**Universidad de Málaga**

Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales

Dpto. de Ingeniería Mecánica y Mecánica de Fluidos

Área de Mecánica de Fluidos

Tesis Doctoral

# ESTUDIO TEÓRICO Y EXPERIMENTAL DE LA ESTABILIDAD Y ROTURA DE VÓRTICES EN CONDUCTOS.

Realizada por
**Carlos del Pino Peñas**

Dirigida por
**Dr. Ramón Fernández Feria**
Catedrático de Mecánica de Fluidos

Málaga, Enero de 2004

## Agradecimientos

Agradecer de manera especial el apoyo incondicional y el cariño que he recibido de mis padres Joaquín y Ana. Sin ellos, sin su aliento y su comprensión, este documento no hubiese existido.

Al profesor Dr. Ramón Fernández Feria, director de esta tesis, su confianza y apoyo a lo largo de estos años, su dedicación para la elaboración de este trabajo y los grandes esfuerzos para completar y complementar mi formación como investigador y docente.

Al profesor Dr. Joaquín Ortega Casanova, por su amistad y por sus aclaraciones en los numerosos momentos en los que la tarea numérica se complicaba.

Al profesor Dr. Enrique Sanmiguel Rojas, por su más que notable punto de vista intelectual sobre los problemas físicos y convivencia durante estos años.

Al Dr. Tom Mullin, por su visión experimental de los problemas de la Mecánica de Fluidos y palabras de aliento en numerosas ocasiones.

Agradecer el importante estímulo recibido por parte de mis hermanos (Balbina, Joaquín, Adolfo y Victor) y cónyuges para iniciar mi carrera como científico.

A Juan de Dios y Adoración, por los infinitos consejos que de ellos he recibido.

A D. Francisco Cornejo Fernández, por transmitirme sus conocimientos ingenieriles, prácticos y humanos a la hora de afrontar los problemas en numerosas ocasiones.

A D. Jorge Muñoz Estrada por los inolvidables momentos de convivencia durante mis estudios de ingeniería y doctorado.

A D. Luis Parras y D. Juan Francisco Navarro por su disposición para ayudarme en cualquier momento.

A los integrantes del grupo de investigación del Centro de Dinámica no Lineal de la Universidad de Manchester, especialmente al Dr Piers Treatcher, Pedro Reis y al Dr Nick Roberts, por los inolvidables dias pasados en mis breves estancias en Inglaterra.

A los técnicos de taller Juan Antonio Bascuñana, Jesús del Caz y Francisco Rivera Román por su ayuda en la fabricación de las piezas que constituyen el experimento.

A la Junta de Andalucía, la Universidad de Málaga y el Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, su financiación durante estos años.

A todas aquellas personas y amigos que me han formado como persona y como ingeniero. A todos ellos, gracias.

Y por último agradecer las infinitas demostraciones de cariño y apoyo de una persona especial. Lucía, gracias, de todo corazón.

# Índice general

# Capítulo 1

# Introducción

## 1.1. Preliminares. Inestabilidades y rotura de vórtices en flujos con giro en conductos.

El presente trabajo constituye una contribución al estudio de los flujos con giro en conductos. Este estudio se realiza desde un punto de vista teórico, mediante la simulación numérica axilsimétrica y el análisis de la estabilidad espacial y, desde el punto de vista experimental, gracias al montaje que se ha realizado en el laboratorio. Se tratará de profundizar en la posible relación entre el fenómeno de la rotura de vórtices (que denotaremos de ahora en adelante como **RV**) y las inestabilidades hidrodinámicas de un flujo con giro intenso en conductos, ya sean de sección constante o variable.

El fenómeno de **RV** es un problema de gran interés tanto teórico como tecnológico en la dinámica de fluidos y ha sido objeto de diversas recopilaciones en la últimas décadas [Hall (1972), Leibovich (1978), Escudier (1988), Delery (1997), Wang y Rusak (1997), entre otros]. Con relación al flujo con giro en conductos, la formación de la región de recirculación tras la **RV** tiene un interés práctico desde el punto de vista ingenieril, más concretamente en el campo de la Ingeniería Química, pues en procesos tales como los reactores químicos y las cámaras de combustión se procura favorecer la mezcla del fluido.

### 1.1.1. Estabilidad y rotura de vórtices en conductos.

En los últimos años se ha avanzado considerablemente en el conocimiento de los flujos con giro intenso o vórtices. En particular, son muchos los que han analizado la relación entre la estabilidad de estos flujos con el fenómeno de la rotura de vórtices (véase, por ejemplo, entre otros los trabajos de Gelfgat, 1996; Fernández Feria, 1996, 1999; Wang y Rusak, 1996a, 1996b, 1997; Delbende *et al.*, 1998 y Loiseleux *et al.*, 2000). En este trabajo se va a intentar profundizar en esta relación y para ello se ha elegido el flujo dentro de un conducto. El motivo es que, a diferencia de chorros o de otros vórtices no confinados, es relativamente más fácil de implementar experimentalmente y de hacer una comparación precisa entre los resultados experimentales y la simulación numérica.

