ecuación de cantidad de movimiento (9.2) (en ausencia de fuerzas másicas) se tiene

$$\rho V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu \frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \rho \overline{v_i' v_j'}\right), \tag{20.13}$$

donde, aparte de suponer que $\rho =$ constante, se ha tenido en cuenta que el flujo medio es estacionario y que

$$\overline{v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}} = V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \overline{v_j' \frac{\partial v_i'}{\partial x_j}} = V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{v_i' v_j'}), \tag{20.14}$$

siendo la última igualdad consecuencia de (20.12). La ecuación (20.13) para el flujo medio es análoga a la ecuación de cantidad de movimiento para el flujo local, pero con un término adicional proveniente de la convección de la cantidad de movimiento de las fluctuaciones de la velocidad. Este término se ha escrito como la divergencia del tensor $-\rho\overline{v_i' v_j'}$, por lo que esta magnitud hace las veces de un esfuerzo, similar al esfuerzo viscoso $\mu \partial V_i/\partial x_j$, pero que en vez de ser consecuencia del transporte molecular de cantidad de movimiento, es consecuencia del transporte de cantidad de movimiento por las fluctuaciones turbulentas de la velocidad. Por ello se suele definir el tensor de esfuerzos aparentes, o turbulentos, de Reynolds como

$$\tau_{tij} = -\rho \overline{v_i' v_j'}. \tag{20.15}$$

Los elementos diagonales de $\overline{\overline{\tau}}_t$ son los esfuerzos normales (presiones) turbulentos: $-\rho\overline{v_1'^2}, -\rho\overline{v_2'^2}$ y $-\rho\overline{v_3'^2}$, que suelen ser muy pequeños en la mayoría de los flujos. Por el contrario, los elementos fuera de la diagonal, $-\rho\overline{v_i' v_j'}$, $i \neq j$, es decir, los esfuerzos tangenciales turbulentos, suelen ser mucho más importantes que los correspondientes esfuerzos tangenciales viscosos, pues, como se comentó en la sección 20.1, el transporte turbulento es mucho más efectivo que el molecular.

20.6. El problema del cierre

La descomposición del flujo en un flujo medio y sus fluctuaciones ha separado los efectos de las fluctuaciones en las ecuaciones del flujo medio, apareciendo un tensor de esfuerzos turbulento, $\tau_{tij} = -\rho\overline{v_i' v_j'}$, en la ecuación de cantidad de movimiento. Esta magnitud es desconocida, por lo que el problema no está cerrado. Se podrían escribir ecuaciones para esas magnitudes, pero aparecerían nuevas incógnitas del tipo $\overline{v_i' v_j' v_k'}$, y así sucesivamente. Por ello, la forma habitual de cerrar el problema, sobre todo si uno quiere resolver problemas prácticos en los que ocurren flujos turbulentos, es mediante el uso de hipótesis fenomenológicas o semi-empíricas para el tensor de esfuerzos turbulentos. Existen diversas aproximaciones más o menos adecuadas para describir distintos tipos de problemas (ver referencias). A continuación se verá sólo una aproximación relacionada con la denominada longitud de mezcla de Prandtl, que sobre todo tiene utilidad para describir flujos turbulentos casi unidireccionales.

20.6.1. Longitud de mezcla

Como el concepto de longitud de mezcla encuentra sobre todo aplicación en los flujos casi unidireccionales (capa límite, flujo en conductos, etc.) que, por otra parte, son los únicos flujos turbulentos que se considerarán con algún detalle, se supondrá, por tanto, que el movimiento

medio es, en primera aproximación, $\vec{V} \simeq U(y)\vec{e}_x$. Presentar, por tanto, el concepto de longitud de mezcla requiere presentar primero el de viscosidad cinemática turbulenta. Por analogía con el esfuerzo laminar (7.23), la **viscosidad cinemática turbulenta** ν_t, que se define a través del esfuerzo turbulento como

$$\tau_t \equiv -\rho\overline{u'v'} \equiv \rho\nu_t \frac{\partial U}{\partial y}, \tag{20.16}$$

donde u' y v' son las componentes de la velocidad de fluctuación en las direcciones x e y, respectivamente. A diferencia de ν, que depende sólo de las propiedades del fluido, ν_t depende principalmente del flujo y, por tanto, de la posición de la partícula fluida. Pero, análogamente a la viscosidad cinemática molecular, que para un gas es del orden del producto del camino libre medio entre colisiones y la velocidad de agitación molecular, $\nu \sim \lambda c_T$ (c_T es del mismo orden que la velocidad del sonido a), se supone que ν_t es del orden del producto de una **longitud de mezcla**, l_m, o longitud que recorre una partícula fluida fluctuante antes de que pierda su identidad mezclándose con las partículas fluidas de su entorno, y una velocidad característica de fluctuaciones u^*,

$$\nu_t \sim l_m u^*. \tag{20.17}$$

De esta forma se tiene que

$$\tau_t = \rho u^* l_m \frac{\partial U}{\partial y}. \tag{20.18}$$

Prandtl relacionó la velocidad fluctuante u^* con el módulo del gradiente de velocidad, $u^* \sim l_m|\partial U/\partial y|$ (lo cual se obtiene de (20.16) haciendo $|\overline{u'v'}| \sim u^{*2}$), llegando a la expresión:

$$\tau_t = -\rho\overline{u'v'} = \rho l_m^2 \left|\frac{\partial U}{\partial y}\right| \frac{\partial U}{\partial y}. \tag{20.19}$$

La utilidad de esta expresión depende, obviamente, del grado de precisión con que se evalúe la longitud de mezcla (que es en sí un concepto algo impreciso) en cada tipo de flujo. Para movimientos turbulentos cerca de una pared sólida (capa límite turbulenta) $l_m \simeq \kappa y$, donde y es la distancia perpendicular a la pared y κ es una constante que se obtiene experimentalmente. Además, la constante κ es universal, en el sentido de que no dependen ni del fluido ni de la intensidad turbulenta.

Este concepto de longitud de mezcla se utilizará más en la lección siguiente para obtener el perfil de velocidad de un flujo turbulento cerca de una pared sólida, es decir, para resolver la capa límite turbulenta y, consecuentemente, el flujo turbulento en un conducto.

Referencias.

- D.J. ACHESON, 1990. Capítulo 9.
- U. FRISCH, 1995. Capítulo 7.
- R. FERNÁNDEZ FERIA, 2006, Capítulos 29-31.
- L.D. LANDAU y E.M. LIFSHITZ, 1987. Capítulo III.
- M. LESIEUR, 1993. Capítulos I y III.
- A. S. MONIN y A. M. YAGLOM, 1971. Volumen 1, capítulo 1.
- H. TENNEKES y J.L. LUMLEY, 1972. Capítulo 1.

CAPÍTULO 21

Flujo turbulento en conductos

21.1. Introducción

Como se dijo en la lección anterior, la única aplicación práctica de flujos turbulentos que se va a considerar en este curso con cierto detalle es el flujo turbulento en conductos, que es, con diferencia, la de mayor interés ingenieril: por citar algunos ejemplos, el transporte de crudo a través de oleoductos, de gas en gaseoductos, el transporte de agua potable en redes de abastecimiento o el movimiento de gases en conductos de aire acondicionado.

En particular, se calculará el esfuerzo de fricción que la pared de un conducto ejerce sobre un fluido en un movimiento turbulento completamente desarrollado (independiente de la coordenada axial). Este conocimiento es esencial para calcular la potencia necesaria para vehicular dicho fluido por el conducto. Con ese fin, lo primero que se hará será obtener el perfil de velocidad en una sección transversal del conducto, integrando para ello la ecuación de cantidad de movimiento (20.13) escrita en coordenadas cilíndricas. Como se verá más adelante, para llevar a cabo esta integración se considerarán dos regiones en la sección del conducto: una, la más extensa, para la parte central del conducto y otra más delgada para la región cercana a la superficie sólida del conducto, o capa límite turbulenta. Esta última región, la capa límite turbulenta, a su vez se dividirá, para una fácil obtención del perfil *universal* de velocidad de capa límite, en tres regiones: una interna o *viscosa,* junto a la pared; otra intermedia y, por último, la exterior, que acoplará con el perfil de velocidad de la parte central del conducto. Obtenido, por tanto, el perfil transversal de velocidad en el conducto, seguidamente se puede obtener el esfuerzo de fricción o, adimensionalmente, el coeficiente de fricción.

Un aspecto importante a destacar del perfil de velocidad que se obtendrá en la capa límite turbulenta es que las dos primeras regiones, la interior y la intermedia, son universales e independientes del flujo turbulento que se esté estudiando, siendo sólo la región exterior diferente para cada flujo turbulento estudiado. De este modo, las dos primeras regiones del perfil de velocidad en la capa límite turbulenta servirán para caracterizar cualquier flujo turbulento en las proximidades de una superficie sólida.

21.2. Perfil de velocidad y esfuerzo de fricción en un conducto de sección circular

Considérese un conducto de sección circular, de radio R, y longitud infinita, en el que la sección permanece constante a lo largo del mismo. Utilizando coordenadas cilíndricas (r, θ, x), donde x es la coordenada axial a lo largo del conducto, se obtendrá aquí el perfil de velocidad transversal en cada sección suponiendo que el flujo turbulento medio no depende de la coordenada axial (régimen turbulento completamente desarrollado), lo cual permitirá calcular la fricción entre el fluido y la pared sólida del conducto y su relación con el caudal que circula por él.

Suponiendo, por tanto, que el flujo medio en el conducto es puramente axial, $\vec{V} = U\vec{e}_x$, y siendo $\vec{v}' \equiv u'\vec{e}_x + v'\vec{e}_r + w'\vec{e}_\theta$ el vector de velocidad de fluctuación, las ecuaciones de Reynolds de continuidad (20.11) y cantidad de movimiento (20.13) en las direcciones $\vec{e}_x$ y $\vec{e}_r$ se escriben (por supuesto en coordenadas cilíndricas y suponiendo que el flujo es incompresible):

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \tag{21.1}$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\nu r \frac{\partial U}{\partial r} - r\overline{u'v'}\right), \tag{21.2}$$

$$-\frac{\overline{w'^2}}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\overline{v'^2}). \tag{21.3}$$

Suponiendo, además, que existe simetría azimutal, es decir, $U \neq U(\theta)$, la primera ecuación nos dice que la velocidad media es función sólo de r, $U = U(r)$, hecho que se ha utilizado en las otras dos ecuaciones para anular idénticamente los términos convectivos de las magnitudes medias.

La ecuación de cantidad de movimiento en la dirección radial puede integrarse con respecto a r. Para ello, primero se deriva el último término de (21.3),

$$-\frac{\overline{w'^2}}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} - \frac{\overline{v'^2}}{r} - \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial r}. \tag{21.4}$$

que multiplicada por ρ e integrada entre un radio r arbitrario y la pared ($r = R$) queda

$$-\rho \int_r^R \frac{\overline{w'^2} - \overline{v'^2}}{r} dr + P_p - P - \rho\overline{v'^2} = 0\,, \tag{21.5}$$

donde $P_p \equiv P(r = R)$ y se ha tenido en cuenta que $v'(r = R) = 0$.

Derivando (21.5) respecto a x y teniendo en cuenta que en un flujo turbulento completamente desarrollado las fluctuaciones no dependen de la coordenada axial x, se tiene

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P_p}{\partial x}\,. \tag{21.6}$$

Es decir, el gradiente axial de la presión media no depende del radio r donde tomemos la presión, pudiéndose utilizar su valor en la pared para evaluarlo. Sustituyendo (21.6) en (21.2) se tiene

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P_p}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\nu r \frac{\partial U}{\partial r} - r\overline{u'v'}\right) = 0, \tag{21.7}$$

que multiplicada por r se puede integrar una vez:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{r^2}{2}\frac{\partial P_p}{\partial x}+\nu r\frac{\partial U}{\partial r}-r\overline{u'v'}=\text{constante}=0\,, \tag{21.8}$$

siendo la constante de integración nula puesto que en $r=0$ lo es el primer miembro de la ecuación.

Antes de continuar con la integración para obtener el perfil radial de la velocidad U del fluido, es conveniente introducir un cambio de variable y usar la distancia desde la pared, $y=R-r$, en vez de r, que permitirá obtener una solución para la capa límite turbulenta cerca de la pared de validez general, no solo restringida al flujo en un conducto que estamos considerando aquí. Usando la coordenada y la ecuación (21.8) queda

$$\nu\frac{\partial U}{\partial y}+\overline{u'v'}+\frac{R-y}{2\rho}\frac{\partial P_p}{\partial x}=0. \tag{21.9}$$

Para eliminar el gradiente axial de P_p, se evalúa la ecuación en $y=0$ ($r=R$) y se tiene en cuenta que las fluctuaciones son nulas en la pared, quedando

$$\nu\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{y=0}=-\frac{R}{2\rho}\frac{\partial P_p}{\partial x}\,, \tag{21.10}$$

que relaciona el gradiente de presión con el esfuerzo de fricción en la pared:

$$\tau_p\equiv\mu\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{y=0}=\frac{R}{2}\frac{\partial P_p}{\partial x}\,.^{1} \tag{21.11}$$

Es conveniente, además, definir una velocidad característica de las fluctuaciones, u^*, cuyo orden de magnitud se puede estimar de (21.9) y (21.11), de forma que la velocidad de las fluctuaciones al cuadrado es del orden del esfuerzo en la pared dividido por la densidad. Definimos, por tanto,

$$u^*\equiv(\tau_p/\rho)^{1/2}\,, \tag{21.12}$$

que en estos momentos puede considerarse simplemente como otra forma de denominar el esfuerzo de fricción en la pared. De esta forma, (21.10) se puede escribir como

$$-\frac{R}{2\rho}\frac{\partial P_p}{\partial x}=u^{*2}\,, \tag{21.13}$$

que sustituido en (21.9) proporciona

$$\nu\frac{\partial U}{\partial y}+\overline{u'v'}=u^{*2}\left(\frac{R-y}{R}\right). \tag{21.14}$$

Usando las variables adimensionales

$$\eta\equiv\frac{y}{R}\quad\text{y}\quad u^+\equiv\frac{U}{u^*}\,, \tag{21.15}$$

[1] Obsérvese que esta ecuación se podría haber obtenido sin más que aplicar la ecuación de cantidad de movimiento axial en forma integral entre dos secciones del conducto separadas por dx.

esta ecuación se escribe

$$\frac{1}{Re^*}\frac{du^+}{d\eta} + \frac{\overline{u'v'}}{u^{*2}} = 1 - \eta, \tag{21.16}$$

con

$$Re^* = \frac{u^* R}{\nu} \tag{21.17}$$

el número de Reynolds asociado a la velocidad de fluctuación. Dado que $Re = U_o R/\nu \gg 1$ al ser el flujo turbulento, donde U_o es un valor característico de la velocidad media, se va a suponer que $Re^* \gg 1$, lo cual es razonable debido a que Re debe ser mayor que 2300 (normalmente es mucho mayor) y la velocidad característica de las fluctuaciones u^* no es, ni mucho menos, del orden de 1000 veces menor que U_o, a lo sumo suele ser en torno a un $5 - 10\,\%$ de U_o.[2] Este hecho permite resolver la ecuación (21.16) en dos regiones bien diferenciadas: una capa delgada cerca de la pared, donde $\eta \sim \nu/u^* R \ll 1$ ($y \sim \nu/u^*$), y la región externa donde $\eta \sim 1$ ($y \sim R$). En la mayor parte del conducto, cuando $\eta \sim 1$, el término viscoso [primer término de (21.16)] es despreciable y existe un balance entre los esfuerzos turbulentos y el gradiente de presión. Los esfuerzos viscosos solo cuentan muy cerca de la pared, cuando $\eta \sim 1/Re^* \ll 1$, o $y \sim \nu/u^*$, que es, por tanto, la longitud hasta donde se dejan sentir los esfuerzos viscosos de la pared, región en la cual los esfuerzos viscosos son comparables a los turbulentos y el segundo miembro de (21.16) se reduce a la unidad, en primera aproximación. Se observa pues que $Re^* \gg 1$ implica que la longitud característica donde los efectos de la viscosidad molecular son importantes, ν/u^*, es mucho menor que el radio del conducto: $R \gg \frac{\nu}{u^*}$.

