

## Simulación numérica de un modelo de tornado. Interacción del vórtice de Long con una superficie sólida.

Luis Parras Anguita y Ramón Fernández Feria

Universidad de Málaga. E.T.S. Ingenieros Industriales, 29013 Málaga  
Tel.: 952132082, Fax: 952132691, e-mail: ramon.fernandez@uma.es

### Resumen

En el presente trabajo se resuelven numéricamente las ecuaciones de Navier-Stokes para un flujo incompresible que simula la interacción de un torbellino intenso con una superficie sólida. Lejos del eje de giro y del 'suelo', el modelo consiste en una familia de soluciones de semejanza de las ecuaciones no viscosas de Euler. La viscosidad regulariza estas soluciones en el eje (el denominado vórtice de Long) y en el suelo mediante sendas familias de soluciones de semejanza de las ecuaciones en la aproximación de capa límite. Sin embargo, en las proximidades de la intersección del eje con el suelo las soluciones de semejanza no valen y hay que recurrir a la integración numérica de las ecuaciones completas para cerrar el problema. Esta simulación numérica demuestra que para Reynolds altos las únicas soluciones de la familia de vórtices de Long físicamente relevantes en este problema (compatibles con velocidad nula en la superficie sólida) son aquellas con velocidad en el eje dirigida hacia el suelo. Esta situación de 'doble celda', en donde el flujo en el ojo del tornado está dirigido hacia abajo dentro de un flujo principal hacia arriba, es la que se observa físicamente.

**Palabras Clave:** torbellinos intensos, simulación numérica, tornados, vortex breakdown.

### Abstract

We present here a numerical simulation of the incompressible Navier-Stokes equations for the interaction of a family of vortices with a solid surface. Far from the rotation axis and from the ground the model consists on a family of similarity solutions to the inviscid Euler equations. Viscosity regularizes these solutions both at the axis (Long's vortex) and at the ground through two sets of self-similar solutions to the viscous equations in the boundary layer approximation. However, these solutions are not valid near the intersection of the axis with the ground, so that the two sets of solutions are not fully connected. Numerical simulation of the complete Navier-Stokes equations for this effusing core flow shows that the only members of the family of Long's vortices (high Reynolds numbers) physically relevant in this problem (i.e., with vanishing velocity at the ground) are those with a downward flow at the axis. This is the typical 'two-cell' structure actually observed in tornadoes, which is here simulated with a relatively simple model.

**Keywords:** intense vortices, numerical simulation, tornadoes, vortex breakdown.

## 1. Introducción

La interacción de un torbellino intenso con una superficie sólida (por ejemplo el suelo) es un problema de interés tanto para entender la dinámica de los tornados y de otros vórtices atmosféricos, como la de algunos flujos de interés tecnológico (flujos en turbomáquinas, separadores ciclónicos, cámaras de combustión; torbellinos producidos

por el vuelo de los aviones, etc.). Por su espectacularidad, la estructura del flujo en un tornado es un problema que ha suscitado mucho interés, en particularidad su estructura de doble celda con el flujo en el 'ojo' dirigido en su mayor parte hacia abajo, y la posibilidad de que su formación sea debida a un fenómeno de *vortex breakdown* (ver, e.g., [1,2] y otras referencias dadas allí). Para estudiar este problema de la interacción de un torbellino intenso con el suelo, en este trabajo partimos de un conjunto de soluciones de semejanza de las ecuaciones no viscosas de Euler, cuyo campo de velocidad en coordenadas cilíndricas  $(r,\theta,z)$  tiene la forma  $v=(u,v,w)=V(y) r^{m-2}$ , donde  $y=r/z$ ,  $m$  es un número real entre 0 y 2, y las tres componentes del vector  $V$  se obtiene de la resolución de una única ecuación diferencial ordinaria [3]. Esta solución simula una familia muy general de torbellinos que, como toda solución no viscosa, en general no cumple la condición de contorno de no deslizamiento en el suelo ( $z=0$ ), y en el presente caso también es singular en el eje ( $r=0$ ). Para números de Reynolds altos, la regularización viscosa en el eje mediante ecuaciones parabólicas cerca de  $r=0$  da lugar a una familia de soluciones de semejanza [4], la más conocida de la cuales es el vórtice de Long [5], correspondiente a  $m=1$ , que será el único miembro de la familia considerado en este trabajo. Por otro lado, la capa límite en el plano también admite soluciones de semejanza, aunque en este caso de segunda especie [6]. Sin embargo, la conexión entre ambas familias de soluciones de semejanza (si es que existe) sólo se puede hacer mediante una simulación numérica de las ecuaciones completas de Navier-Stokes, ya que la subida del flujo desde el suelo hasta formar el vórtice intenso en el eje de simetría no puede ser aproximada por ecuaciones parabólicas. El objetivo principal de este trabajo es realizar estas simulaciones numéricas para el caso  $m=1$ . Además de proporcionar un modelo simple (sin convección natural) de la estructura de un flujo tipo tornado, los resultados permiten dilucidar cuáles de los miembros de la familia de vórtices de Long son compatibles con una condición de contorno sin deslizamiento en el suelo, cerrando así el problema (para  $m=1$ ) analizado en las referencias [3], [4] y [6]. El modelo presentado aquí representa un torbellino libre, sin la limitación de otras simulaciones numéricas de vórtices confinados en un cilindro que se han usado para analizar la estructura de un tornado (e.g. [2]). Además, a diferencia de otros modelos de torbellinos libres (e.g. [1]), los dados aquí, aunque simples por corresponder a un flujo