La estabilidad lineal de un flujo en un conducto con rotación como sólido rígido es bien conocida (Pedley, 1968, 1969; Mackrodt, 1976, Cotton y Salwen 1981, entre otros). Existen, además, otros trabajos que analizan la estabilidad no lineal de las perturbaciones finitas no axilsimétricas en este tipo de flujos con rotación (Akylas *et al.*, 1984 y Toplosky *et al.*, 1987). Estos estudios numéricos encuentran que, para un gradiente de presión fijo en la dirección axial, el flujo espiral inducido por estas ondas deriva en una reducción significativa del flujo másico, de hasta más el 40-50 % en algunos casos.

Aunque aspectos importantes de la **RV** en un conducto puedan ser descritos en ausencia de viscosidad, otros aspectos, principalmente relacionados con la evolución del flujo hasta llegar a las condiciones que permitan su rotura y, por tanto, relacionados con la estabilidad del flujo, dependen esencialmente de la viscosidad. Por consiguiente, una de las tareas más importantes que aborda esta tesis es el desarrollo de técnicas que permitan analizar la estabilidad de flujos en conductos, ya sean de sección constante o variable, teniendo en cuenta la variación axial del flujo viscoso que resulta de la simulación numérica axilsimétrica. Trabajos previos de chorros con giro han demostrado que, cuando se produce la **RV**, el flujo suele ser absolutamente inestable [Delbende, 1998; Fernández Feria, 1999, Olendraru, 2002, 2003 y Ruith, 2003, entre otros], lo que cualitativamente concuerda con la teoría de *transición* de Benjamin (1962), según el cual el flujo pasa de un estado *supercrítico* (inestabilidad convectiva) a otro *subcrítico* (inestabilidad absoluta) tras el fenómeno de rotura. En flujos con variación axial, donde uno se ve obligado a realizar un análisis espacial de estabilidad, no es fácil detectar la aparición de una inestabilidad absoluta. Por este motivo se abordó en primer lugar la estabilidad espacial de un flujo con giro sin variación axial (Fernández Feria y del Pino, 2002) y, además de identificar todas las inestabilidades convectivas obtenidas con resultados previos de análisis temporales de estabilidad (ver, por ejemplo, Mackrodt, 1976), se encontró un procedimiento para aplicar de una forma sencilla el criterio de Briggs y Bers (Huerre y Monkewitz, 1990 y

Huerre y Rossi, 1998) dentro de un esquema espacial de estabilidad. Este procedimiento se generalizó posteriormente a flujos con giro y con variación axial dentro de un conducto de sección uniforme (del Pino, Ortega Casanova y Fernández Feria, 2003). Utilizando una técnica *PSE* (del inglés, *Parabolized Stability Equations*) para tener en cuenta la influencia de la variación axial en la estabilidad, se obtienen resultados que concuerdan muy bien con los resultados experimentales obtenidos por otros investigadores (Imao *et al.*, 1992). Finalmente, se aplica todo esta experiencia generada al análisis de la estabilidad espacial en un conducto de sección variable y, concretamente, a la geometría variable con variación axial del montaje experimental, permitiendo la validación con medidas experimentales.

### 1.1.2. Experimentos relacionados con los flujos con giro y la RV en conductos.

La otra componente importante de esta tesis ha sido la realización de un experimento capaz de producir un flujo con giro intenso en el interior de un conducto que sea relativamente fácil de simular numéricamente. Son pocos los experimentos previos en los que se produce la **RV** en un conducto. Caben destacar los realizados por Sarpkaya (1971, 1974), en los que se logra visualizar el *vortex breakdown* con toda la variedad tipológica en la que se presenta, clasificándose en tres grandes grupos denominados burbuja, espiral y doble hélice. Es en estos experimentos donde se ha realizado una más que notable descripción cualitativa del comportamiento del flujo y las condiciones en las que aparecen los cambios asociados a la **RV**. Otro experimento reciente que merece ser mencionado, y que está relacionado con los de Sarpkaya debido a que se usa una configuración geométrica similar, es el de Mattner *et al.* (2002). En él se realiza un estudio más exhaustivo sobre la formación de la **RV** al comparar perfiles medidos con los resultados de la simulación numérica, además de visualizar roturas para distintos parámetros de giro. La aparición de la **RV** se produce para un determinado giro crítico y se asocia a una transformación de un flujo tipo estela que se decelera hasta que aparece un punto de remanso.

Dentro de los relativamente escasos trabajos en los que se comparan resultados numéricos y experimentales de la **RV** en conductos se debe destacar el de Darmofal (1995). En él las distribuciones de la velocidad axial se equiparaban a los valores experimentales de una forma más que razonable. Sin embargo, cuando se comparan perfiles de la velocidad radial con giro intenso, aguas abajo de la rotura, comienzan a aparecer discrepancias acusadas con respecto a la simulación axilsimétrica. No obstante, la tendencia general del flujo es similar a la solución axilsimétrica.