Para la capa próxima a la pared, $\eta \sim 1/Re^* \ll 1$, es conveniente reescalar la variable η mediante

$$\eta^+ \equiv \eta Re^* = \frac{y u^*}{\nu}, \tag{21.18}$$

que es de orden unidad en esta capa, y la ecuación queda

$$\frac{du^+}{d\eta^+} + \frac{\overline{u'v'}}{u^{*2}} = 1. \tag{21.19}$$

Como nos encontramos cerca de la pared, se puede utilizar la hipótesis de longitud de mezcla de Prandtl (20.17), que cerca de la pared se puede suponer proporcional a la distancia a la misma, en primera aproximación, $\nu_t = l_m u^* = \kappa y u^*$. Experimentalmente se comprueba que la constante κ, que se suele denominar de von Kármán, es universal y vale aproximadamente 0,41 para cualquier flujo turbulento adyacente a una pared sólida. Así, (20.16) se escribe

$$-\overline{u'v'} = \nu_t \frac{\partial U}{\partial r} = -\nu_t \frac{\partial U}{\partial y}, \tag{21.20}$$

y la ecuación (21.19) queda

$$(1 + \kappa\eta^+)\frac{du^+}{d\eta^+} = 1. \tag{21.21}$$

Esta ecuación se debe resolver con la condición de contorno

$$u^+(\eta^+ = 0) = 0, \tag{21.22}$$

[2] En cualquier caso, esta hipótesis de $Re^* \gg 1$ se justifica *a posteriori* por la excelente concordancia de los resultados que se obtienen con ella (que se verán a continuación) con las medidas experimentales.

resultando

$$u^+ = \frac{1}{\kappa}\ln(1+\kappa\eta^+), \tag{21.23}$$

que constituye el perfil de velocidad para la región cercana a la pared. Para $\eta^+ \ll 1$ ($y \ll \nu/u^*$), esta expresión se reduce a la ley lineal

$$u^+ \equiv \frac{U}{u^*} \simeq \eta^+ \equiv \frac{yu^*}{\nu}, \tag{21.24}$$

que corresponde al perfil de velocidad existente en la región más cercana a la superficie sólida, donde domina la fricción viscosa, denominada por tanto subcapa laminar o viscosa. Seguida a esta subcapa y dentro de la capa límite turbulenta, para $\eta^+ \gg 1$, se tendría el perfil logarítmico

$$u^+ = \frac{1}{\kappa}\ln\kappa\eta^+, \quad \eta^+ \gg 1, \tag{21.25}$$

conociéndose a este segundo tramo como subcapa intermedia o logarítmica.

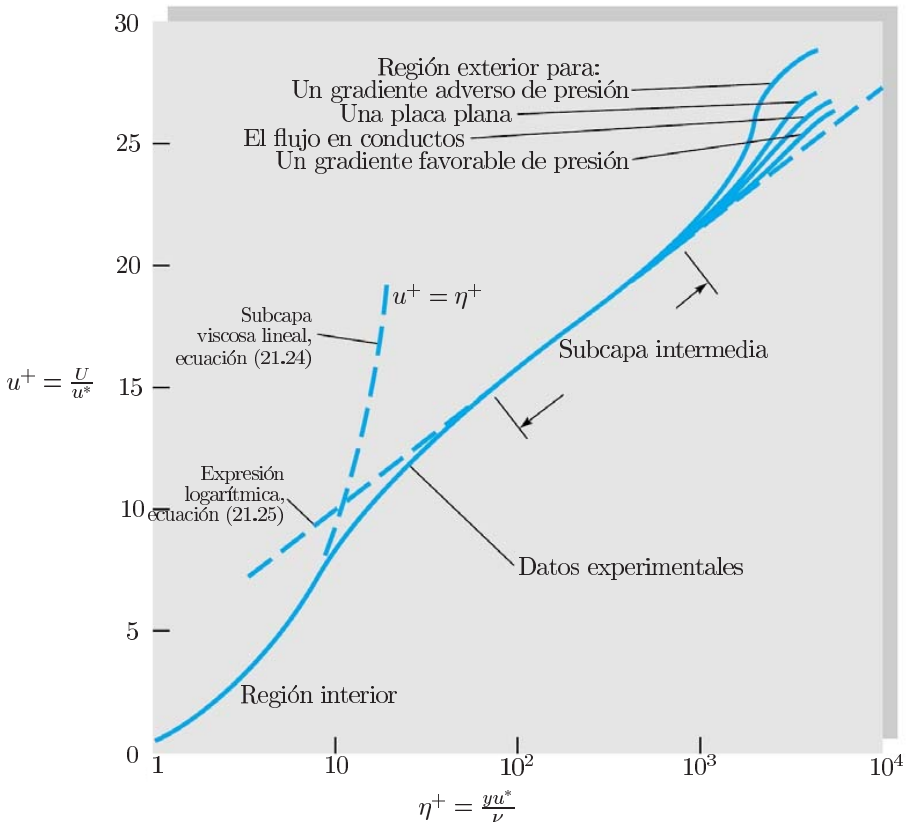


Figura 21.1: Perfil de velocidad en la capa límite turbulenta (figura adaptada de White, 2004).

Para completar el perfil de velocidad queda por resolver la región externa en la que $\eta = O(1)$. En ella la ecuación (21.16) se reduce a

$$\frac{\overline{u'v'}}{u^{*2}} \simeq 1-\eta, \tag{21.26}$$

pero ahora, lejos de la pared, la aproximación de Prandtl (21.20) no es válida. Aquí, el movimiento viene gobernado por un balance entre la convección de cantidad de movimiento exterior (producido por el gradiente de presión) y los esfuerzos turbulentos originados en el interior. La solución en esta **región exterior**, que constituye la mayor parte del perfil de velocidad, se debe obtener experimentalmente. En la figura 21.1 se muestran las tres subcapas mencionadas y se observa cómo las dos primeras, subcapa laminar y logarítmica, son independientes del flujo turbulento que esté teniendo lugar lejos de la superficie sólida, variando, eso sí, el perfil de velocidad correspondiente a la región exterior en función del flujo turbulento que se esté estudiando. Sin embargo, los experimentos para obtener la región exterior se simplifican notoriamente debido a que el perfil de velocidad ahí (de forma más precisa, $U - U_o$, donde U_o es la velocidad en el eje, que es la máxima), no depende de la viscosidad (por ser $Re^* \gg 1$). Así,

$$U - U_0 = f(u^*, R, y, U_o), \tag{21.27}$$

o, en forma adimensional,

$$\frac{U - U_o}{u^*} = F\left(\eta,\, \frac{U_o}{u^*}\right). \tag{21.28}$$

Como $U_o/u^* \gg 1$, se puede eliminar la dependencia de $(U - U_o)/u^*$ con U_o/u^*, en primera aproximación [de hecho, si se escribe (21.1)-(21.3) en términos de $U - U_o$, U_o desaparece del problema], quedando

$$\frac{U - U_o}{u^*} \simeq F\left(\eta\right), \tag{21.29}$$

que es la denominada **ley de defecto de velocidad**. La función F tiene que, por un lado, anularse en el eje, $F(\eta = 1) = 0$, y, por otra parte, acoplar asintóticamente con la solución (21.25) para $\eta \ll 1$. Esta última condición nos dice que, para $\eta \to 0$,

$$\text{de (21.29)} \Rightarrow F(\eta) + \frac{U_0}{u^*} \to \frac{U}{u^*}, \tag{21.30}$$

$$\text{de (21.25)} \Rightarrow \frac{1}{\kappa}\ln(\kappa\eta^+) \to u^+ = \frac{U}{u^*}, \tag{21.31}$$

$$\Longrightarrow F(\eta) + \frac{U_0}{u^*} \to \frac{1}{\kappa}\ln(\kappa\eta^+), \text{ y usando (21.18)}, \tag{21.32}$$

$$\Longrightarrow F(\eta) + \frac{U_0}{u^*} \to \frac{1}{\kappa}\ln\eta + \frac{1}{\kappa}\ln Re^* + \frac{1}{\kappa}\ln\kappa. \tag{21.33}$$

Viendo las dependencias en la última ecuación se concluye que

$$F(\eta) \to \frac{1}{\kappa}\ln\eta + B, \tag{21.34}$$

siendo

$$\frac{U_o}{u^*} = \frac{1}{\kappa}\ln Re^* + A, \tag{21.35}$$

y donde A y B son constantes arbitrarias, pero que verifican $A + B = (\ln\kappa)/\kappa$. Estas constantes, al igual que κ ($\simeq 0{,}41$), se determinan experimentalmente. Así, se encuentra que $B \simeq 5{,}5$, de donde $A \simeq 7{,}7$. Los experimentos demuestran que la ley lineal (21.24) vale para $\eta^+ < 5$, de forma análoga a la capa límite sobre una placa plana. La ley logarítmica

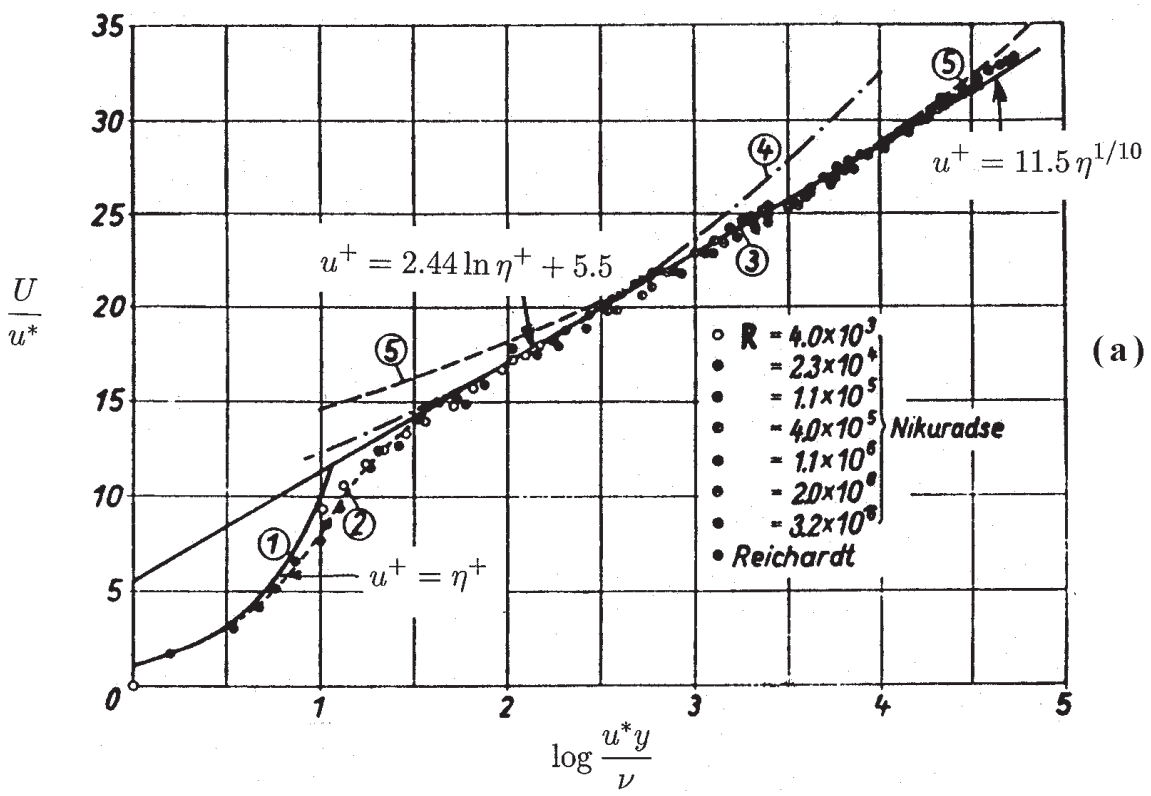


Figura 21.2: (a): Distribución de velocidad en un conducto de pared lisa y su comparación con medidas experimentales de Nikuradse y Reichardt. Téngase en cuenta que la abcisa es el logarítmo decimal de η^+ (figura tomada de Schlichting, 1987). (b): Coeficiente de fricción λ en función del número de Reynolds. La curva 1 es la correspondiente al flujo laminar, $\lambda = 64/Re$; la curva 2 es la ecuación (21.42) y la 3 corresponde a la aproximación de Blasius (21.44) (figura tomada de Monin y Yaglom, 1971).

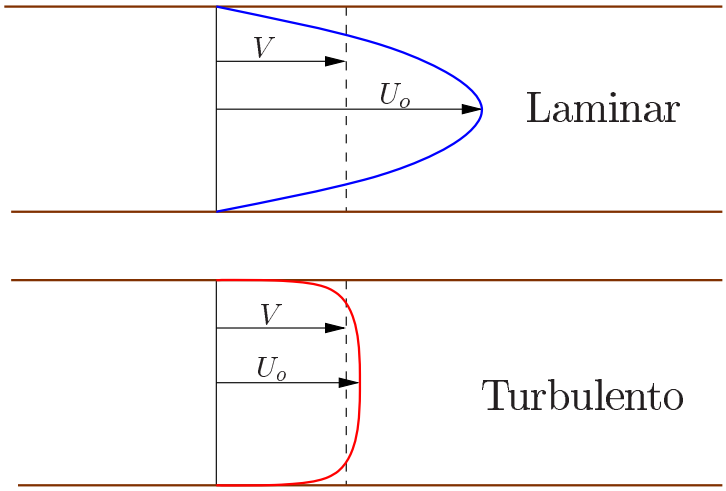


Figura 21.3: Comparación entre el perfil de velocidad laminar (parabólico de Hagen-Poiseuille) y turbulento en un conducto circular por el que circula el mismo caudal (misma velocidad media V).

(21.23), que incluye a la anterior, es aproximadamente válida para $\eta^+ < 70$, mientras que para $\eta^+ > 70$ la ley de defecto de velocidad se puede aproximar por $u^+ \simeq 11{,}5\,\eta^{1/10}$ [ver Fig. 21.2(a)].

En realidad, para el propósito de hallar una relación entre la fricción y el caudal, no interesa tanto los detalles del perfil de velocidad como la relación (21.35). De hecho, debido a que el perfil de velocidad turbulento resultante de las expresiones anteriores es mucho más plano que el correspondiente al flujo laminar de Poiseuille (ver figura 21.3), se puede aproximar la velocidad media V por la velocidad máxima en el eje U_o (la diferencia se absorberá ajustando de nuevo las constantes empíricas de las expresiones anteriores), de forma que el caudal vendría dado por

$$Q = \pi R^2 V \simeq \pi R^2 U_o. \tag{21.36}$$

Definiendo, como de costumbre, el número de Reynolds, basado en la velocidad media y el diámetro,

$$Re = \frac{2RV}{\nu} \simeq \frac{2RU_o}{\nu} = Re^* \frac{2U_o}{u^*}, \tag{21.37}$$

así como el coeficiente de fricción

$$C_f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2}\rho V^2} \simeq \frac{\tau_p}{\frac{1}{2}\rho U_o^2} = 2\left(\frac{u^*}{U_o}\right)^2, \tag{21.38}$$

e incluyendo ambas definiciones en la expresión (21.35), se obtiene la siguiente relación entre C_f y Re:

$$\sqrt{\frac{2}{C_f}} = \frac{1}{\kappa}\ln Re + \frac{1}{\kappa}\ln\sqrt{\frac{C_f}{2}} + A - \ln 2. \tag{21.39}$$

La constante libre A no coincide con el valor dado anteriormente ya que U_o no es exactamente igual a V. Experimentalmente se encuentra que para un flujo turbulento completamente

desarrollado en un conducto circular de pared lisa se tiene:

$$\frac{1}{\sqrt{C_f}} \simeq 1{,}76 \ln(Re\sqrt{C_f}) - 0{,}7. \tag{21.40}$$

Normalmente se suele utilizar, en vez de C_f, el denominado **factor de fricción de Fanning** (también llamado de **Darcy-Weisbach** en la literatura *hidráulica*)

$$\lambda \equiv 4C_f = \frac{8\tau_p}{\rho V^2}, \tag{21.41}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \simeq 0{,}88 \ln(Re\sqrt{\lambda}) - 0{,}8. \tag{21.42}$$

Esta expresión permite calcular, para cada Re, la fricción turbulenta y, por tanto, la caída de presión en el conducto debida a la fricción [ecuación (21.11) o (12.25)]:

$$\Delta P \pi R^2 = 2\pi R L \tau_p, \text{ o, sin dimensiones, } \frac{\Delta P}{\frac{1}{2}\rho V^2} = \frac{1}{2}\frac{\lambda L}{R}, \tag{21.43}$$

donde ΔP es la diferencia de presión entre la entrada y salida (de áreas πR^2) y τ_p es el esfuerzo viscoso actuando sobre la pared lateral del conducto (de área $2\pi RL$). Así, dado un caudal y un diámetro, que definen Re, las expresiones (21.42) y (21.43) proporcionan el incremento de presión necesario (en general presión reducida) para mover ese caudal.

La expresión (21.42), junto con la correspondiente para un flujo laminar, $\lambda = 64/Re$ [ecuación (13.5)] y resultados experimentales, se representan en la figura 21.2(b) (comparar también con los resultados de la práctica de laboratorio sobre el experimento de Reynolds). La expresión laminar vale hasta el número de Reynolds crítico. Desde $Re \simeq 2300$ hasta Re aproximadamente igual a 4000 no existe ninguna expresión analítica, y los valores del coeficiente de fricción λ fluctúan bastante. A partir de $Re \simeq 4000$, la expresión (21.42) es válida para un conducto de pared *lisa* (ver sección siguiente para una definición precisa de pared hidrodinámicamente lisa). Esta expresión se puede simplificar en ciertos rangos del número de Reynolds mediante fórmulas aproximadas semiempíricas. Por ejemplo, Blasius (1911) introdujo la simplificación

$$\lambda \simeq 0{,}316 Re^{-1/4}, \quad 4000 < Re < 10^5, \tag{21.44}$$

que también se representa en la figura 21.2(b). Otra correlación simplificada debida a White (1974), que tiene un rango de validez mayor [prácticamente la misma que la ecuación (21.42)], es

$$\lambda \simeq 1{,}02(\log Re)^{-2{,}5}, \tag{21.45}$$

donde log representa el logaritmo decimal.