incompresible, son más realistas al constituir una solución rigurosa de las ecuaciones de Navier-Stokes (en el límite de número de Reynolds alto).

## 2. Formulación del problema y descripción del método numérico.

Se pretende resolver las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles y axilimétricas en el dominio  $0 < r < r_0$ ,  $0 < z < z_0$ , cuando el flujo entrante en  $r=r_0$  viene dado por la conjunción de la solución no viscosa más la de capa límite cerca del suelo de la familia de torbellinos mencionada anteriormente [3,6]. Las otras condiciones de contorno son: velocidad nula en el suelo ( $z=0$ ), simetría en el eje ( $r=0$ ) y derivadas axiales segundas nulas a la salida ( $z=z_0$ ). Dado que la solución de semejanza de segunda especie para la capa límite cerca del suelo introduce un radio característico irrelevante  $R$  [6], la primera dificultad que se plantea es encontrar unas magnitudes características en las que el problema adimensional dependa del mínimo número de parámetros; en particular, se busca que el problema esté gobernado por un único número de Reynolds que caracterice convenientemente tanto al flujo cerca del suelo como cerca del eje. Para ello se ha tomado un radio característico  $r_0 \ll R$ , y se ha elegido una altura característica  $z_0 = r_0 (r_0/R)^3$ . Con estos valores, y con la condición  $\Delta = r_0/z_0 \ll 1$ , se demuestra que los únicos parámetros que aparecen en el problema son  $m$ ,  $\Delta$ , el número de Reynolds  $Re = V_0 r_0 (r_0/R)^3 / \nu$  y el parámetro de giro  $L$ , donde la velocidad característica  $V_0$  es igual a  $W_0 r_0^{m-2} / m$  en la notación [3,4].  $L$  es el cociente entre la velocidad de giro y la velocidad axial en el borde exterior de la solución viscosa de semejanza cerca del eje [4]. Para el caso  $m=1$ , que corresponde al vórtice de Long cerca del eje, el valor relevante del parámetro de giro es  $L=2^{1/2}$ . Como, además,  $\Delta \ll 1$  (se tomará  $\Delta=0.1$ ; las simulaciones numéricas demuestran que el problema deja de depender apreciablemente de  $\Delta$  para valores de este orden o menores), el único parámetro que gobierna la estructura del flujo es este caso es  $Re$ , que está relacionado con el número de Reynolds  $Re_c$  definido en [6] para la capa límite cerca del suelo mediante  $Re = 2^{1/2} Re_c \Delta$ .

Para resolver el problema se ha utilizado la formulación función de corriente ( $\Psi$ )-circulación ( $\Gamma$ )-vorticidad ( $\eta$ ). En esta formulación, la ecuación de continuidad se satisface idénticamente, y las tres ecuaciones a resolver son dos ecuaciones de transporte (componentes circunferenciales de las ecuaciones de cantidad de movimiento y de la vorticidad) y una ecuación de Poisson para la función de corriente. Para la