Otra serie de experimentos notables son los realizados por Imao *et al.* (1992) en un conducto de sección uniforme que puede girar de forma controlada y en el que se introduce un perfil de velocidad axial uniforme. De las observaciones experimentales se caracterizan de una forma cuantitativa las frecuencias y las longitudes de las ondas que inestabilizan al flujo para distintos valores del parámetro de giro.

En nuestro caso, hemos querido generar un flujo con giro en el interior de un conducto de sección uniforme cuyas paredes no giran, que constituye la zona de visualización y medida. Para ello, se ha dispuesto de un montaje experimental en el que la componente azimutal se genera mediante el giro de un cuerpo central de geometría conocida aguas arriba del conducto de sección constante. Con este montaje se realizarán tres estudios bien diferenciados. El primero de ellos es la simulación numérica axilsimétrica. Ésta reproduce fielmente la geometría variable y se ha realizado con la ayuda del código numérico ya desarrollado por Ortega Casanova (2000). En segundo lugar, se ha desarrollado un código bastante general que permite analizar la estabilidad espacial no paralela de cualquier flujo axilsimétrico, en concreto la del experimento. Por último, se ha obtenido información del experimento de forma cualitativa, mediante la visualización con fluoreceína disuelta en el fluido y, de forma cuantitativa, mediante anemometría láser Doppler.

## 1.2. Descripción de los contenidos de la tesis.

En el capítulo 2 se realiza un estudio general de la estabilidad espacial del flujo desarrollado de Hagen-Poiseuille con giro como sólido rígido en un conducto con sección constante. Con este ejemplo se pretende introducir y discutir el análisis de estabilidad empleado para caracterizar las inestabilidades tanto convectivas como absolutas. Asimismo, se formula el análisis de estabilidad no paralela mediante la técnica *PSE* y se contrastan los resultados de este estudio de estabilidad espacial con los experimentos de Imao *et al.* (1992).

El montaje experimental se describe en el capítulo 3. En él se detallan las distintas partes que constituyen el aparato generador de flujos con giro y todos los aspectos relacionados con la geometría y funcionalidad de las piezas que lo engloban. Para completar ese capítulo, se comentan las técnicas experimentales con las que se adquiere información cualitativa y cuantitativa del flujo.

En el capítulo 4 se introduce brevemente la simulación de un flujo viscoso en un conducto de sección variable basado en un código numérico ya desarrollado en el Departamento de Mecánica de Fluidos que ha sido modificado básicamente con dos herramientas numéricas (Sanmiguel Rojas, 2002). Con la primera de ellas se consigue una mejora en el mallado al evitar el uso de funciones compresión y, en consecuencia, se obtiene una disminución del error en aquellas regiones más críticas, mientras que con la segunda ha sido posible una reducción de la capacidad de memoria necesaria en la ejecución del código numérico gracias a una técnica de direcciones alternativas. También se incluyen en este capítulo las ecuaciones y las técnicas numéricas para el estudio del análisis de estabilidad espacial de un flujo axilsimétrico general, incluyendo los efectos de la viscosidad y la variación axial. Con este código se analizará la estabilidad del flujo con giro resultante de la simulación axilsimétrica.

La comparación de los resultados cuantitativos y cualitativos del montaje experimental descrito en el capítulo 3 y los de las simulaciones axilsimétricas mostradas en el capítulo 4 se resumen en el capítulo 5. Se discuten los perfiles de velocidad cuantitativos obtenidos para distintos valores del parámetro de giro y se analizan, los resultados experimentales a la luz del estudio de la estabilidad espacial.

Para finalizar, en el sexto capítulo, se presentan las conclusiones más destacadas de este trabajo y se comentan futuras líneas de investigación directamente relacionadas con el mismo.

# Capítulo 2

# Estudio de la estabilidad espacial en un conducto uniforme.

## 2.1. Introducción.

El presente capítulo consta de dos estudios de estabilidad espacial. En un primer lugar, se realiza un estudio de estabilidad lineal espacial de un flujo de Hagen-Poseuille con una rotación como sólido rígido totalmente desarrollado, basado en un método espectral de colocación y en la resolución de un sistema de ecuaciones no lineales para el autovalor teniendo en cuenta distintos valores del número de Reynolds, el parámetro de giro y frecuencia de las perturbaciones. Este análisis previo se ha realizado con tres fines: en primer lugar, se realiza un estudio de estabilidad espacial dada su importancia desde un punto de vista experimental; en segundo lugar, y gracias a este estudio, se ha encontrado una herramienta sencilla con la finalidad de conocer el paso de la inestabilidad convectiva a inestabilidad absoluta y, por último, se puede obtener una condición inicial para el método *PSE*. Una vez estudiado el caso de la estabilidad lineal para un flujo sin variación axial, se ha aplicado esta herramienta al análisis de la estabilidad espacial a un flujo con variación axial mediante la técnica *PSE*, aplicándose en concreto a un experimento de interés como es el flujo desarrollándose en un conducto de sección constante con la pared girando con una determinada velocidad de giro. Esta sección finaliza con la comparación de los resultados de la estabilidad lineal casi paralela, y los resultados que tienen en cuenta la variación axial de las perturbaciones (análisis no paralelo), con los resultados experimentales obtenidos por Imao *et al.* (1992).