21.2.1. Efecto de la rugosidad de la pared

La rugosidad de la pared del conducto apenas afecta a la fricción cuando el flujo es laminar (flujo de Poiseuille). Sin embargo, cuando el flujo es turbulento, su efecto es muy importante: las rugosidades promueven la turbulencia y, sobre todo, pueden llegar a *destruir* la subcapa laminar, cambiando completamente el perfil de velocidad y, por tanto, la fricción.

Es evidente que las rugosidades aumentan la fricción en relación a un conducto liso. Pero la cuantificación de este efecto no se puede hacer de una forma analítica como se ha hecho antes para un conducto de pared lisa, teniéndose que recurrir a la experimentación. Por supuesto, esta experimentación se hace guiada por el análisis dimensional y la semejanza física. En relación al problema considerado anteriormente del conducto liso, aparece una longitud característica adicional que es la altura media de las rugosidades, ϵ. Así, el problema tiene tres longitudes características: el espesor de la subcapa laminar o distancia a la pared hasta donde se deja *sentir* la viscosidad molecular, ν/u^*; el radio del conducto, R, y la altura media de las rugosidades, ϵ. Sin embargo, en la solución que estamos interesados en obtener, cerca de la pared del conducto, el radio del conducto no tiene influencia, por lo que el perfil de velocidades en esa región dependerá de

$$U = U(\nu, u^*, \epsilon, y), \tag{21.46}$$

que mediante análisis dimensional se simplifica a

$$u^+ \equiv \frac{U}{u^*} = f\left(\frac{yu^*}{\nu},\ \frac{\epsilon u^*}{\nu}\right) \equiv f(\eta^+, \epsilon^+). \tag{21.47}$$

Es decir, además de la variable adimensional η^+ que aparecía en la solución para un conducto liso, se tiene que u^+ depende de la rugosidad a través del parámetro adimensional $\epsilon^+ \equiv \epsilon u^*/\nu$. Este simple análisis dimensional nos proporciona un criterio para saber cuando un conducto se puede considerar *hidráulicamente liso*: el efecto de la rugosidad es despreciable cuando

$$\epsilon^+ = \frac{u^*\epsilon}{\nu} \ll 1. \tag{21.48}$$

En otras palabras, el conducto (la superficie sólida en general) se puede considerar liso a efectos hidrodinámicos cuando la altura de las rugosidades es mucho menor que el espesor de la subcapa laminar. Cuando esto ocurre, la viscosidad se encarga de disipar cualquier perturbación del movimiento originada por la rugosidad, no dejándose sentir su efecto en el resto del flujo.

Una vez conocido el perfil de velocidad, por un procedimiento análogo al descrito anteriormente para un conducto liso, se puede hallar una expresión para el coeficiente de fricción λ, que ahora dependerá del número de Reynolds y de la rugosidad relativa, ϵ/D. Una expresión que recoge los datos experimentales tanto para conductos lisos como rugosos dada por Colebrook y corregida por White es

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2{,}0 \log\left[\frac{\epsilon/D}{3{,}7} + \frac{2{,}51}{Re\sqrt{\lambda}}\right]. \tag{21.49}$$

Normalmente toda la información $\lambda = \lambda(Re, \epsilon/D)$, tanto para flujo laminar como para flujo turbulento en conductos lisos y rugosos, se suele dar en forma de un diagrama denominado **diagrama de Moody** (1944), que se representa en la figura 21.4.

Una particularidad importante de la relación $\lambda = \lambda(Re, \epsilon/D)$ es que deja de ser función del número de Reynolds para conductos completamente rugosos ($\epsilon^+ = \epsilon u^*/\nu > 70$, aproximadamente). De acuerdo con la expresión (21.49), esto ocurre para ϵ/D mayor que, aproximadamente, $9{,}3/Re\sqrt{\lambda}$. El valor de Re, para cada valor de la rugosidad relativa ϵ/D, a partir del cual λ sólo depende de esta última se representa en la figura 21.4 mediante

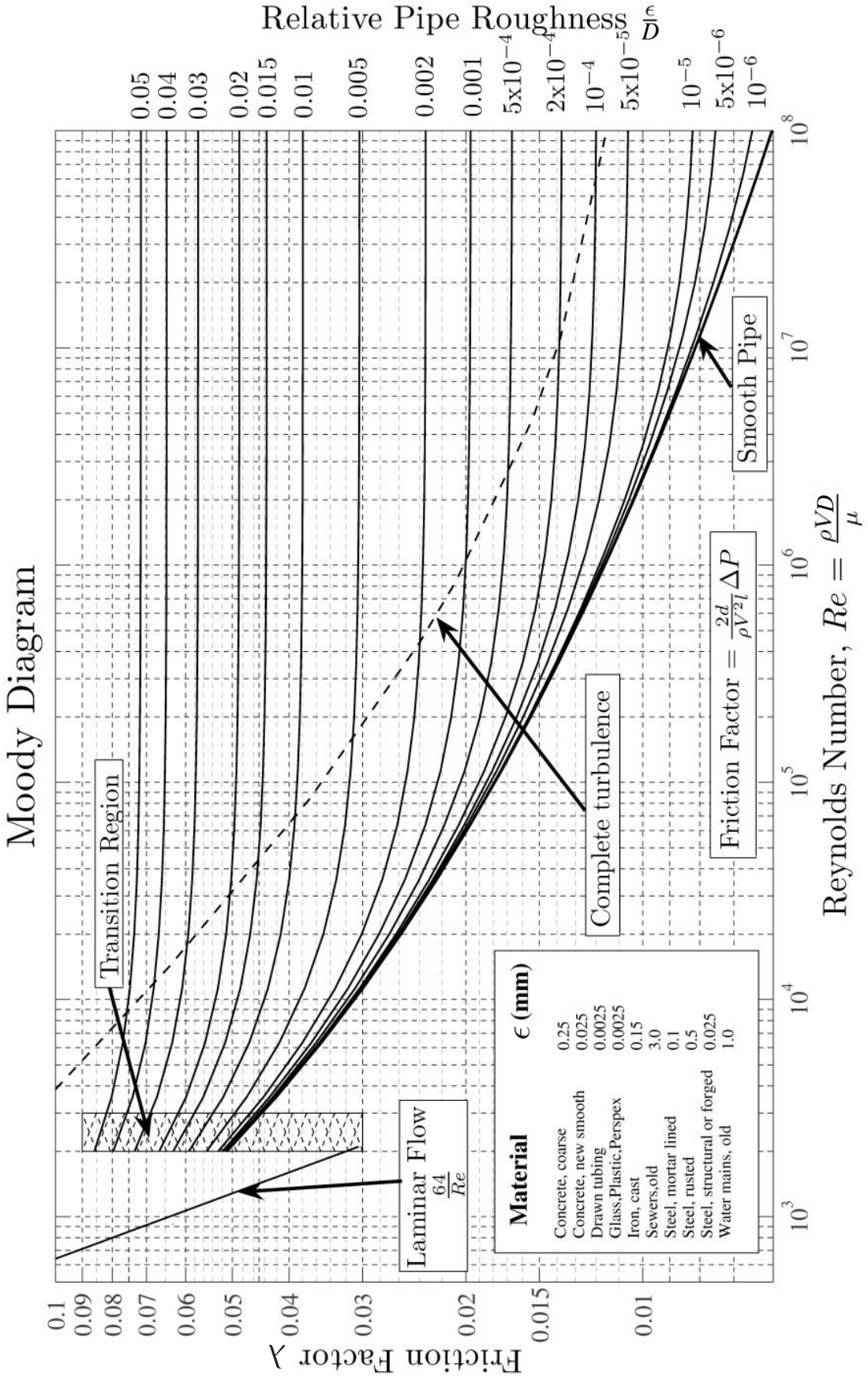


Figura 21.4: Diagrama de Moody para $\lambda = \lambda(Re, \epsilon/D)$. Adaptada de Wikipedia.

una línea discontinua. En estos casos los cálculos se simplifican muchísimo al no depender el coeficiente de fricción del número de Reynolds (ver sección siguiente).

Para terminar, es conveniente señalar que el valor del factor de fricción dado por el diagrama de Moody se suele también utilizar de forma aproximada en los casos en que el conducto no sea circular, siempre que se utilice, en el lugar del diámetro D del conducto circular, un diámetro equivalente obtenido en función del denominado **radio hidráulico**, definido como el cociente entre la sección A del conducto dividida por el perímetro *mojado* Π (se puede utilizar incluso para el flujo turbulento en un canal abierto):

$$r_h \equiv \frac{A}{\Pi}. \tag{21.50}$$

Para un conducto circular, $r_h = \pi D^2/4\pi D = D/4$. Así, se utiliza el diagrama de Moody sustituyendo D (en el número de Reynolds y en la rugosidad relativa) por $4r_h$. En cuanto a la velocidad que aparece en el número de Reynolds, se toma la velocidad media, Q/A.

21.3. Ecuaciones, condiciones iniciales y de contorno para el movimiento turbulento de líquidos en conductos

En esta sección se considerará el movimiento turbulento de líquidos en conductos de sección lentamente variable, teniendo en cuenta la fricción en la pared. Para derivar las ecuaciones se seguirá un procedimiento análogo al utilizado en la lección 17, aplicando los principios de conservación de masa y cantidad de movimiento a un volumen de control como el de la figura 17.1, pero teniendo en cuenta los resultados sobre la fricción turbulenta derivados en la lección anterior. La ecuación de la energía no se considerará porque en este curso no se abordarán los flujos turbulentos compresibles (de gases) en conductos.

En primer lugar se supondrá que no hay variaciones bruscas de la sección ni de la dirección a lo largo del conducto (el efecto de cambios bruscos en la sección y en la dirección se tendrá en cuenta al final de esta lección). Es decir, si r_h es el radio hidráulico del conducto [ecuación (21.50)], el cual dependerá, en general, de la coordenada axial a lo largo del conducto x, se supondrá que

$$\left|\frac{dr_h}{dx}\right| \ll 1 \ (r_h \ll L), \ r_h \ll R_c, \tag{21.51}$$

donde L y R_c son una longitud axial y un radio de curvatura característicos.

De la ecuación de continuidad, la primera condición (21.51) implica que el movimiento en el conducto es aproximadamente unidireccional:

$$V_t \sim V\frac{r_h}{L} \ll V, \tag{21.52}$$

donde V y V_T son velocidades características en las direcciones axial y transversal al eje del conducto, respectivamente. Por otro lado, se supondrá que el flujo es turbulento completamente desarrollado y, de acuerdo con la sección 21.2 (figura 21.3), en primera aproximación se puede suponer que el perfil de velocidad en cada sección es prácticamente plano. Es decir, la velocidad turbulenta media, $\vec{v} \simeq v\vec{e}_x$,[3] será función sólo de la coordenada axial

[3]Como en lo que sigue no aparecerán magnitudes de fluctuación, no se utilizarán letras mayúsculas para designar los valores medios.

x y del tiempo t, $v \simeq v(x,t)$. El efecto de la fricción queda así relegado a la pared, y se tendrá en cuenta de forma global utilizando las expresiones de la lección anterior. Para ello se definirá un esfuerzo de fricción medio τ_o en cada sección

$$\tau_o \equiv \frac{r_h}{A}\int_\Pi \tau_p dl, \tag{21.53}$$

donde $\Pi(x)$ y $A(x)$ son el perímetro y la sección; $\tau_o(x,t)$ se calculará mediante el coeficiente de fricción λ dado en (21.41) en donde en lugar de V ahora se usa la velocidad v de cada sección, es decir,

$$\tau_o = \frac{1}{8}\lambda\rho v^2, \tag{21.54}$$

donde λ es una función del número de Reynolds, $Re = 4vr_h/\nu$, y de la rugosidad relativa, $\epsilon/4r_h$, representada en la figura 21.4.

En cuanto a la presión media, también se considerará que es una función de x y de t solamente, $p = p(x,t)$, puesto que la hipótesis (21.51) implica, como ya se vio en la sección 17.1, que las variaciones transversales de la presión son mucho más pequeñas que las longitudinales a lo largo del conducto: $\Delta_T p/\Delta_L p \sim (r_h/L)^2 \ll 1$.

En definitiva, se supondrá que el flujo turbulento completamente desarrollado en un conducto de sección y curvatura lentamente variables está definido por las magnitudes turbulentas medias, no sólo en relación a las fluctuaciones turbulentas, sino también en cada sección,

$$v(x,t),\ p(x,t),\ T(x,t) \tag{21.55}$$

para las cuales se derivarán ecuaciones y se fijarán condiciones iniciales y de contorno a continuación.

21.3.1. Ecuaciones del movimiento

De la aplicación, como anteriormente se anticipó, del principio de conservación de la masa al volumen de control de la figura 21.5, se tiene

$$\frac{d}{dt}\int_{V_c(t)}\rho dV + \int_{S_c}\rho\vec{v}d\vec{S} = 0 = \cancel{\frac{d}{dt}\int_{V_c}\rho dV}^{\rho=\text{cte},\ V_c=\text{cte}} + \rho\int_{S_c}\vec{v}d\vec{S} = 0\,, \tag{21.56}$$

$$-vA + (v+dv)(A+dA) = -vA + vA + vdA + Adv + dvdA = 0. \tag{21.57}$$

Despreciando el término cuadrático $dvdA$ frente al resto, queda

$$vdA + Adv = v\frac{\partial A}{\partial x}dx + A\frac{\partial v}{\partial x}dx = 0 = v\frac{\partial A}{\partial x} + A\frac{\partial v}{\partial x}\,; \tag{21.58}$$

es decir,

$$\frac{\partial(vA)}{\partial x} = 0. \tag{21.59}$$

Análogamente, la ecuación de cantidad de movimiento en la dirección x se escribe

$$A\rho\frac{\partial v}{\partial t} + \rho\frac{\partial(v^2A)}{\partial x} = -A\frac{\partial p}{\partial x} - \tau_o\frac{A}{r_h} - \rho\frac{\partial U}{\partial x}A, \tag{21.60}$$

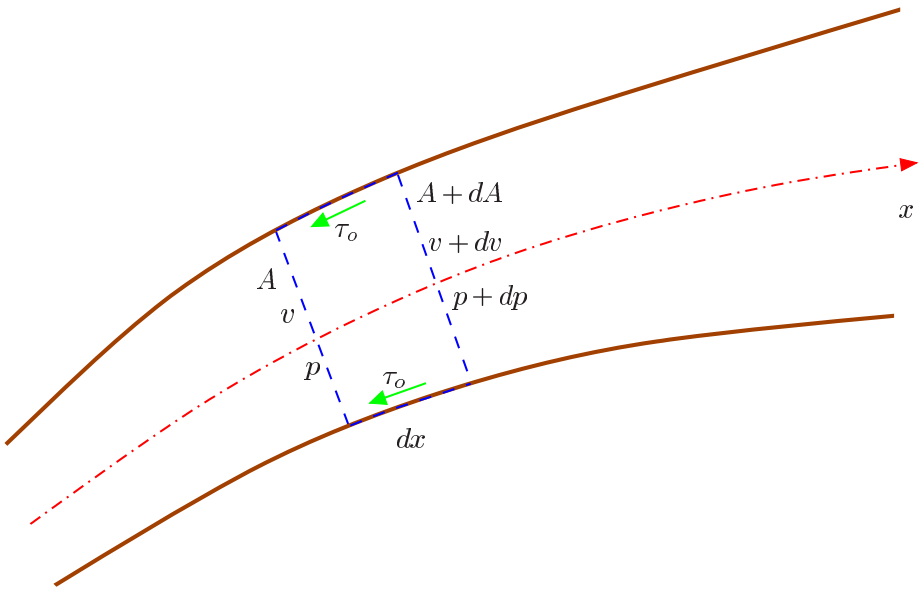


Figura 21.5: Volumen de control diferencial.

donde se ha supuesto que las fuerzas másicas derivan del potencial U y se ha utilizado el esfuerzo de fricción medio (21.53). Para obtener el término de fuerzas de presión se ha tenido en cuenta también la fuerza de presión que en la dirección x las paredes ejercen sobre el fluido, la cual, despreciando términos de orden $(dx)^2$, es igual a $p(\partial A/\partial x)dx$. El segundo término de (21.60) se puede reescribir como

$$\rho\frac{\partial(v^2A)}{\partial x}=\rho\frac{\partial(v\times[vA])}{\partial x}=\rho vA\frac{\partial v}{\partial x}+\rho v\frac{\partial(vA)}{\partial x}^{\text{0 por (21.59)}}=\rho vA\frac{\partial v}{\partial x}=\rho A\frac{\partial v^2/2}{\partial x}, \tag{21.61}$$

con lo que (21.60) se escribe

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial v^2/2}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial x}=-\frac{\lambda v^2}{8r_h}, \tag{21.62}$$

donde el factor de fricción

$$\lambda=\lambda\left(\frac{4r_hv}{\nu},\ \frac{\epsilon}{4r_h}\right) \tag{21.63}$$

se puede obtener mediante la figura 21.4. Se observa que la única diferencia entre esta ecuación y la correspondiente a un flujo ideal es el término de fricción (diferencia formal; conceptualmente son muy distintas puesto que en un fluido ideal el primer miembro es igual a cero a lo largo de cada línea de corriente y, puesto que todas las líneas de corriente parten de la misma región uniforme, se cumple para toda la sección; aquí es un promedio aproximado en cada sección).