resolución numérica de estas ecuaciones se ha hecho uso de una formulación en diferencias finitas de segundo orden sobre una malla no uniforme en la que los nodos en la dirección  $z$  están más concentrados cerca del suelo para poder ver los detalles de la capa límite. Aunque buscamos la solución estacionaria correspondiente al flujo de entrada radial para cada número de Reynolds seleccionado, esta búsqueda se hace resolviendo las ecuaciones de transporte no estacionarias desde una condición inicial. La evolución temporal de las ecuaciones de transporte se resuelve por un método predictor-corrector de segundo orden en el tiempo. Se comienza buscando la solución para un número de Reynolds pequeño, tomando como condición inicial la correspondiente al fluido en reposo. Para los sucesivos números de Reynolds se usa como condición inicial la solución estacionaria alcanzada con el Reynolds inmediatamente anterior. La complejidad numérica del problema hace que la simulación para los valores mayores de  $Re$  considerados necesite del orden de  $300 \times 30$  nodos para conseguir una precisión espacial aceptable, por lo que el tiempo computacional en una Silicon Origin 2000 llegó a ser del orden de una semana.

### 3. Resultados

Para los valores de los parámetros  $m=1$ ,  $L=2^{1/2}$  y  $\Delta=0.1$  antes indicados, se han resuelto numéricamente las ecuaciones para  $Re$  creciente en un dominio adimensional  $0 < r < 1$ ,  $0 < z < 3$ . Aquí se presentan los resultados para dos valores de  $Re$  significativos:  $Re=10$  y  $Re=35$ , siendo este último el mayor valor alcanzado hasta ahora. Las condiciones de contorno en  $r=1$  para estos dos casos se obtienen mediante la composición de la solución no viscosa [3] y la solución de capa límite en el suelo [6]. Se observa que los gradientes cerca del suelo son muy fuertes, especialmente para  $Re=35$ , que corresponde a un número de Reynolds de la capa límite en el plano  $Re_c \cong 248$ . Como consecuencia de ello, tanto el número de nodos como el tiempo de cálculo crecen de forma muy importante a medida que aumenta  $Re$ . Las soluciones estacionarias para estos dos valores de  $Re$  se representan en las Figuras 1 y 2 mediante los isocontornos de  $\Psi$ ,  $\Gamma$  y  $\Pi=r\eta$ . La diferencia principal entre estas dos figuras reside en la burbuja de recirculación que aparece en el eje (para  $z \cong 0.5$ ) en el caso de  $Re=35$ , la cual viene precedida por la formación de vorticidad negativa en el eje, de acuerdo con el criterio de Brown y López [7] sobre la aparición del fenómeno de *vortex breakdown*. Esta burbuja

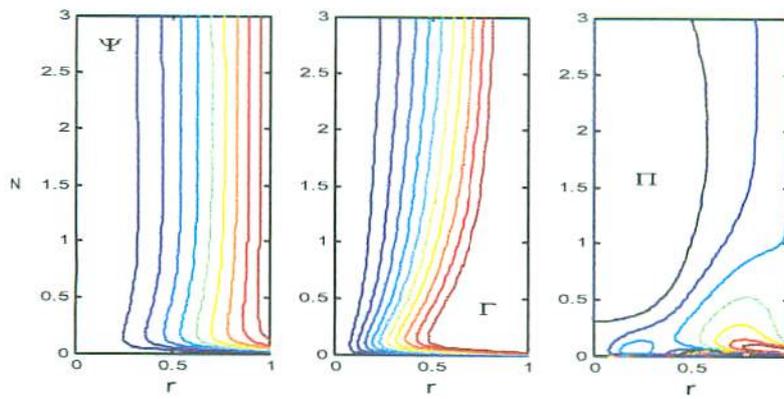


Figura 1. Isocontornos de  $\Psi$ ,  $\Gamma$ , y  $\Pi$  en la solución estacionaria para  $Re=10$ .

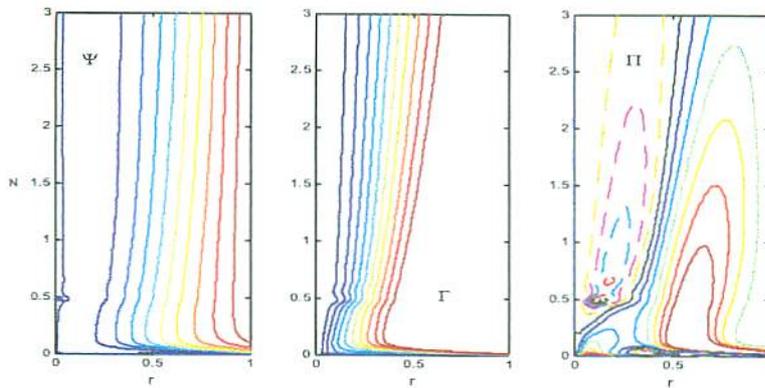


Figura 2. Isocontornos de  $\Psi$ ,  $\Gamma$ , y  $\Pi$  en la solución estacionaria para  $Re=35$ . Las líneas discontinuas corresponden a valores negativos.