## 2.2. Estabilidad de un flujo de Poiseuille con rotación como sólido rígido sin variación axial.

Pedley (1968, 1969) demostró que el flujo de Poiseuille, sometido a una alta rotación sobre el eje del conducto, se hace inestable para perturbaciones no axilsimétricas. El análisis de estabilidad temporal, no viscoso y viscoso, se extendió posteriormente para contemplar todos los parámetros: número de Reynolds ($Re$), parámetro de giro ($L$) (inverso del número de Rosby; se dará una definición precisa de estos parámetros más adelante), número de onda azimutal ($n$) y el número de onda axial ($\alpha$). Entre los numerosos estudios cabe mencionar a Maslowe (1974), Mackrodt (1976), Cotton y Salwen (1981) y Maslowe y Stewartson (1982). En el presente apartado se estudia el problema de la estabilidad espacial, donde una perturbación impuesta en una determinada coordenada del eje axial crece o decrece a lo largo del mismo. Se considerarán perturbaciones axilsimétricas y no axilsimétricas. Al igual que en el análisis de estabilidad temporal, se muestra que el flujo es estable para cualquier perturbación axilsimétrica y es inestable para las perturbaciones no axilsimétricas en una región extensa del plano ($Re$, $L$), siendo $n$=-1 el primer número de onda azimutal que hace inestable el flujo a medida que aumenta $Re$ y $L$. De hecho, tal y como ya apuntaron Cotton y Salwen (1981), las curvas de estabilidad neutras coinciden en los casos de la estabilidad espacial y temporal. Sin embargo, desde un punto de vista experimental, el análisis de estabilidad espacial es mucho más interesante, y gracias al mismo se pueden conocer las frecuencias que fuerzan al flujo a ser más inestable para cada $n$, $Re$ y $L$. En particular, para cada valor de $L$ mayor que cero (es conocido que un flujo de Hagen-Poiseuille sin rotación, $L$=0, tiene un comportamiento estable para cualquier perturbación infinitesimal; ver, por ejemplo, el trabajo de Salwen y Grosch, 1972 y el de Garg y Rouleau, 1972), el análisis aporta la frecuencia $\omega_c$ para la cual el flujo se vuelve inestable cuando el número de Reynolds aumenta por encima de una valor crítico $Re_c(L)$. Se demuestra que para un $Re > Re_c$ el flujo es en primer lugar inestable convectivamente, y se caracteriza porque los paquetes de onda correspondientes a la frecuencia considerada viajan con un factor de crecimiento de las perturbaciones positivo y con una velocidad de grupo también mayor que cero, si bien la velocidad de fase puede ser positiva o negativa, dependiendo del $Re$, $L$ y $\omega$. Cuando el número de Reynolds aumenta considerablemente, la parte real de la velocidad de grupo correspondiente a las frecuencias más inestables disminuye hasta que se anula para un segundo número de Reynolds crítico [$Re_a(L) > Re_c(L)$]. Esta situación, que para $n$=-1 sólo ocurre si

$L > L^* \cong 0{,}38$, marca el inicio de la inestabilidad absoluta de acuerdo con el criterio de Briggs-Bers (Huerre y Monkewitz, 1990 y Huerre y Rossi, 1998). Para $Re > Re_a$, los modos inestables con velocidades de grupo positivas y negativas coexisten y el presente análisis de estabilidad espacial deja de tener sentido.

Existen, a su vez, trabajos recientes que tratan de explicar la transición convectiva-absoluta en flujos tipo chorro (o estela) con giro. Por ejemplo, los trabajos relacionados con los modelos de vórtices de Batchelor, entre los que destacan Delbende *et al.* (1998), Loiseleux *et al.* (1998, 2000), Lim y Redekopp (1998), Olendraru *et al.* (1999), y Yin *et al.* (2000). Este tipo de flujos es bastante diferente al considerado en este apartado. Todos tienen en común que la inestabilidad absoluta se asocia normalmente a perfiles de velocidad axial tipo estela. Esto añade relevancia a los resultados aquí encontrados pues por primera vez se encuentra que un flujo con velocidad axial toda ella positiva (Poiseuille) tiene una transición de inestabilidad convectiva a absoluta, ocurriendo además para un valor del parámetro de giro relativamente bajo.

### 2.2.1. Formulación del problema.

El flujo básico considerado aquí es el de Hagen-Poiseuille en un conducto de radio $R$ superpuesto a una rotación como sólido rígido. En coordenadas cilíndricas ($r$, $\theta$, $z$), donde $z$ es la coordenada axial a lo largo del conducto, el campo de velocidad viene dado por

$$[U, V, W] = \left[0, LW_0 y, W_0(1 - y^2)\right], \tag{2.1}$$

donde

$$y = \frac{r}{R}; \tag{2.2}$$

$W_0$ es la velocidad axial máxima en el eje y $L$ es el parámetro de giro,

$$L = \frac{\Omega R}{W_0}, \tag{2.3}$$

con $\Omega$ la velocidad angular de rotación. El otro parámetro adimensional que gobierna el problema es el número de Reynolds

$$Re = \frac{W_0 R}{\nu}, \tag{2.4}$$

donde $\nu$ es la viscosidad cinemática. Para realizar la comparación con trabajos previos relacionados con la estabilidad temporal es conveniente usar también el número de Reynolds para el flujo azimutal $Re_\theta = ReL$, en lugar de $L$.