Comparando en (21.62) el término de fricción con el convectivo podemos saber cuando el efecto de la fricción será despreciable. En efecto,

$$\frac{\partial v^2/2}{\partial x} \sim \frac{V^2}{L} \gg \frac{\lambda v^2}{8r_h} \sim \frac{\lambda V^2}{r_h} \Rightarrow \frac{V^2}{L} \gg \frac{\lambda V^2}{r_h}, \tag{21.64}$$

$$\Rightarrow 1 \gg \frac{\lambda L}{r_h}, \tag{21.65}$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda L}{r_h} \ll 1. \tag{21.66}$$

Así, para $\lambda L/r_h \ll 1$, el término de fricción es despreciable y se tiene la misma ecuación que para un flujo ideal, en primera aproximación.

Finalmente, las ecuaciones necesitarían una condición inicial (c.i.) y dos de contorno (c.c.) para ser resueltas:

$$\text{c.i.: } v(x,0); \tag{21.67}$$

$$\text{c.c.: } v(0,t) \text{ y } p(0,t). \tag{21.68}$$

Sin embargo, para el caso que se está abordando de un líquido ($\rho =$ constante), desaparece una condición inicial, ya que la ecuación de continuidad (21.59), una vez integrada, se escribe

$$vA = Q(t), \tag{21.69}$$

donde el caudal Q no depende de x. Como

$$v(x,t) = \frac{Q(t)}{A(x)}, \tag{21.70}$$

dado $A(x)$ y el valor de v en un punto para cada instante, por ejemplo $v(0,t)$, automáticamente se conoce $v(x,t)$ para todo x y t. Por tanto, no hace falta condición inicial para la velocidad. En cuanto a las condiciones de contorno, no se suele especificar $v(0,t)$, sino dos condiciones de contorno para la presión, $p(0,t)$ y $p(L,t)$, que fijan el caudal, como se verá a continuación para el caso estacionario, pero que es válido en general.

21.4. Flujo casi estacionario

Se va a abordar en esta sección el caso en que las ecuaciones del movimiento son lo más sencillas posible: aquel en el que el movimiento es casi estacionario (ejemplos no estacionarios se verán en los ejercicios). Para ello, se debe verificar que el número de Strouhal sea muy pequeño:

$$S_t = \frac{L}{vt_o} \ll 1, \tag{21.71}$$

lo cual asegura que los efectos no estacionarios son pequeños frente a los convectivos. Si la fricción es muy importante, mucho más que la convección de cantidad de movimiento, es decir, si $\lambda L/r_h \gg 1$, la condición anterior se *relaja* a

$$S_t \ll \frac{\lambda L}{r_h} (\gg 1), \tag{21.72}$$

ya que es suficiente con que el término no estacionario sea despreciable frente al término de fricción.

Las ecuaciones del movimiento serían [(21.59) y (21.62)]:

$$vA = Q, \tag{21.73}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + U\right) = -\frac{\lambda v^2}{8r_h}. \tag{21.74}$$

Sustituyendo (21.73) en (21.74) e integrando entre $x = 0$ y un x arbitrario se tiene

$$\left(\frac{Q^2}{2A^2} + \frac{p}{\rho} + U\right)_{x=0}^{x} = -\int_0^x \frac{\lambda Q^2}{8r_h A^2} dx. \tag{21.75}$$

Como, además, $Q =$ constante,

$$\frac{Q^2}{2}\left(\frac{1}{A^2} - \frac{1}{A^2(0)}\right) + \frac{p - p(0)}{\rho} + U - U(0) = -\frac{Q^2}{8}\int_0^x \frac{\lambda}{r_h A^2} dx. \tag{21.76}$$

En el caso en el que tanto la sección del conducto como la rugosidad fuesen constantes, $A \neq A(x)$, $\lambda \neq \lambda(x)$, la ecuación anterior se simplifica a

$$\frac{p(x) - p(0)}{\rho} + U(x) - U(0) = -\frac{\lambda Q^2}{8r_h A^2} x. \tag{21.77}$$

Evaluando ahora esta ecuación en el otro extremo $x = L$ del conducto se tiene

$$\frac{p(L) - p(0)}{\rho} + U(L) - U(0) = -\frac{\lambda Q^2}{8r_h A^2} L\,, \tag{21.78}$$

de forma que el caudal para un conducto de longitud L viene dado por

$$Q^2 = \frac{8r_h A^2}{\rho \lambda L}\left[p(0) + \rho U(0) - p(L) - \rho U(L)\right]. \tag{21.79}$$

Como λ depende del número de Reynolds y, por tanto, de Q (para un r_h y un A dados), la ecuación anterior se suele resolver iterativamente utilizando el diagrama de la figura 21.4: dadas la diferencia de presión reducida entre la entrada y la salida del conducto y la geometría del mismo, se supone un caudal y se calcula λ; mediante la ecuación anterior se obtiene un nuevo caudal que se utiliza para recalcular λ, y así sucesivamente hasta que el proceso converja. En el límite en el que la pared del conducto sea completamente rugosa (límite de conducto hidráulicamente rugoso considerado en la sección 21.2.1), λ es sólo función de la rugosidad relativa (es constante), y la ecuación anterior proporciona explícitamente el caudal.

21.5. Pérdidas localizadas en tuberías

Los sistemas de tuberías suelen tener cambios bruscos en la sección de los conductos (válvulas, ensanchamientos y contracciones, etc.) así como cambios repentinos de la dirección de los mismos (codos, tes, etc.). La caída de presión de remanso en estas regiones suele ser relativamente importante, a pesar de lo reducido de las dimensiones espaciales de estos

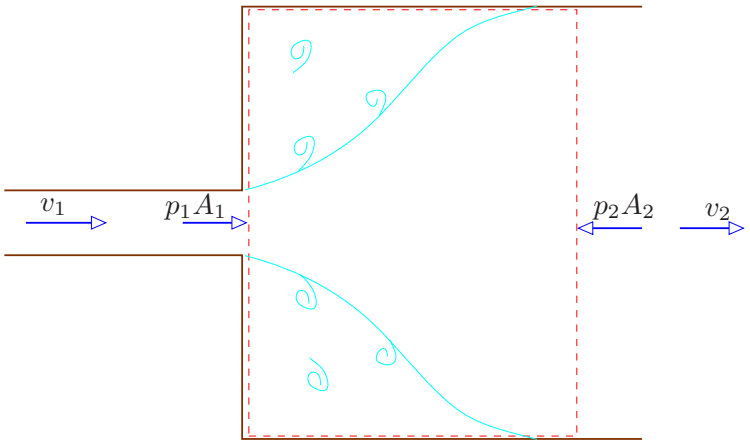


Figura 21.6: Ensanchamiento brusco.

accesorios en comparación con la longitud de los conductos, y a veces puede superar con creces la caída de presión originada por la fricción en las paredes de los conductos. Por ello la importancia de su cuantificación. Estas pérdidas *localizadas* de la presión de remanso se deben, fundamentalmente, a la formación de torbellinos como consecuencia de la separación de la corriente y a la producción de corrientes secundarias en relación a la corriente principal en los conductos. Estos movimientos suelen ser muy complicados, por lo que la cuantificación teórica de estas pérdidas es, salvo excepciones, prácticamente imposible. Por ello se recurre a la experimentación (guiada, por supuesto, por el análisis dimensional y la semejanza física). En esta sección se comentarán muy brevemente algunas de las pérdidas localizadas más significativas.

En el caso de flujos turbulentos incompresibles, como los que estamos considerando, es práctica habitual expresar la pérdida de la presión de remanso en términos de un coeficiente adimensional ζ que relaciona la caída de la presión de remanso con la energía cinética del flujo por unidad de volumen:

$$(\Delta p)_{loc} = \zeta \frac{1}{2} \rho v^2. \tag{21.80}$$

Para cada tipo de accesorio en donde se produce la caída localizada de presión, ζ depende de los diferentes parámetros geométricos adimensionalizados y, si la fricción es también importante, del número de Reynolds. En ocasiones también se suelen expresar las pérdidas localizadas en términos de la longitud equivalente de tubería que por fricción originaría la misma caída en la presión de remanso, pero es menos usual.

A continuación se considerarán brevemente los tipos más básicos de situaciones donde se producen pérdidas localizadas, comenzando con el ensanchamiento brusco, que es el único caso para el que es posible obtener ζ teóricamente. Información exhaustiva sobre pérdidas localizadas puede encontrarse, por ejemplo, en la monografía de Idelchik (1986).

21.5.1. Ensanchamiento brusco

Considérese un cambio brusco en la sección de una tubería como el esquematizado en la figura 21.6. La caída de presión de remanso es debida a la separación de la corriente y la consecuente formación de torbellinos, y se puede obtener sin más que aplicar las ecuaciones

de conservación de masa y cantidad de movimiento aplicadas al volumen de control de la figura:

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 = Q, \tag{21.81}$$

$$\rho Q(v_2 - v_1) = (p_2 - p_1)A_2. \tag{21.82}$$

Dividiendo esta última ecuación por ρA_2 y utilizando la primera, se obtiene

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \frac{v_1^2}{2}. \tag{21.83}$$

Así,

$$\zeta_{ens.} = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2. \tag{21.84}$$

En el límite $A_2 \gg A_1$, $\zeta_{ens.} \simeq 1$, perdiéndose, como es lógico, toda la energía cinética del fluido que entra en el ensanchamiento, $(\Delta p)_{ens.} \simeq \rho v_1^2/2$. Como en este límite $v_2 \ll v_1$, la ecuación (21.83) se reduce a $p_1 = p_2$. Esta situación ocurre, por ejemplo, cuando un conducto descarga en un depósito, siendo la presión del líquido en la descarga del conducto prácticamente igual a la presión en el fondo del depósito.

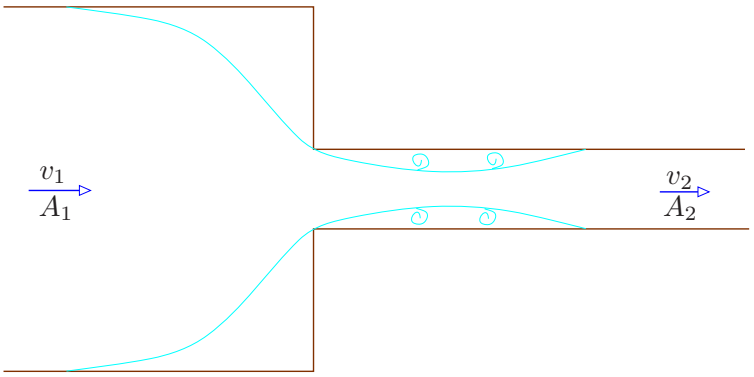


Figura 21.7: Contracción brusca.

21.5.2. Contracción brusca

En una contracción brusca como la de la figura 21.7, la corriente se separa antes y después de la misma, produciéndose un estrechamiento de la *vena líquida* después de la contracción. A pesar de ello, las pérdidas suelen ser bastante menores que en un ensanchamiento brusco de la misma relación de áreas. Definiendo

$$(\Delta p)_{con.} = \zeta_{con.} \rho \frac{v_2^2}{2}, \tag{21.85}$$

el coeficiente $\zeta_{con.}$ no se puede determinar teóricamente como en el caso de un ensanchamiento brusco puesto que A_{min} es desconocida, y hay que recurrir a la experimentación. Aproximadamente se tiene

$$\zeta_{con.} \simeq K\left(1 - \frac{A_2}{A_1}\right), \; K = 0{,}4 - 0{,}5. \tag{21.86}$$

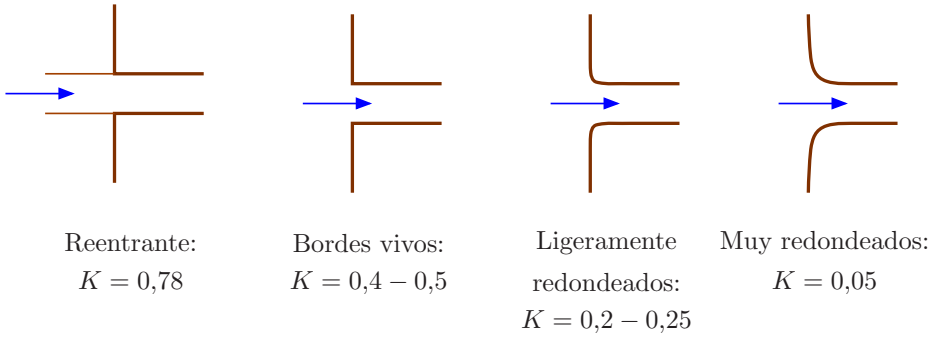


Figura 21.8: Coeficiente de pérdida de presión de remanso a la entrada de un conducto (tomada de White, 2004).

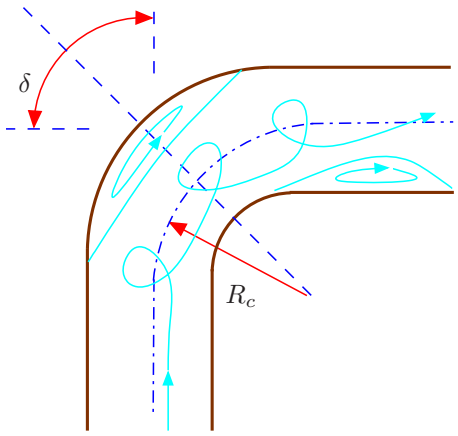


Figura 21.9: Esquema de la corriente en un codo.

Si $A_2/A_1 \ll 1$, lo cual correspondería, por ejemplo, a la descarga de un depósito a través de un conducto, $\zeta_{con.} \simeq K$. Como se observa en la figura 21.8, el coeficiente K puede reducirse apreciablemente redondeando los bordes de la entrada del conducto. Así, cuando los bordes están suficientemente redondeados, las pérdidas son despreciables y puede suponerse que la presión de remanso se conserva a la entrada del conducto.

21.5.3. Codos

En los cambios bruscos de la dirección del flujo en un conducto, la pérdida de presión de remanso se produce por tres mecanismos: por separación de la corriente, por fricción en la pared y por la formación de flujos secundarios (ver figura 21.9). Estos últimos son debidos a la acción de las fuerzas centrífugas, y se superponen a la corriente principal.

El coeficiente de perdidas depende, para un conducto circular, del ángulo del codo (δ), de la relación entre el radio de curvatura y el diámetro del conducto (R_c/D), de la rugosidad relativa y del número de Reynolds (estos dos últimos a través del coeficiente de fricción λ). Para un conducto de sección circular, se puede utilizar la expresión (válida para $R_c/D > 3$, aproximadamente)

$$\zeta_{codo} \simeq 0{,}0175\lambda_c \frac{R_c}{D}\delta, \tag{21.87}$$

donde el ángulo δ viene dado en grados y $\lambda_c = \lambda_c(R_c/D, Re)$. Valores experimentales de λ_c en función de R_c/D se pueden consultar, por ejemplo, en Idelchik (1986). Téngase en cuenta también que estos resultados se pueden extrapolar a secciones no circulares si uno usa $4r_h$ en vez de D.

Referencias.

- J.W. DAILY y D.R.F. HARLEMAN, 1975. Capítulos 13-14.
- R. FERNÁNDEZ FERIA, 2006, Capítulos 32-33.
- I.E. IDELCHIK, 1986.
- A.S. MONIN y A.M. YAGLOM, 1971. Capítulo 3.
- H. SCHLICHTING, 1987. Capítulos XX y XXI.
- F.M. WHITE, 2004. Capítulo 6.

Ejercicios de flujo turbulento en conductos.

Ejercicio resuelto

Un camión cisterna, que transporta un volumen V_0 de un líquido de densidad ρ y cuya cisterna se puede suponer que es un paralelepípedo recto de longitud l y anchura e, tiene que descargar todo su volumen de líquido en un depósito, inicialmente vacío, situado a una altura H respecto al camión. Para ello se utiliza una bomba colocada a la salida de la cisterna del camión y un conducto de longitud L y diámetro D con una válvula justo antes de su conexión con el depósito (ver figura 21.10; por simplicidad se supondrá que inicialmente todo el conducto está relleno del mismo líquido a descargar). Teniendo en cuenta que la relación entre la potencia que la bomba comunica al fluido y el caudal que circula por ella es $W = Q(\alpha + \beta\, Q)$, donde α y β son constantes conocidas, y suponiendo que la presión del aire en el interior de la cisterna del camión, a medida que va saliendo el líquido, es la atmosférica, que $(e\, l) \gg D^2$, que la conexión del camión al conducto (antes de la bomba) está bien diseñada y no genera pérdidas localizadas, que el movimiento en el conducto es turbulento, con coeficiente de fricción λ constante y conocido, que la pérdida localizada de presión de remanso en la válvula antes del depósito es K_v veces la energía cinética por unidad de volumen que circula por el conducto, con K_v conocido y constante, y que el depósito al que se descarga tiene una área transversal A (con $A \gg D^2$), se pide:

1. Obtener las ecuaciones diferenciales que gobiernan la evolución temporal del caudal $Q(t)$ y de la altura $h(t)$ del depósito en función de los datos conocidos del problema.