de velocidad negativa en el eje se aprecia mejor en la Figura 3, donde se representa la velocidad axial ( $w$ ) en el eje. Para  $Re=35$  aparecen dos puntos de remanso que delimitan una pequeña región de velocidad negativa. Este fenómeno de la rotura de vórtice axial aparece por primera vez para  $Re \cong 34$ . Para números de Reynolds mayores, la burbuja va creciendo, se producen otras burbujas más arriba en el eje, hasta que eventualmente una sola burbuja se extiende a todo el eje por encima del primer punto de remanso de rotura del vórtice. Aunque no hemos llegado todavía a los números de Reynolds para los que se produce esta última situación, los presentes resultados indican que éste es el escenario que se debe dar para números de Reynolds grandes si la solución cerca del eje tiende, como corresponde, a la solución de semejanza de Long: El vórtice de Long tiene una velocidad axial en el eje que va como  $z^{-1}$  [4,5]. De acuerdo con la Figura 3, este comportamiento hiperbólico sólo se puede dar, una vez que  $w$  se ha hecho negativa, si la velocidad axial sigue siendo negativa para  $z$  grande. Por tanto, de acuerdo con los presentes resultados numéricos, los únicos miembros de la familia de vórtices de Long

que pueden ser compatibles con su interacción sin deslizamiento con una superficie sólida son aquellos con velocidad axial negativa en el eje (del tipo II; ver [4]).

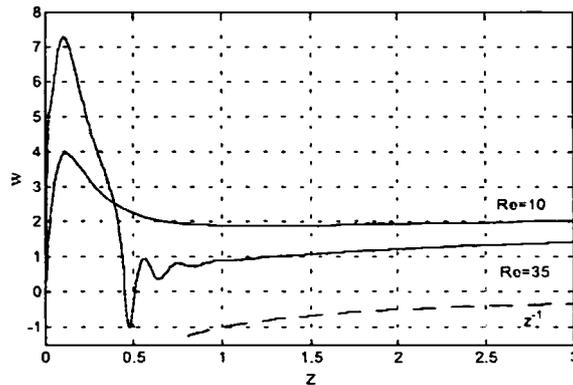


Figura 3. Velocidad axial en el eje en función de  $z$  para  $Re=10$  y  $Re=35$ . La línea discontinua corresponde al comportamiento de la solución de semejanza cerca del eje [4].

#### 4. Conclusiones

La simulación numérica de una familia de torbellinos que para números de Reynolds altos se corresponden cerca del eje con el vórtice de Long ha demostrado que por encima de un número de Reynolds ( $Re \cong 34$ ) se rompe el vórtice axial en el eje (*vortex breakdown*), produciéndose una burbuja con recirculación. Esta burbuja va creciendo de tamaño y se producen otras más a medida que  $Re$  crece. Se demuestra además que, para  $Re$  suficientemente alto, si el vórtice axial tiende al vórtice de Long tiene que ser del tipo II [4], con velocidad axial en el eje negativa. De esta manera, el presente trabajo discrimina entre las posibles soluciones de la familia de vórtices de Long en su interacción sin deslizamiento con un plano, indicando que el flujo en el eje tiene que ir dirigido hacia el plano, dentro de un flujo externo ascendente. Ésta es también la estructura del flujo que se observa experimentalmente en torbellinos intensos ( $Re$  alto) que interaccionan con una superficie sólida, como son los tornados [1,2].

#### 5. Referencias

1. G. Carrier, F.Fendell, J.Mitchel, M.Bronstein, *Physica D*, **77** (1994) 77-96.
2. R.Jefrey Trapp, *Month. Weather Rev.* **128** (2000) 888-895.
3. R.Fernández Fera, et al., *Q. Jl. Mech. Appl. Math*, **53** (1999) 1-53.
4. R.Fernández Fera, J.Fernández de la Mora, A.Barrero, *J. Fluid Mech.* **305** (1995) 77.
5. R.R.Long, *J. Fluid Mech.* **11** (1961) 611-625.
6. R.Fernández Fera, J.C.Arrese, *Q. Jl.Mech.Appl.Math*, **53** (2000) 609-628.
7. G.L.Brown, J.M.López, *J. Fluid Mech.* **221** (1990) 553-576.