Para analizar la estabilidad lineal del flujo base, las variables del campo de velocidad y la presión se descomponen en una parte principal ($U, V, W$ y $P$) y en unas pequeñas perturbaciones:

$$u = U + W_0 \bar{u}, \tag{2.5}$$

$$v = V + W_0 \bar{v}, \tag{2.6}$$

$$w = W + W_0 \bar{w}, \tag{2.7}$$

$$\frac{p}{\rho} = \frac{1}{2} r^2 \Omega^2 + W_0^2 \bar{p}. \tag{2.8}$$

Las perturbaciones adimensionales,

$$s \equiv [\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{p}]^T, \tag{2.9}$$

se descomponen en modos normales de la forma

$$\mathbf{s} = \mathbf{S}(y) e^{ax + in\theta - i\bar{\omega}\tau}. \tag{2.10}$$

En esta expresión, $i = \sqrt{-1}$, $\tau = \frac{W_0 t}{R}$ y

$$x = \frac{z}{R} \tag{2.11}$$

son el tiempo adimensional y la coordenada adimensional en la dirección axial, respectivamente, $n$ es el número de onda azimutal y

$$\bar{\omega} = \frac{\hat{\omega} R}{W_0}, \tag{2.12}$$

es la frecuencia compleja adimensional de las perturbaciones ($\hat{\omega}$ es la frecuencia dimensional); por último,

$$a \equiv ik \equiv i\hat{k}R = \gamma + i\alpha \tag{2.13}$$

es el número de onda complejo axial no dimensional, donde la parte real $\gamma$ es la velocidad de crecimiento (*growth rate*) de las perturbaciones y la parte imaginaria $\alpha$ es el número de onda axial adimensional. Por último, la amplitud compleja $\mathbf{S}$ se escribe como

$$\mathbf{S}(y) = \begin{pmatrix} F(y) \\ G(y) \\ H(y) \\ \Pi(y) \end{pmatrix} . \tag{2.14}$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.10)-(2.14) en las ecuaciones de Navier-Stokes para un flujo incompresible y despreciando los términos de segundo orden para las perturbaciones, se obtiene una ecuación lineal para $\mathbf{S}$:

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} = 0\,, \tag{2.15}$$

donde la matriz $\mathbf{L}$ viene dada por

$$\mathbf{L} \equiv L_1 + aL_2 + \frac{1}{Re}L_3 + a^2\frac{1}{Re}L_4\,, \tag{2.16}$$

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 + y\frac{d}{dy} & in & 0 & 0 \\ i(nL - \bar{\omega})y & -2Ly & 0 & y\frac{d}{dy} \\ 2Ly & i(nL - \bar{\omega})y & 0 & in \\ -2y^2 & 0 & i(nL - \bar{\omega})y & 0 \end{pmatrix} , \tag{2.17}$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & y & 0 \\ y(1-y^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y(1-y^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y(1-y^2) & y \end{pmatrix} , L_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -y & 0 \end{pmatrix} , \tag{2.18}$$

$$L_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -D_y + \frac{n^2+1}{y} & \frac{2in}{y} & 0 & 0 \\ -\frac{2in}{y} & -D_y + \frac{n^2+1}{y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -D_y + \frac{n^2}{y} & 0 \end{pmatrix} , \tag{2.19}$$

con

$$D_y \equiv \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d}{dy}\,. \tag{2.20}$$

Esta ecuación debe ser resuelta con las condiciones de contorno en el eje ($y$=0) relacionadas con la simetría en el flujo,[1]

$$F(0) = G(0) = 0,\ \frac{dH}{dy} = 0,\ (n = 0)\,, \tag{2.21}$$

$$F(0) \pm iG(0) = 0,\ \frac{dF(0)}{dy} = 0,\ H(0) = 0, (n = \pm 1)\,, \tag{2.22}$$

$$F(0) = G(0) = H(0) = 0,\ (|n| > 1)\,, \tag{2.23}$$

y la condición de contorno en la pared ($y$=1) correspondiente a la velocidad nula,

$$F(1) = G(1) = H(1) = 0,\ (|n| \geq 0)\,. \tag{2.24}$$

En el análisis de estabilidad espacial que se estudia aquí, para un valor real de la frecuencia ($\bar{\omega} = \omega_r$) y los valores dados de $Re, L$ y $n$, el sistema de ecuaciones (2.15)-(2.24) constituye un problema de autovalores no lineal con autovalor complejo $a$. El flujo se considera inestable cuando la perturbación crece con $z$, es decir, cuando la parte real del autovalor, $\gamma$, es mayor que cero.