2. Obtener, a partir de las ecuaciones deducidas, qué fracción del volumen inicial del fluido contenido en la cisterna se bombearía hasta el depósito con la configuración analizada.

Solución.

Aplicando el principio de conservación de masa en forma integral al volumen de control definido por el líquido en la cisterna, suponiendo que se ha iniciado su vaciado, se obtiene

$$Q = \frac{dV}{dt} = \frac{d(e\, l h_c)}{dt} = e\, l \frac{dh_c}{dt} \tag{21.88}$$

donde V es el volumen instantáneo de líquido en la cisterna y h_c el nivel de líquido. Por otro lado, h_c está relacionada con h (altura del líquido en el depósito) si se tiene en cuenta que el caudal de líquido que sale del camión entra en el depósito, por lo que se puede escribir la igualdad

$$e\, l \frac{dh_c}{dt} = A \frac{dh}{dt} = Q, \tag{21.89}$$

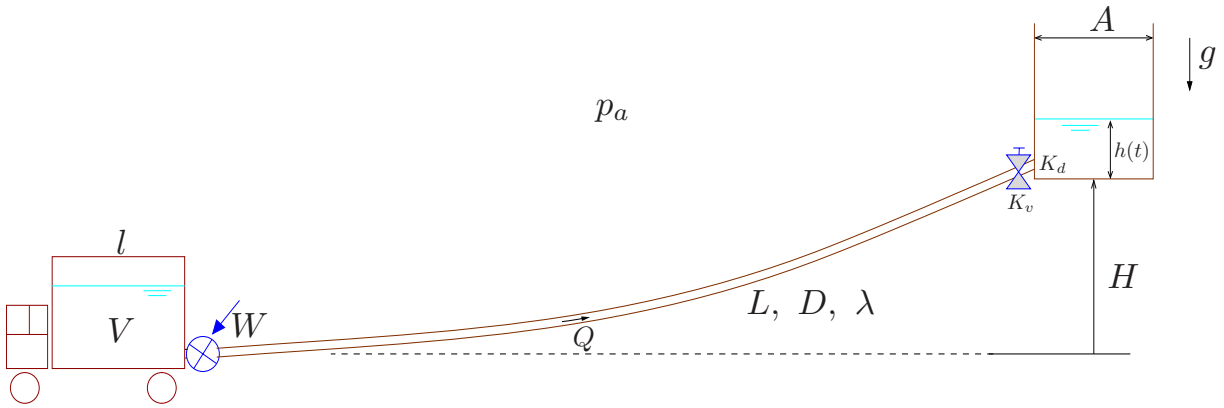


Figura 21.10: Esquema del trasvase.

cuya última igualdad nos proporciona la primera ecuación que se buscaba para h y Q. Al tener estas dos incógnitas hay que obtener otra nueva ecuación para cerrar el problema. Además, la primera igualdad de (21.89) se puede escribir como

$$e\,l\,dh_c = A\,dh, \tag{21.90}$$

que integrando a ambos lados se obtiene

$$e\,l[h_c(t) - h_c(t=0)] = A[h(t) - h(t=0)],\ \ h_c(t) = \frac{A}{e\,l}h(t) + h_{c_0}, \tag{21.91}$$

donde se ha hecho uso de $h(t=0) = 0$ y se ha definido $h_c(t=0) = \dfrac{V_0}{e\,l} \equiv h_{c_0}$.

La segunda ecuación que estamos buscando se obtiene de resolver el flujo turbulento que está teniendo lugar por el conducto en el que $\lambda = \text{cte}$ y por donde fluye un caudal Q que varía con el tiempo. La ecuación que nos permite calcular este caudal Q es (21.62):

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v^2/2}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\lambda v^2}{8r_h}, \tag{21.92}$$

donde Q no aparece explícitamente, sino a través de la velocidad del fluido en el conducto v: $Q = v\,\pi D^2/4 \equiv v\,A_c$. Si se usa esto en (21.92), junto con $r_h = D/4$ por ser un conducto de sección circular, que $U = gz$ y siendo $\partial(v^2/2)/\partial x = 0$ por ser la sección del conducto constante, se tiene:

$$\frac{1}{A_c}\frac{dQ}{dt} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\rho} + gz\right) = -\frac{\lambda Q^2}{2DA_c^2}, \tag{21.93}$$

ecuación que se convertirá en la segunda ecuación que se está buscando, una vez que se integre respecto a x y se elimine el gradiente de presión reducida. Por tanto, (21.93) se integrará entre los dos extremos del conducto $x = 0$ (después de la bomba) y $x = L$ (antes de la válvula). Para esta integración es necesario conocer la presión reducida en esos dos extremos (condiciones de contorno), por lo que lo siguiente está dedicado a ese fin, es decir, se buscará: $p_{x=0}$ y $p_{x=L}$ (x es la coordenada que recorre el conducto a lo largo de su eje y tiene su origen tras la bomba).

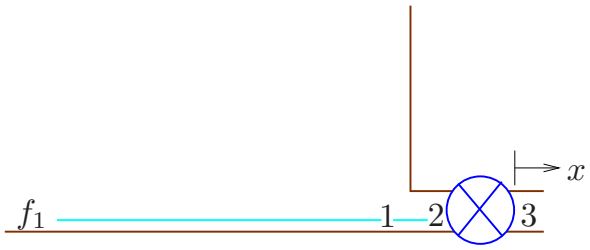


Figura 21.11: Detalle de la unión camión-conducto-bomba-conducto.

La cisterna del camión está unida al conducto a través de una contracción brusca en la que no hay pérdidas por lo que (ver figura 21.11)

$$p_{01} = p_{02} \tag{21.94}$$

siendo también

$$p_{01} = p_{0f_1} = p_{f_1} + \frac{\rho v_{f_1}^2}{2} = p_{f_1} = p_a + \rho g h_c(t), \qquad v_{f_1} \approx 0 \text{ por ser } l \times e \gg D^2 \tag{21.95}$$

con lo que (21.94) queda

$$p_{02} = p_a + \rho g h_c(t). \tag{21.96}$$

La ecuación de la energía a través de la bomba proporciona (ver figura 21.11):

$$W = Q\,(p_{03} - p_{02}) = Q\left[p_3 + \frac{\rho v^2}{2} - p_a - \rho g h_c(t)\right] = Q(\alpha + \beta\, Q), \tag{21.97}$$

ecuación que permite conocer la presión en el punto 3, es decir, $p_3 = p_{x=0}$:

$$p_3 = p_a + \rho g h_c(t) + \alpha + \beta Q - \frac{\rho v^2}{2} = p_{x=0}. \tag{21.98}$$

Para conocer la presión en el otro extremo del conducto, $x = L$, hay que analizar la válvula y la descarga al depósito a través de la expansión brusca que lo une al conducto (ver figura 21.12). En la válvula se pierde K_v veces la energía cinética por unidad de volumen del fluido que circula por el conducto, por lo que

$$p_{04} = p_4 + \frac{\rho v^2}{2} = p_{05} + K_v \frac{\rho v^2}{2}, \tag{21.99}$$

y, a su vez, en la expansión brusca se tiene

$$p_{05} = p_{06} + \frac{\rho v^2}{2}, \tag{21.100}$$

donde se ha tenido en cuenta que se pierde toda la energía cinética del fluido al pasar por ella. Por otro lado, en el fondo del depósito se tiene la siguiente equivalencia entre presiones de remanso (ver figura 21.12):

$$p_{06} = p_{0f_2} = p_{f_2} + \frac{\rho v_{f_2}^2}{2} = p_{f_2} = p_a + \rho g h(t), \qquad v_{f_2} \approx 0 \text{ por ser } A \gg D^2 \tag{21.101}$$

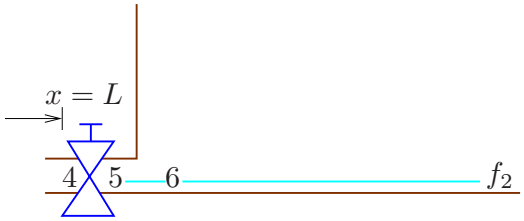


Figura 21.12: Detalle de la unión conducto-válvula-conducto-depósito.

por lo que sustituyendo hacia atrás se puede obtener la presión en el extremo $x = L$ del conducto, es decir, p_4:

$$p_4 = p_a + \rho g h(t) + K_v \frac{\rho v^2}{2} = p_{x=L}. \tag{21.102}$$

Ahora se puede integrar (21.93) respecto a x y usar las condiciones de contorno (21.98) y (21.102) para, con una, evaluar la constante tras la integración y, con la otra, obtener una ecuación para Q. En efecto, reescribiendo (21.93) como

$$\left(\frac{1}{A_c}\frac{dQ}{dt} + \frac{\lambda Q^2}{2DA_c^2}\right)\partial x + \partial\left(\frac{p}{\rho} + gz\right) = 0, \tag{21.103}$$

se puede integrar todos sus términos, quedando

$$\left(\frac{1}{A_c}\frac{dQ}{dt} + \frac{\lambda Q^2}{2DA_c^2}\right)x + \left(\frac{p}{\rho} + gz\right) = \text{constante}. \tag{21.104}$$

Usando la condición de contorno (21.98) en el extremo $x = 0$ ($z = 0$) se tiene que

$$\text{constante} = \frac{p_3}{\rho} = \frac{p_a + \alpha + \beta Q}{\rho} + g h_c(t) - \frac{v^2}{2}. \tag{21.105}$$

Sin embargo, usando (21.102) en $x = L$ ($z = H$) para evaluar la constante de (21.104) se habría obtenido:

$$\text{constante} = \left(\frac{1}{A_c}\frac{dQ}{dt} + \frac{\lambda Q^2}{2DA_c^2}\right)L + \left(\frac{p_4}{\rho} + gH\right) \tag{21.106}$$

$$= \left(\frac{1}{A_c}\frac{dQ}{dt} + \frac{\lambda Q^2}{2DA_c^2}\right)L + \left(\frac{p_a}{\rho} + gh + K_v\frac{v^2}{2} + gH\right) \tag{21.107}$$

$$= \left(\frac{1}{A_c}\frac{dQ}{dt} + \frac{\lambda Q^2}{2DA_c^2}\right)L + \left(\frac{p_a}{\rho} + g[h + H] + K_v\frac{v^2}{2}\right), \tag{21.108}$$

y, como la "constante" en (21.105) y (21.108) es la misma, igualándolas se obtiene:

$$\frac{p_a + \alpha + \beta Q}{\rho} + g h_c(t) - \frac{v^2}{2} = \left(\frac{1}{A_c}\frac{dQ}{dt} + \frac{\lambda Q^2}{2DA_c^2}\right)L + \left(\frac{p_a}{\rho} + g[h + H] + K_v\frac{v^2}{2}\right),$$

que, simplificando, usando $v = Q/A_c$ y la relación dada en (21.91), se puede reescribir como

$$\frac{L}{A_c}\frac{dQ}{dt} - \frac{\beta Q}{\rho} + \frac{Q^2}{2A_c^2}\left(K_v + 1 + \frac{\lambda L}{D}\right) - \frac{\alpha}{\rho} + g\left(h\left[1 - \frac{A}{el}\right] + H - h_{c_0}\right) = 0, \tag{21.109}$$

ecuación diferencial ordinaria no lineal que, junto con

$$Q = A\frac{dh}{dt}, \tag{21.110}$$

proporcionan las evoluciones temporales de Q y h. Estas ecuaciones se deben resolver con las condiciones iniciales $Q(t=0)=0$ y $h(t=0)=0$, completando así lo pedido en el primer apartado.

Por otro lado, el bombeo se mantendrá mientras la bomba sea capaz de vencer las resistencias que presenta el conducto, la válvula y la altura del líquido en el tanque de destino. Una vez que la bomba no pueda superar esas resistencias el depósito superior dejará de llenarse alcanzando $h(t)$ un valor estacionario o final h_e. En ese momento $Q=0$, por lo que, de (21.109), se tendría

$$-\frac{\alpha}{\rho} + g\left(h_e\left[1-\frac{A}{el}\right] + H - h_{c_0}\right) = 0\,. \tag{21.111}$$

Despejando h_e queda finalmente

$$h_e = \frac{\alpha}{\rho g\left[1-\frac{A}{el}\right]} + \frac{h_{c_0}-H}{\left[1-\frac{A}{el}\right]}. \tag{21.112}$$

De esta última expresión se puede obtener la condición que tiene que cumplir la bomba para que, al menos, llegue algo de fluido al depósito, es decir, para que $h_e \geq 0$. Así, (21.112) proporciona como condición que

$$\alpha \geq \rho g\,(H - h_{c_0})\,. \tag{21.113}$$

Problemas propuestos

1. Un depósito que contiene un líquido de viscosidad cinemática ν y densidad ρ descarga a través de un conducto horizontal, hidráulicamente liso, de longitud L y diámetro D. Suponiendo que el movimiento en el conducto es turbulento, que el nivel H de líquido en el depósito permanece prácticamente constante y que los valores numéricos de las diferentes magnitudes son $L = 100$ m, $D = 10$ cm, $H = 10$ m y $\nu = 10^{-6}$ m^2/s, calculen el caudal Q. ¿Es razonable suponer que el flujo es turbulento?

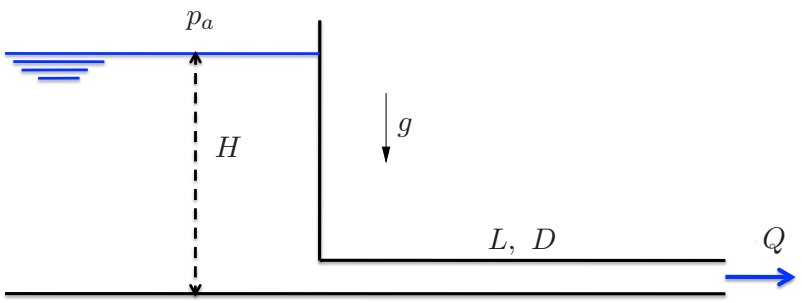


Figura 21.13: Esquema de la descarga de un depósito a través de un conducto horizontal

2. El conducto vertical de longitud L y diámetro D de la figura 21.14, inicialmente lleno de un fluido de densidad ρ y viscosidad μ, se está vaciando forzado por la caída del émbolo de masa M. Suponiendo que el movimiento en el conducto es turbulento, con el coeficiente de fricción λ constante (independiente de la viscosidad), obtener la ecuación diferencial que gobierna la posición del émbolo en función del tiempo, es decir, $h(t)$.

   Suponiendo que la masa del émbolo fuera despreciable, obtener de la ecuación anterior el caudal estacionario que se generaría.

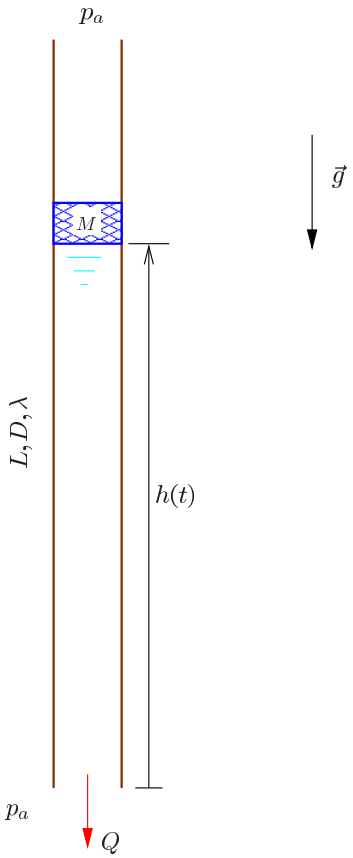


Figura 21.14

3. La instalación de la figura 21.15 se pretende utilizar para medir experimentalmente la constante adimensional asociada a la pérdida de carga localizada en un accesorio arbitrario. El sistema consiste en un conducto vertical de longitud L y diámetro D que está conectado al fondo de un depósito de dimensiones muy grandes, de manera que se mantiene constante el nivel H de líquido (de densidad ρ y viscosidad μ) . En el extremo inferior del conducto se coloca el accesorio cuya pérdida de carga se quiere medir. Con el sistema funcionando en régimen permanente se mide *in-situ* el caudal Q que descarga por la instalación y de éste y de los demás datos del problema se puede obtener la pérdida de carga localizada. Suponiendo que el movimiento en el conducto es turbulento, completamente desarrollado, y que en el accesorio se produce una pérdida de K_a veces la energía cinética por unidad de volumen que circula por el conducto, obtener la expresión que permite obtener la constante K_a en función de Q y otros

datos del problema. Evaluar numéricamente su valor para los siguientes datos: μ=0.001 kg/(m-s), ρ =1000 kg/m^3, H =10 m, L =5 m, D =5 cm, g =9.8 m/s^2, Q =50 l/s y la tubería es de hierro colado.

Suponiendo que H disminuye ahora hasta H =1 m, usando el valor de K_a obtenido anteriormente como válido y considerando la posibilidad de que λ varíe con la viscosidad, obtener el caudal Q que se obtendría de la instalación. ¿Es correcta la consideración de flujo turbulento?

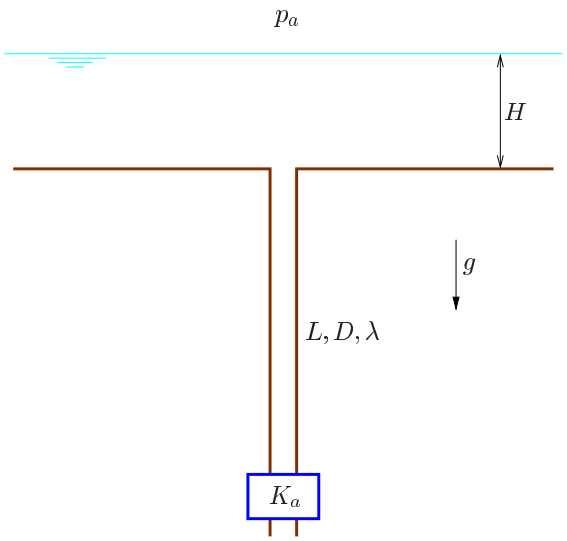


Figura 21.15: Instalación con accesorio

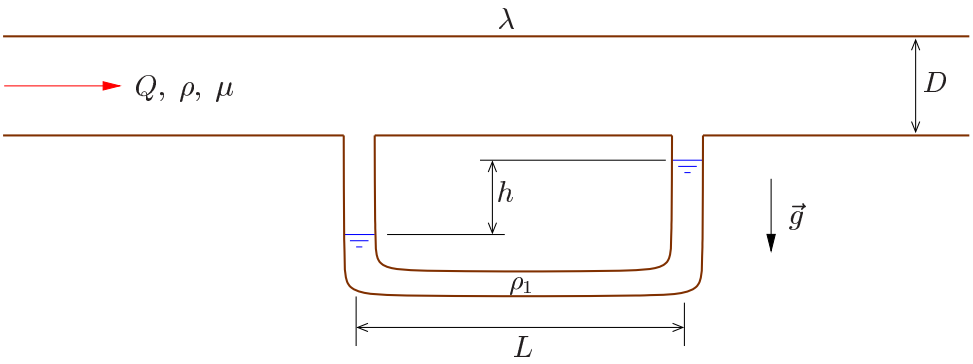


Figura 21.16

4. Por el conducto de diámetro D de la figura 21.16 circula un caudal Q constante y desconocido de un líquido de densidad ρ y viscosidad μ. Para tratar de conocerlo se instala un manómetro en forma de U acoplado al conducto, estando separados sus brazos una distancia L ($L \gg D$). El manómetro tiene un líquido de densidad ρ_1 que por la diferencia de presión entre los extremos del tubo en U se desplaza hasta alcanzar una posición final estacionaria, encontrándose los frentes líquidos separadas

por una distancia vertical h (ver figura 21.16). Suponiendo que el flujo en el conducto es turbulento, con coeficiente de fricción λ, obtengan una expresión que proporcione Q en función de h y demás datos del problema.

Evalúen el caudal cuando el conducto se puede considerar hidráulicamente liso, con $L = 1$ m, $h = 5$ cm, $D = 5$ cm, $\rho = 100$ Kg/m^3, $\mu = 0{,}001$ Kg/(m s) y $\rho_1 = 1000$ Kg/m^3. ¿Es correcta la suposición de que el flujo es turbulento?

5. El sistema de la figura 21.17 consiste en un conducto de diámetro D con dos brazos en forma de L, de longitudes l_1 y l_2, conectado en su extremo final con un depósito de sección A. Inicialmente todo el conducto está relleno de un líquido de densidad ρ. El dispositivo permite elevar el émbolo de masa M situado en el depósito cuando por el extremo horizontal del conducto se aplica una fuerza F constante sobre otro émbolo colocado al efecto. Sabiendo que el movimiento del fluido en el conducto se puede considerar turbulento, con coeficiente de fricción λ independiente de la viscosidad, que en el codo hay una pérdida de presión localizada K_c veces la energía cinética por unidad de volumen que circula por el conducto, que tanto el rozamiento de los émbolos con las paredes como la inercia de los mismos es despreciable, se pide:

   a) Ecuación que gobierna la posición $h(t)$ del émbolo del depósito en función de la fuerza aplicada y demás datos del problema.

   b) Obtengan el valor final o estacionario h_e.

   c) Den el valor mínimo que debe tener F para conseguir separar el émbolo del fondo del depósito.

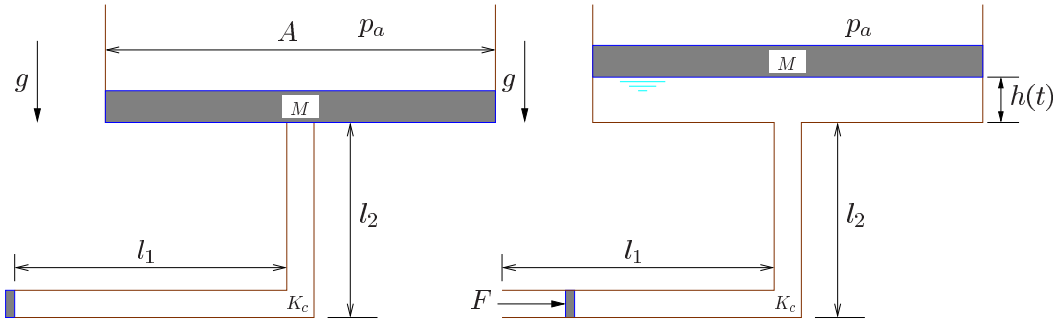


Figura 21.17: Izquierda: sistema en $t = 0$. Derecha: sistema en un instante t.

6. El depósito cerrado de la figura 21.18 contiene un líquido de viscosidad μ y densidad ρ, inicialmente hasta una altura h_0. El aire que ocupa el resto del depósito se mantiene a una presión constante $p_d > p_a$, de forma que el líquido descarga a la atmósfera a través de un conducto de diámetro D en forma de S que sale de la base del depósito. Sabiendo que el movimiento del fluido por el conducto es turbulento y que el coeficiente de fricción λ es independiente de la viscosidad, obtengan el par de ecuaciones que gobiernan el caudal Q y la evolución temporal del nivel de líquido $h(t)$. Den el valor final estacionario de h en función de p_d y demás datos del problema.

7. Un depósito de grandes dimensiones tiene adosado a una profundidad H de la superficie libre del líquido un tubo vertical de diámetro D y longitud total $L \gg D$ a través de

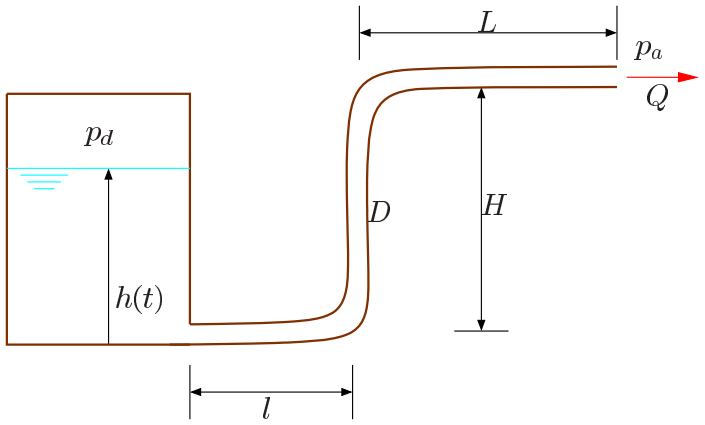


Figura 21.18: Descarga por un tubo en S.

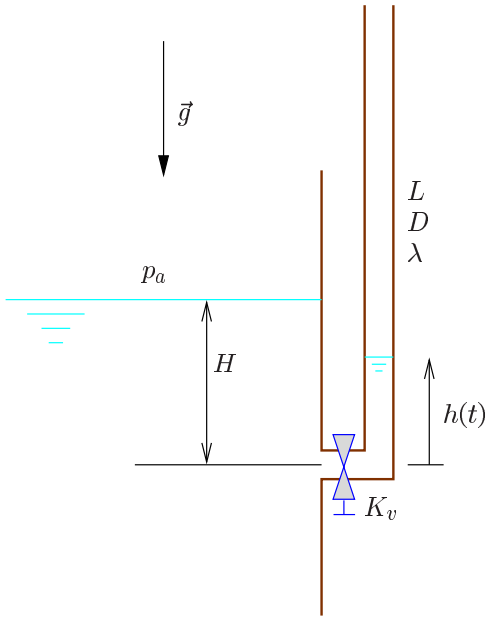


Figura 21.19: Descarga por un tubo vertical con codo y válvula.

un codo (ver figura 21.19). Inicialmente el tubo está vacío gracias a una válvula que impide la salida del líquido del depósito. En $t = 0$, se abre completamente la válvula de modo que el tubo empieza a llenarse. Suponiendo que el movimiento del líquido (de densidad ρ) en el tubo es turbulento, con coeficiente de fricción λ independiente de la viscosidad, que en la válvula existen unas pérdidas de K_v veces la energía cinética por unidad de volumen del líquido que circula por el tubo y que las pérdidas localizadas en el codo son despreciables, se pide:

a) Ecuación diferencial que gobierna la evolución de la altura $h(t)$ del líquido que asciende por el conducto.

b) Valor estacionario h_e de h. ¿Cuánto valdría h_e si la fricción fuera despreciable ($\lambda L/D \ll 1$)? Con esta última consideración, den el criterio para que la aceleración del fluido sea despreciable.

8. Para una aplicación industrial se requiere un caudal constante Q de gasolina de densidad ρ y viscosidad μ. Este caudal se tiene que suministrar a una cierta distancia del depósito de almacenaje de la gasolina, por lo que para ello se va a utilizar un conducto de longitud L, sección constante e inclinado un ángulo α respecto a la horizontal (ver figura 21.20). Sabiendo que el depósito es lo suficientemente grande y que mantiene su nivel gracias a otro sistema de regulación, que la entrada del conducto está bien diseñada y no hay pérdidas en ella, que en esta región la energía cinética por unidad de volumen a la entrada del conducto es despreciable frente a la presión que hay en el fondo del depósito y que el flujo en el conducto se puede considerar turbulento siendo λ el coeficiente de fricción, se pide obtener el diámetro D del conducto a utilizar para conseguir el caudal Q deseado.

   Evaluar D para $Q = 4,25 \times 10^{-4}$ m^3/s, $\rho = 680$ Kg/m^3, $\mu = 2{,}92 \times 10^{-4}$ Kg/(m·s), $L = 25$ m, $H = 28$ m y $\alpha = 40\ ^o$, dando también el material que se utilizaría para el conducto. ¿Es correcta la suposición hecha de energía cinética por unidad de volumen despreciable a la entrada del conducto frente a la presión en el fondo del depósito?

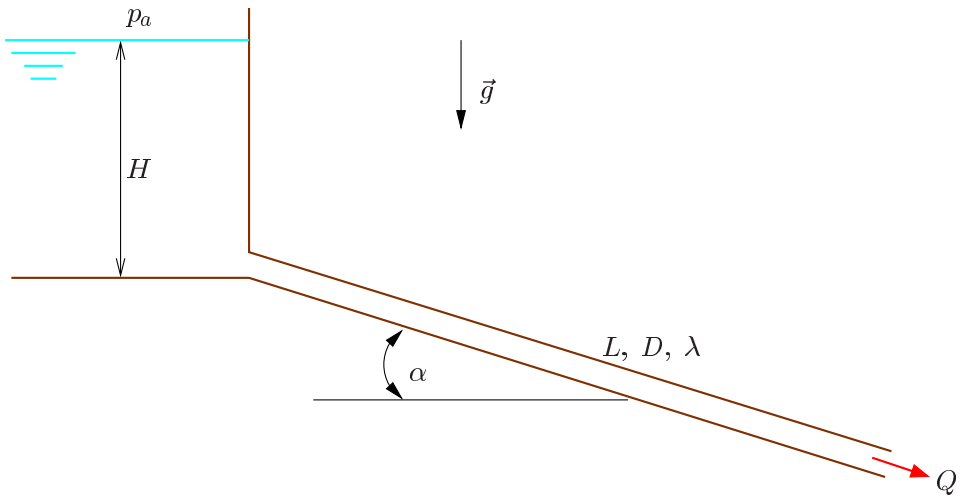


Figura 21.20: Esquema de la instalación.

9. Los dos depósitos (de grandes dimensiones) de la figura 21.21 están conectados mediante un conducto de hierro galvanizado nuevo que tiene un diámetro D y una longitud L ($L \gg D$), siendo H la separación entre sus dos superficies libres, que permanece prácticamente constante. Por acción de la gravedad se genera un caudal Q del líquido (de densidad ρ y viscosidad μ) desde el depósito superior al inferior. Suponiendo que el movimiento en el conducto es turbulento y que las uniones entre los depósitos y el conducto están bien diseñadas y no tienen pérdidas localizadas apreciables, se pide:

   a) Caudal Q que se está trasvasando.

   b) Si se quiere aumentar el caudal anterior en un 50 %, ¿de qué diámetro ha de ser el conducto, si fuera del mismo material?

Datos:
$\rho = 10^3$ kg/m^3, $\mu = 10^{-3}$ kg/(m s), $L = 100$ m, $D = 0{,}3$ m (para el apartado 1), $H = 20$ m.

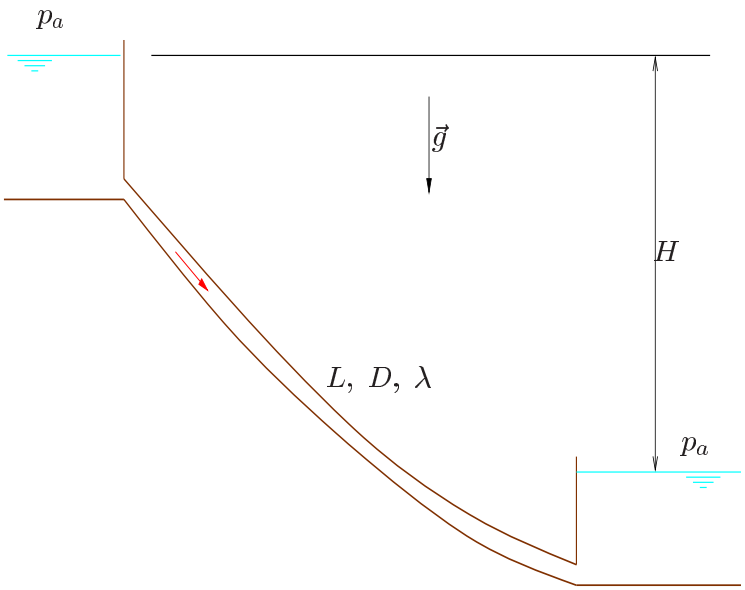


Figura 21.21

10. La instalación mostrada en la figura 21.22 consta de un depósito superior, un depósito inferior de sección circular A, altura H y aislado térmicamente y un conducto de longitud L y diámetro D ($A \gg D^2$) conectando ambos depósitos con una válvula al final del mismo. A su vez, el depósito inferior tiene adosado una miniturbina en su parte superior tal que la potencia que se extrae de ella está relacionada con el gasto de aire que circula por la misma como $W(t) = B\,G(t)$, donde B es una constante conocida. Con esta instalación se pretende aprovechar el líquido de densidad ρ embalsado en el depósito superior para obtener una potencia en la miniturbina cuando se llena el depósito inferior y el aire encerrado en él es forzado a salir a través de aquella. Sabiendo que el depósito superior mantiene su nivel de líquido constante, que $L \gg D$, que el movimiento en el conducto se puede considerar turbulento, siendo el coeficiente de fricción λ independiente de la viscosidad, que en la válvula se produce una pérdida de carga de K_v veces la energía cinética por unidad de volumen del líquido que circula por el conducto y que inicialmente, antes de abrir completamente la válvula, el depósito inferior está lleno de aire en condiciones atmosféricas, se pide:

   a) Obtener 3 únicas ecuaciones donde sólo aparezcan las incógnitas $h(t)$, $p_g(t)$ y $v(t)$ (velocidad del líquido en el conducto) junto con las correspondientes condiciones iniciales y demás datos conocidos del problema, y la ecuación para $W(t)$ en función de, como mucho, estas 3 incógnitas. Desprecien la energía cinética del aire a la salida del depósito en relación a su entalpía.

b) Considerando que la miniturbina no funcionase, cerrando herméticamente el depósito inferior, simplifique las ecuaciones anteriores y den los valores estacionarios que alcanzarían las distintas magnitudes.