### 2.2.2. El método numérico.

Para la resolución numérica del problema (2.15)-(2.24) se utiliza el método espectral de colocación, que permite soluciones muy precisas con pocos nodos en la coordenada $y$ (ver, por ejemplo, Canuto *et al.*, 1987). En particular, **S** se discretiza usando el método de colocación espectral de Chebyshev desarrollado por Khorrami (1991), donde las tres componentes de la velocidad y las tres ecuaciones de cantidad de movimiento se discretizan mediante un mallado de colocación donde la presión y la ecuación de continuidad se ubican en los puntos intermedios del mallado. Este método tiene la ventaja de eliminar

[1] Ver, por ejemplo, Batchelor y Gill (1962)

la necesidad de dos condiciones de presión en los contornos que no se incluyen en (2.21)-(2.24). Para implementar el método numérico espectral, (2.15) se discretiza con una expansión de **S** en polinomios de Chebyshev. El intervalo $0 \leq$y$\leq 1$ se transforma en el dominio de los polinomios de Chebyshev, $-1 \leq$s$\leq 1$, mediante la transformación lineal $y = (s+1)/2$. Ésta permite concentrar los nodos de colocación en el eje y la pared del conducto. El dominio radial se discretiza en $N$ puntos, siendo éste el número de polinomios de Chebyshev en los cuales se ha expandido **S**. La mayoría de los cálculos efectuados se han realizado con un $N$ entre 40 y 50, suficiente para obtener los autovalores con al menos 12 dígitos significativos. Con esta discretización el sistema de ecuaciones (2.15)-(2.24) se convierte en un problema de autovalores no lineal, que se ha resuelto mediante el método de la matriz compañera descrito por Bridges & Morris (1984). El problema de autovalores lineal resultante se resuelve con doble precisión mediante un código FORTRAN que emplea la librería *IMSL* (del inglés, *International Mathematics and Statistic Libraries*, ver detalles en *IMSL*, *Math/Library FORTRAN*, *Subroutines for mathematical applications*, 1994) y, en particular, la subrutina DGVCCG que da como resultados los autovalores y autovectores del problema propuesto. Los autovalores espúreos se desechan por comparación del espectro calculado con un número $N$ creciente de puntos de colocación.

### 2.2.3. Resultados de la estabilidad espacial y comparación con trabajos previos.

Para valores reales de $\omega$, las ecuaciones que gobiernan la estabilidad tienen la propiedad de simetría $a(\omega; n; Re; L) \mapsto a^*(-\omega; -n; Re; L)$, donde el asterisco indica el complejo conjugado. Por consiguiente, si uno permite los valores positivos y negativos de la frecuencia $\omega$, sólo los casos no positivos (o no negativos) del número de onda $n$ tienen que ser considerados. En el presente trabajo, se asumirá que $n \leq 0$. Los modos espaciales con $\omega < 0$, $n < 0$, y el autovalor $a = \gamma + i\alpha$ (para unos valores dados de $Re$ y $L$) se corresponden físicamente a los modos espaciales de frecuencia positiva $-\omega$, al número de onda azimutal $-n$, al número de onda axial $-\alpha$, y a la misma velocidad de crecimiento $\gamma$.

Para validar la tolerancia de los resultados numéricos, se ha comprobado en primer lugar con los resultados de la estabilidad espacial de Garg y Rouleau (1972) para un flujo de Poiseuille en un conducto sin giro ($L = 0$), que fueron obtenidos por estos autores mediante un método numérico de diferencias finitas. Hemos corroborado que los autovalores coinciden con los dados por estos autores en 11 cifras significativas para $n = 0$ y 9 cifras para $n = 1$. La misma concordancia en los resultados se obtiene con los de Khorrami *et al.* (1989) para el mismo problema de $L = 0$.

Para $L > 0$ y los parámetros ya mencionados que gobiernan nuestro problema, se ha buscado el autovalor menos estable de los modos espaciales en la propagación de $z$ creciente. Así, para cada $L > 0$, $Re > 0$, $n \leq 0$ y los valores positivos, negativos y nulos de la frecuencia $\omega$, se ha buscado el autovalor con mayor parte real $\gamma$ correspondiente al modo con una velocidad de grupo positiva, que en su forma adimensional viene dada por

$$c_g \equiv \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \,. \tag{2.25}$$

Si $\gamma < 0$, la amplitud del paquete de ondas que se corresponde con la frecuencia de forzamiento $\omega$, que se mueve aguas abajo con una velocidad de grupo positiva ($c_g > 0$), decrecerá con $z$ y el flujo será estable. Por el contrario, una perturbación con velocidad de crecimiento mayor que cero ($\gamma > 0$), con velocidad de grupo positiva ($c_g > 0$) se corresponde a un flujo convectivamente inestable, pues la amplitud de esa perturbación crece aguas abajo de la fuente con frecuencia forzada $\omega$, pero el flujo vuelve a su estado original cuando cesa dicha perturbación y el paquete de ondas sale del mismo.

Para el caso de las perturbaciones axilsimétricas ($n = 0$), se encuentra que el flujo es espacialmente estable para cualquier valor de los parámetros $Re$ y $L$, así como $\omega$, lo que confirma los resultados de los trabajos previos de estabilidad temporal. La figura 2.1 muestra los contornos de la velocidad de crecimiento y el número de onda axial en el plano $(L, \omega)$ para los modos menos estables con $n = 0$ y $Re = 1000$ (debido a la propiedad de simetría mencionada anteriormente, sólo los casos $\omega > 0$ se consideran para $n = 0$). La velocidad de crecimiento $\gamma$ es siempre negativa, siendo las perturbaciones menos estables aquellas en las que $\omega \to 0$, las cuales se asocian a $\alpha \to 0$ (límite de longitud de onda axial grande), a medida que $L$ crece. Como se muestra en la figura 2.2 para $Re = 1000$ y $\omega = 0{,}01$, el flujo tiende a ser neutralmente estable ($\gamma$=0) para perturbaciones axilsimétricas a medida que el parámetro de giro se incrementa gradualmente hasta infinito.

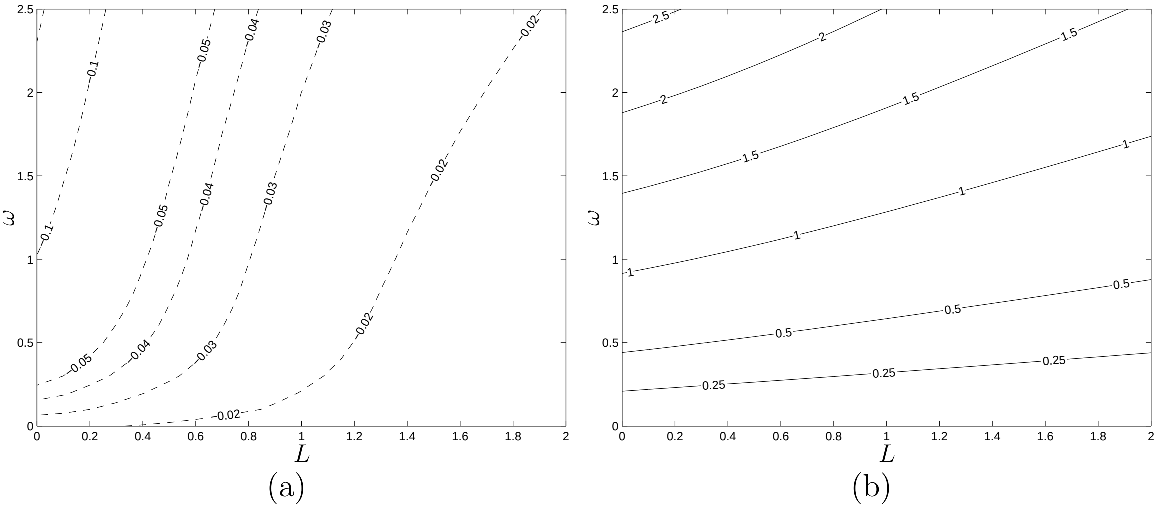



Figura 2.1: Contornos en el plano ($L$,$\omega$) de $\gamma$ (a) y de $\alpha$ (b) constantes para el modo axilsimétrico ($n$=0) y $Re$=1000.

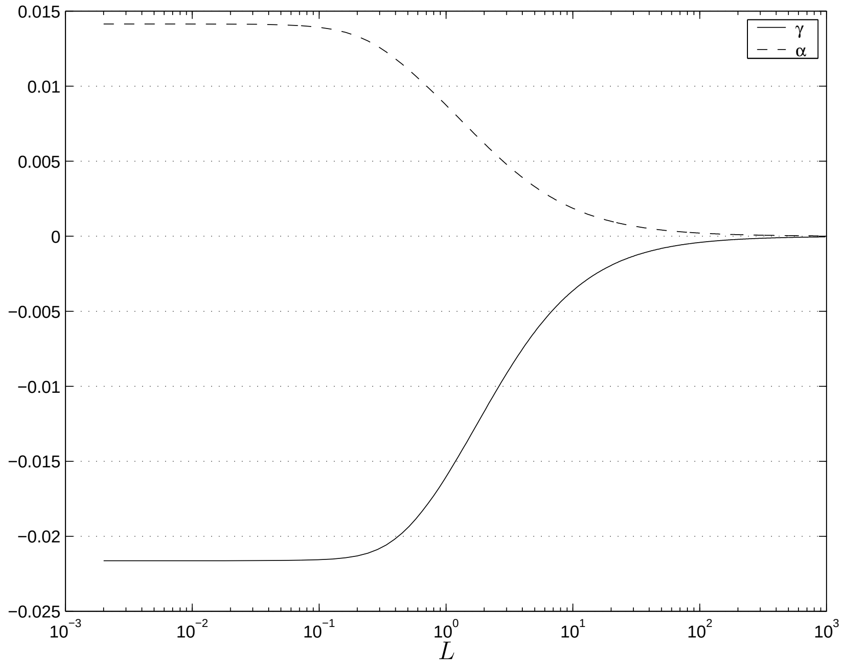



Figura 2.2: Factor de crecimiento ($\gamma$) y número de onda axial ($\alpha$) del modo más inestable en función del parámetro de giro $L$ para $n$ =0, $Re$=1000 y $\omega$=0.01.