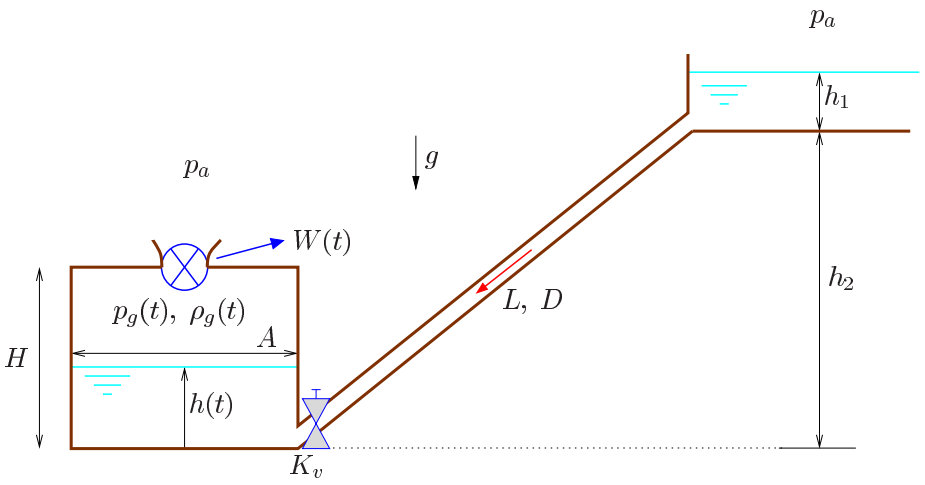


Figura 21.22: Descarga de depósito y miniturbina.

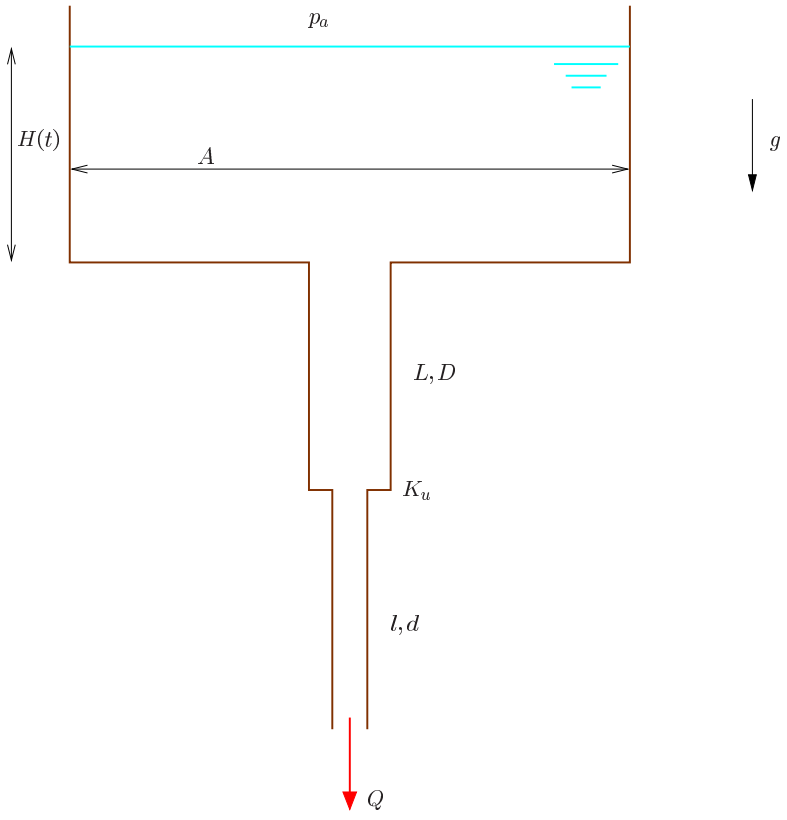


Figura 21.23: Descarga a través de un conducto con dos tramos de sección diferente.

11. El depósito de sección A de la figura 21.23 contiene un líquido de densidad ρ y viscosidad μ, siendo su nivel inicial H_0. Conectado a su fondo existe un conducto

vertical con dos tramos de longitudes L y l, y diámetros D y $d < D$, ambos constantes ($D^2 \ll A, L \gg D, l \gg d$), que permiten el vaciado del depósito. Suponiendo que el movimiento del fluido por los conductos se puede considerar turbulento (λ es constante e independiente de la viscosidad) y casi-estacionario, que la unión entre el depósito y el conducto está bien diseñada mientras que en la unión entre los dos conductos existen unas pérdidas de K_u veces la energía cinética por unidad de volumen que circula por el conducto de diámetro d, obtener la ecuación diferencial que gobierna la evolución de H con el tiempo. Simplificarla en el caso de que $d = D$, $l \ll L$ y fricción despreciable y, entonces, obtener el orden de magnitud del tiempo de vaciado del depósito.

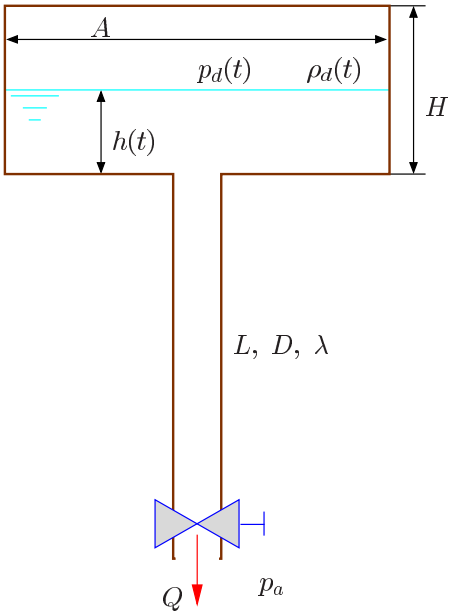


Figura 21.24

12. Un depósito de sección A y altura H, cerrado y aislado térmicamente, contiene un nivel inicial h_0 de un líquido, estando ocupado el resto del depósito por aire que inicialmente está en condiciones atmosféricas. El depósito tiene unido en su base inferior un conducto de longitud L y diámetro D ($D \ll L$, $D^2 \ll A$) con una válvula al final del mismo, que se abre en $t = 0$ permitiendo la descarga del líquido a la atmósfera (ver figura 21.24). Suponiendo que el movimiento del líquido en el conducto es turbulento, con coeficiente de fricción λ independiente del número de Reynolds, y que la pérdida de carga en la válvula es K veces la energía cinética por unidad de volumen del líquido que circula por el conducto, se pide:

    a) Ecuaciones que describen la altura, $h(t)$, del líquido en el depósito, la presión, $p_d(t)$, y la densidad, $\rho_d(t)$, del aire en el depósito.

    b) Valores finales de h, p_d y ρ_d.

13. Para estudiar el transitorio de un acelerómetro en forma de U como el de la figura 21.25 se supone que el movimiento del líquido de densidad ρ en el conducto es turbulento con coeficiente de fricción λ constante, y que las pérdidas en los codos son despreciables. Si

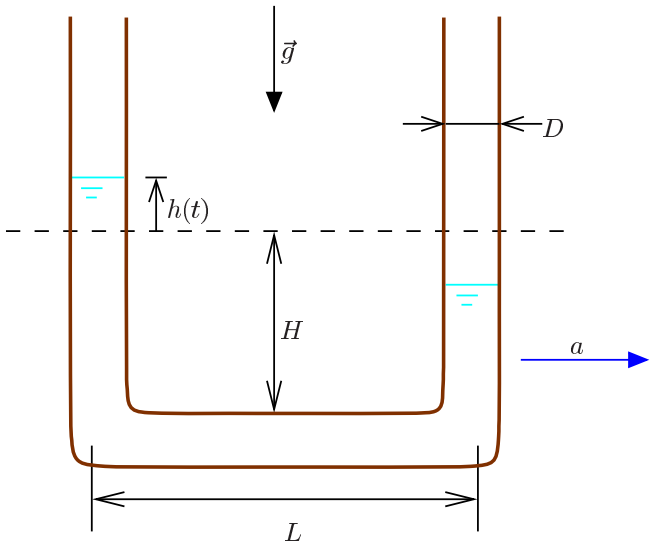


Figura 21.25

la aceleración a del vehículo en el que está instalado el acelerómetro es constante y en la dirección indicada en la figura 21.25, se pide:

a) Ecuación que determina la altura del líquido en función del tiempo.

b) Adimensionalicen la ecuación anterior y hallen el orden de magnitud del tiempo necesario para llegar al estado estacionario. Obtengan además la condición que se debe verificar para que las fuerzas de fricción en la pared sean despreciables.

c) En el límite anterior de fricción despreciable, integren la ecuación y representen gráficamente la altura del líquido en función del tiempo. Comenten el significado físico del resultado.

14. Un depósito descarga a través de un conducto horizontal de longitud L y diámetro $D \ll L$ (ver figura 21.26). Inicialmente la válvula V está cerrada y el conducto vacío. Al abrirse la válvula el frente líquido $x(t)$ avanza por el conducto hasta llegar al extremo del mismo después de un cierto tiempo $t = t_1$ con una velocidad v_1. A partir de este instante, la velocidad del líquido en el conducto aumenta hasta que llega a un valor estacionario v_2. Suponiendo que en todo momento el movimiento del líquido en el conducto es turbulento, sin influencia de la viscosidad en el coeficiente de fricción λ, que la altura H del depósito se puede suponer constante, y que la caída de presión de remanso en la válvula es K veces la energía cinética por unidad de volumen que circula por ella, se pide:

a) Ecuaciones y condiciones iniciales que describen $x(t)$ y la velocidad en el conducto, así como la condición que permite determinar t_1 y v_1.

b) Una vez que todo el conducto está lleno de líquido, escriban la ecuación diferencial y la condición inicial que proporciona la velocidad en el conducto en función del tiempo.

c) Velocidad en el conducto que se alcanza en el estado estacionario y orden de magnitud del tiempo necesario para que se alcance dicha velocidad.

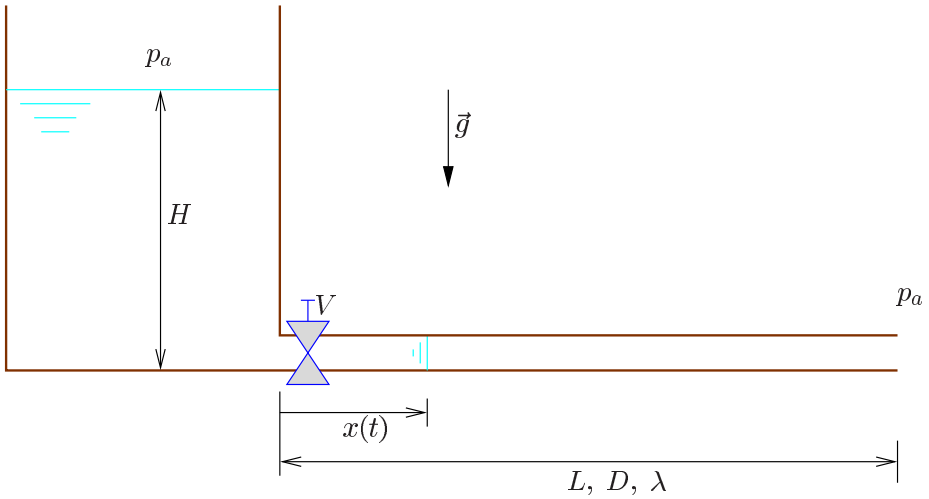


Figura 21.26

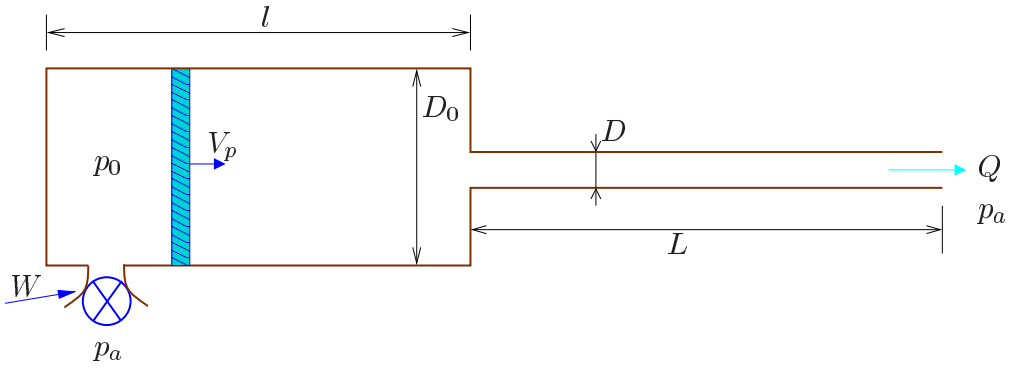


Figura 21.27

15. El dispositivo inyector de la figura 21.27 consta de un cilindro de diámetro D_0 y longitud l dividido por un pistón, y un conducto de longitud L y diámetro $D \ll D_0$ adosado en la parte derecha del mismo. Mediante un compresor se inyecta aire, tomando a presión y temperatura ambiente, en la región del cilindro a la izquierda del pistón. Este aire empuja el pistón y expulsa el agua situada en la parte derecha del pistón a través del conducto. Suponiendo que:

    - el cilindro está aislado térmicamente;
    - la masa y el rozamiento del pistón son despreciables, encontrándose inicialmente a una distancia $l/3$ de su tapa izquierda;
    - el coeficiente de fricción λ del agua en el conducto es independiente de la viscosidad;
    - la pérdida de presión de remanso del agua al pasar del cilindro de diámetro D_0 al conducto de diámetro D es igual a la mitad de la energía cinética por unidad de volumen del agua que sale por el conducto; y
    - la energía cinética del aire a la entrada del cilindro es despreciable frente a su entalpía,

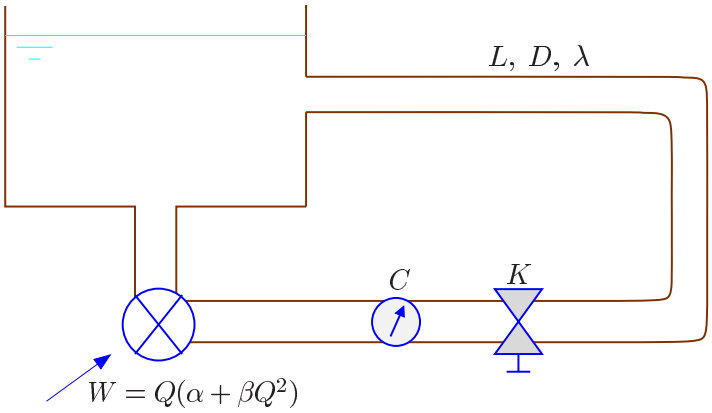


Figura 21.28: Circuito cerrado para el cálculo de la constante K.

calcular la potencia W que hay que suministrar al compresor para conseguir un caudal de agua constante Q.

Escribir las expresiones de W en los límites en que $\rho Q^2/D^4 p_a$ es muy grande y muy pequeño frente a la unidad (ρ es la densidad del agua).

16. Se dispone de una instalación como la de la figura 21.28 para calcular el coeficiente de pérdida localizada K de una válvula. Consta de un depósito del que sale un conducto de longitud total L y diámetro D que recircula un líquido de densidad ρ de nuevo al depósito. El líquido es impulsado por una bomba que le suministra una potencia $W = Q(\alpha - \beta Q^2)$, donde Q es el caudal que circula por la instalación y α y β son constantes conocidas. Detrás de la bomba hay un caudalímetro C. Primeramente se pone en funcionamiento la bomba **sin** la válvula en el circuito y se mide un caudal Q_s. Posteriormente se incorpora la válvula cuya constante adimensional de pérdida K se desea determinar detrás del caudalímetro, se pone en funcionamiento de nuevo la bomba y se mide un caudal $Q_c < Q_s$ circulando por la instalación. Suponiendo que el movimiento del líquido en el conducto es turbulento, con coeficiente de fricción λ independiente del número de Reynolds, y que son despreciables las pérdidas localizadas en los codos y en el caudalímetro, determinen λ y K en función de los datos del problema y de los caudales Q_s y Q_c medidos.

Práctica de laboratorio: Pérdidas de carga en una instalación hidráulica

Objetivo, montaje experimental, ecuaciones y definiciones

El objetivo de esta práctica es la obtención de las pérdidas de presión de remanso (comúnmente conocidas como pérdidas de carga) que se producen en distintos tipos de elementos o accesorios que se pueden encontrar en una instalación hidráulica. Como se comentó previamente en la sección 21.5, es conveniente y habitual expresar la pérdida de presión de remanso en términos de un coeficiente adimensional ζ que relaciona la caída de la presión de remanso con la energía cinética del flujo por unidad de volumen que circula por la instalación, según se mostró en (21.80).

Para cada tipo de accesorio que se va a analizar en esta práctica, se obtendrá el coeficiente ζ mediante la medición, por un lado, del caudal que circula por el accesorio, lo cual permitirá conocer la energía cinética del fluido que circula por el accesorio, y, por otro, de la diferencia de presión entre los dos extremos del mismo para diferentes caudales. Para ello se utilizará (21.80) escrita como

$$\zeta = \frac{(\Delta p)_{loc}}{\frac{1}{2}\rho v^2}, \tag{21.114}$$

y se realizará un promedio entre los diferentes caudales utilizados. En realidad, el coeficiente ζ depende, además del tipo de accesorio y de las dimensiones relativas del accesorio concreto, del número de Reynolds[4] y, por tanto, del caudal. Pero esta dependencia no es apreciable salvo que el rango de números de Reynolds sea muy amplio.

La figura 21.29 muestra el montaje experimental.[5] El agua que circula por la instalación proviene de un depósito situado en la parte inferior y es impulsada mediante una bomba centrífuga. El accesorio a ensayar se colocará en la parte recuadrada, configurando adecuadamente el sistema de válvulas. En la figura también se muestran los distintos elementos de la instalación, entre los que cabe destacar para la realización de la práctica el caudalímetro analógico y los manómetros. El caudalímetro es de tipo rotámetro, similar al descrito en el problema 2 de la lección 10, pero que utiliza un 'flotador' cónico de aluminio. Este flotador adquiere una posición de equilibrio determinada dentro de la cavidad troncocónica en función del caudal que circula. La graduación del caudalímetro ha sido calibrada previamente, marcando el caudal en litros por hora (el mínimo es 200 l/h).

[4] Ver, por ejemplo, Idelchik (1986).

[5] Mencionar el PFC con el que se ha construido. Autor y directores.

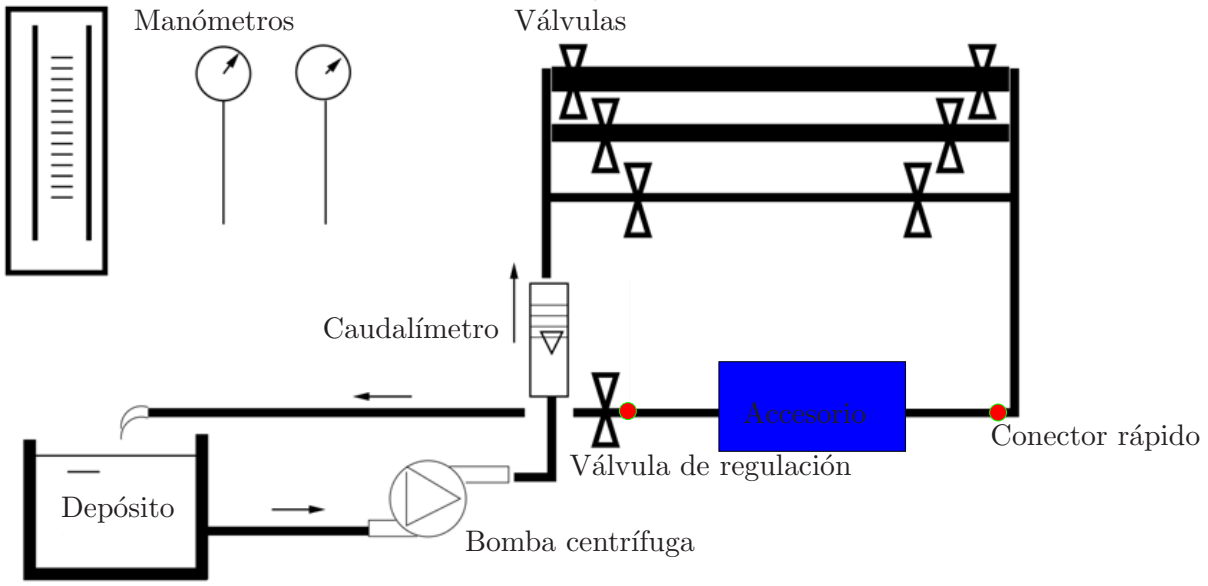


Figura 21.29: Esquema de la instalación.

En cuanto a los manómetros, disponen de conectores rápidos (de uso común en sistemas neumáticos) para poder acceder fácilmente a determinados puntos de la instalación y conocer así la presión en esos puntos, o la diferencia de presión entre dos puntos. En particular, de entre los manómetros que dispone la instalación, en la práctica se utilizará un manómetro diferencial de columnas de agua como el que se muestra en la figura 21.30. Se conectará a la entrada y a la salida del accesorio para medir la caída de presión a través del mismo mediante la diferencia de altura existente entre las dos columnas de agua. Después de que se hayan equilibrado las dos columnas de agua en los tubos verticales del manómetro y teniendo en cuenta que la presión del aire en la parte superior de los tubos es la misma por estar ambos conectados,[6] digamos p_0, aplicando fluidostática en cada columna de agua, se puede escribir (ver figura 21.30)

$$p_1 = p_0 + \rho g H_1, \tag{21.115a}$$

$$p_2 = p_0 + \rho g H_2, \tag{21.115b}$$

con $H_1 - H_2 = h$, y donde p_1 y p_2 son las presiones en las secciones transversales en las que están conectados los manómetros y cuya diferencia nos interesa conocer. Para ello, despejando p_0 de (21.115a) y sustituyendo su valor en (21.115b) se tiene

$$p_1 = p_2 - \rho g H_2 + \rho g H_1, \tag{21.116}$$

de modo que la diferencia de presión buscada entre los extremos del accesorio es

$$p_1 - p_2 = (\Delta p)_{loc} = \rho g H_1 - \rho g H_2 = \rho g h. \tag{21.117}$$

El montaje experimental ha sido diseñado con suficiente versatilidad para que diferentes accesorios se puedan intercambiar fácilmente y cuantificar las pérdidas de carga de cada

[6] Esta presión se ajusta mediante un bombín manual para que la diferencia de alturas entre las dos columnas esté en el rango visible y graduado de la escala del manómetro.

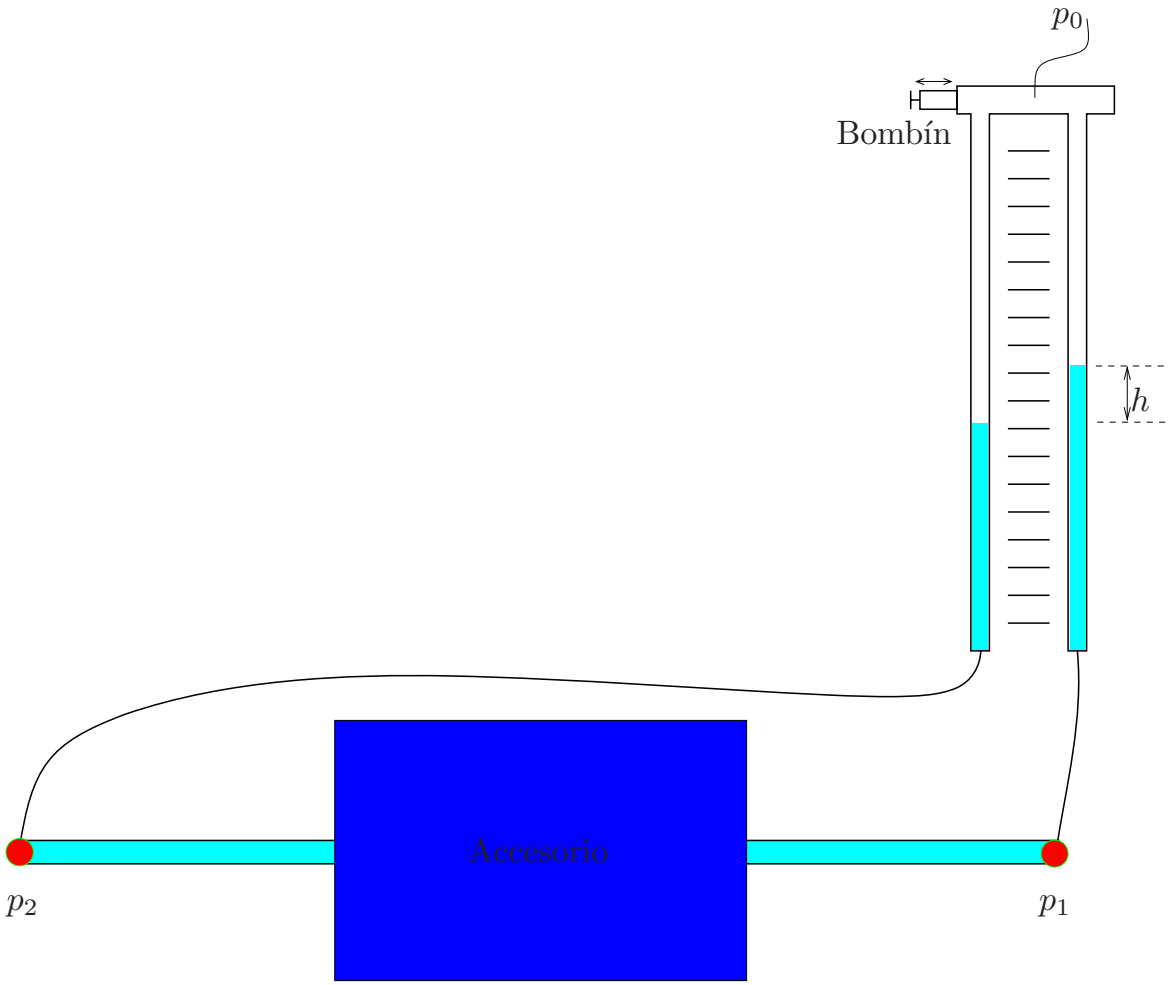


Figura 21.30: Manómetro diferencial.

uno de ellos sucesivamente sin perder demasiado tiempo. Así, se analizarán las pérdidas en diversos elementos (como una válvula, un tren de codos o una expansión brusca, entre otros) una vez que se intercalen en el circuito hidráulico justo en región dedicada a ello.

Realización de la práctica y presentación de resultados

Para conseguir el objetivo de la práctica de cuantificación de las pérdidas localizadas en diferentes accesorios, el estudiante calculará el coeficiente adimensional de pérdida de carga para tres caudales ligeramente diferentes, calculando para cada uno de ellos el coeficiente ζ y asignando a cada elemento analizado un valor promedio de los calculados, que fijará el coeficiente ζ para el rango de caudales considerado. En el caso de que el accesorio sea una válvula, se calculará el coeficiente ζ de la misma manera, pero para diferentes aperturas de la válvula y, por tanto, para caudales bien diferentes. En este caso, el coeficiente de pérdida localizada dependerá del caudal, pero en realidad cada diferente apertura de la válvula se puede considerar como un accesorio diferente.

A continuación se describen los pasos a seguir en la realización de la práctica:

1. Configurar el conjunto de válvulas para que el movimiento del fluido tenga lugar a través del tramo dedicado a colocar el accesorio;
2. Colocar el accesorio a analizar, así como habilitar el manómetro diferencial mediante la conexión de los dos conectores rápidos aguas arriba y aguas abajo del accesorio;
3. Poner en marcha la bomba centrífuga mediante el interruptor on/off situado en el cuadro de arranque de la parte superior derecha de la instalación. Tener presente que en el cuadro existe un botón de parada de emergencia que se deberá pulsar para detener instantáneamente el funcionamiento de la instalación en caso de necesidad;
4. Regular el caudal al deseado mediante la válvula de regulación;
5. Una vez estabilizado el caudal y transcurrido un cierto tiempo para dar por estabilizado el flujo por toda la instalación se medirá la diferencia de altura h en el manómetro diferencial. Esta labor puede requerir el ajuste de la presión p_0 mediante el uso del bombín disponible en el manómetro (ver figura 21.30);
6. Hacer las correspondientes anotaciones en la tabla del Anexo;
7. Repetir el proceso desde 4 para otro caudal;
8. Una vez analizados los tres caudales para un mismo accesorio, se detendrá el funcionamiento de la instalación, y se procederá desde 2 con un nuevo accesorio, si aún quedan por analizar. Si todos se han analizado, la práctica habrá terminado. En caso de que el accesorio a analizar sea la válvula, se entenderá que se trata de un accesorio diferente cuando se cambie la apertura de la misma.

Tras la realización de la prática, el estudiante deberá presentar la tabla adjunta en el Anexo con las medidas realizadas y los cálculos llevados a cabo para obtener el coeficiente adimensional de pérdida de carga medio, ζ_{medio}, de cada elemento analizado.

Anexo: Hoja de toma de datos

Densidad del fluido:

Accesorio	Q (l/h)	v (m/s)	h (mm)	$(\Delta p)_{loc}$	ζ

Resumen final, indicando el valor promedio del coeficiente de pérdida, ζ_{medio}:

Accesorio	ζ_{medio}

Bibliografía

D.J. ACHESON, 1990, *Elementary Fluid Mechanics* (Clarendon Press, Oxford).

R. ARIS, 1989, *Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics* (Dover, Nueva York; reimpresión).

G.K. BATCHELOR, 1967, *An Introduction to Fluid Dynamics* (Cambridge University Press, Cambridge).

R.B. BIRD, W. E. STEWART y E. LIGHTFOOT, 1960, *Transport Phenomena* (Wiley, Nueva York). Existe traducción castellana en la editorial Reverté.

D.E. BOURNE y P.C. KENDALL, 1992, *Vector analysis and cartesians tensors* (Chapman and Hall, Londres; tercera edición).

E. BUTKOV, 1968, *Mathematical Physics* (Addison-Wesley, Reading, Ma.).

A. CHORIN y J.E. MARSDEN, 1993, *A mathematical introduction to fluid mechanics* (Springer-Verlag, Nueva York; 3^a edición).

J.W. DAILY y D.R.F. HARLEMAN, 1975, *Dinámica de los fluidos* (Trillas, México; 2^a edición).

R. FERNÁNDEZ FERIA, 2005, *Mecánica de fluidos* (Universidad de Málaga, Málaga; 2^a edición).

R. FERNÁNDEZ FERIA, C. DEL PINO PEÑAS y J. ORTEGA CASANOVA, 2010, *Problemas resueltos de mecánica de fluidos* (Universidad de Málaga, Málaga; 2^a edición).

U. FRISCH, 1995, *Turbulence* (Cambridge University Press, Cambridge, U.K.).

S. GOLDSTEIN, 1969, *Fluid mechanics in the first half of this century* , Annual Review Fluid Mechanics **Vol. 1,** pp. 1-28.

R.A. GRANGER, 1995, *Fluid mechanics* (Dover, Nueva York; 2^a edición).

J. O. HIRSCHFELDER, C. F. CURTISS y R. B. BIRD, 1964, *Molecular Theory of Gases and Liquids* (John Wiley and Sons, Nueva York).

G. M. HOMSY et. al. (eds.), 2008, *Multimedia Fluid Mecahnics DVD-ROM* (Cambridge University Press, Cambridge, UK; 2^a edición).

I.E. IDELCHIK, 1986, *Handbook of hydraulic resistance* (Hemisphere, Nueva York; 2^a edición.).

P. K. KUNDU y I. M. COHEN, 2008, *Fluid Mechanics* (Academic Press, San Diego; 4^a edición).

H. LAMB, 1975, *Hydrodynamics* (Cambridge University Press, Cambridge; reimpresión de la 6^a edición).

L.D. LANDAU y E.M. LIFSHITZ, 1987, *Fluid Mechanics* (Pergamon Press, Oxford, 2^a edición; existe traducción española de la primera edición en la Ed. Reverté).

M. LESIEUR, 1993, *Turbulence in fluids* (Kluwer, Dordrecht; 2^a edición).

G. MILLÁN BARBANY, 1975, *Problemas matemáticos de la Mecánica de Fluidos. Estructura de las ondas de choque y combustión* (Real Academia de Ciencias, Madrid).

L.M. MILNE-THOMSON, 1996, *Theoretical hydrodynamics* (Dover, Nueva York; reimpresión de la 5^a edición).

A.S. MONIN y A. M. YAGLOM, 1971, 1975, *Statistical fluid mechanics I y II* (The MIT Press, Cambridge, Ma.).

J. PALACIOS, 1964, *Análisis dimensional* (Espasa-Calpe, Madrid).

M. RAHMAN y I. MULOLANI, 2008, *Applied vector analysis* (CRC Press; 2^a edición).

S.M. RICHARDSON, 1989, *Fluid Mechanics* (Hemisphere, Nueva York).

L. ROSENHEAD (editor), 1988, *Laminar Boundary Layer* (Dover, Nueva York; reimpresión).

D.E. ROSNER, 1986, *Transport Processes in Chemical Reacting Flow Systems* (Butterworth, Boston).

D.N. ROY, 1988, *Applied fluid mechanics* (Ellis Horwood, Chichester).

I.L. RYHMING, 1991, *Dynamique des fluides* (Presses Polytechniques Romandes, Lausana; 2^a edición).

H. SCHLICHTING, 1987 *Boundary Layer Theory* (McGraw-Hill, Nueva York; 7^a edición).

H. SCHLICHTING y K. GERSTEN, 2000, *Boundary Layer Theory* (Springer-Verlag, Berlín; 8^a edición).

L.J. SEDOV, 1959, *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics* (Academic, Nueva York).

L.A. SEGEL, 1987, *Mathematics Applied to Continuum Mechanics* (Dover, Nueva York; reimpresión).

H. TENNEKES y J.L. LUMLEY, 1972, *A first course in turbulence* (The MIT Press, Cambridge, Ma.).

J.M. WALLACE y P.V. HOBBS, 1977, *Atmospheric Science* (Academic, Nueva York).

F.M. WHITE, 2004, *Mecánica de Fluidos* (McGraw-Hill, Madrid; 5^a edición).

J. ZIEREP, 1971, *Similarity Laws and Modeling* (Marcel Dekker, Nueva York).