Para las perturbaciones no axilsimétricas ($n \neq 0$), el primer número azimutal que se hace espacialmente inestable para valores crecientes de $Re$ y $L$ es $n = -1$, en concordancia con los resultados de los trabajos previos de la estabilidad temporal. La figura 2.3 muestra los contornos de $\gamma$ y $\alpha$ de los modos menos estables (mayores $\gamma$) en el plano $(L, \omega)$ para $n = -1$ y dos valores de Reynolds, $Re = 90$ y $Re = 100$. Para $Re = 90$ [figuras 2.3(a) y (b)], el flujo es inestable ($\gamma > 0$) en una región estrecha en torno a la recta $L \approx 0{,}41 - 0{,}88\omega$ para $\omega < -0{,}39$ aproximadamente. La región de inestabilidad de la figura 2.3(a) se encuentra en el semiplano $\omega < 0$ y finaliza en la región donde $\alpha > 0$ en la figura 2.3(b). En consecuencia, estas perturbaciones para $Re = 90$ tienen una velocidad de fase negativa,

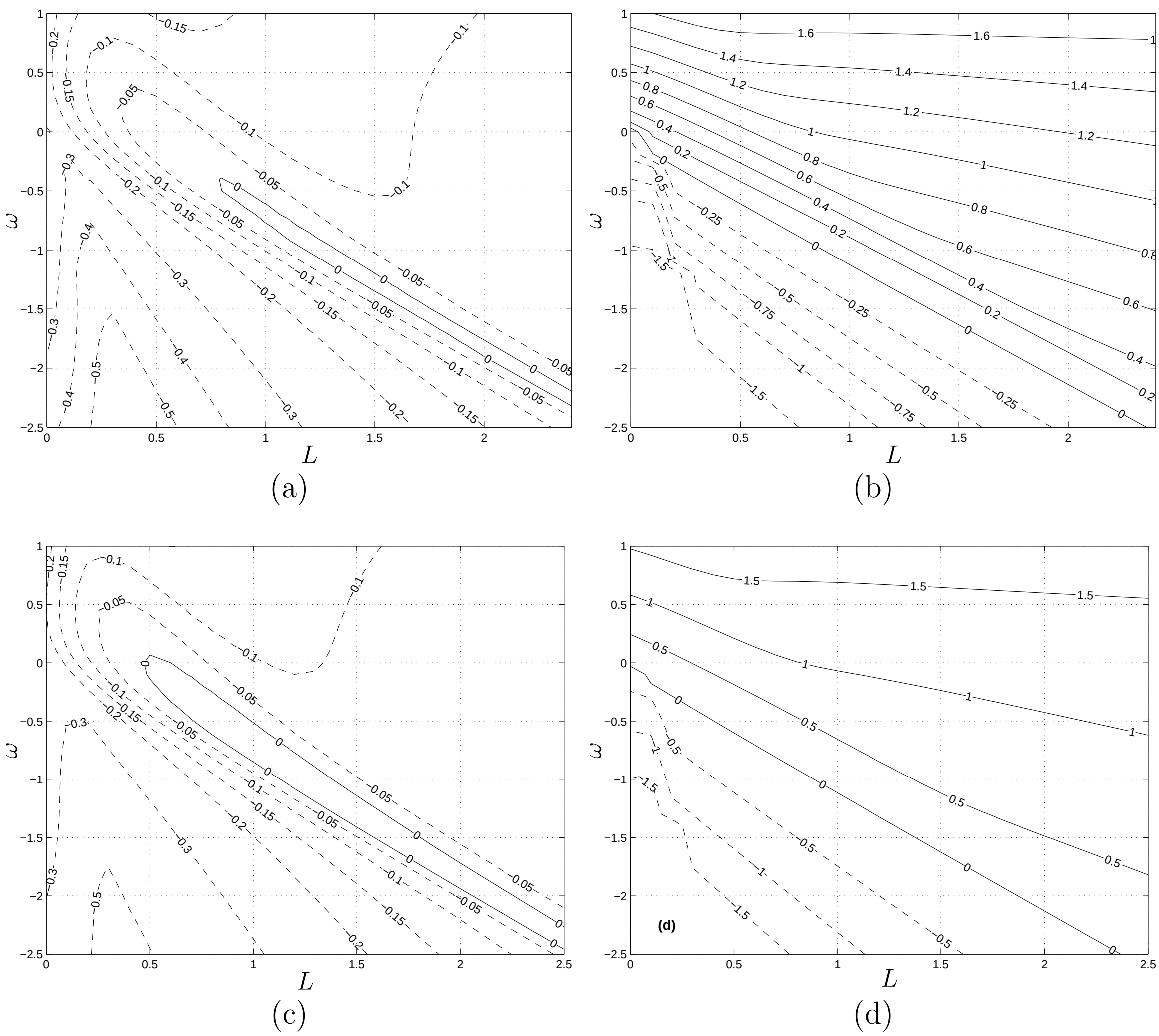
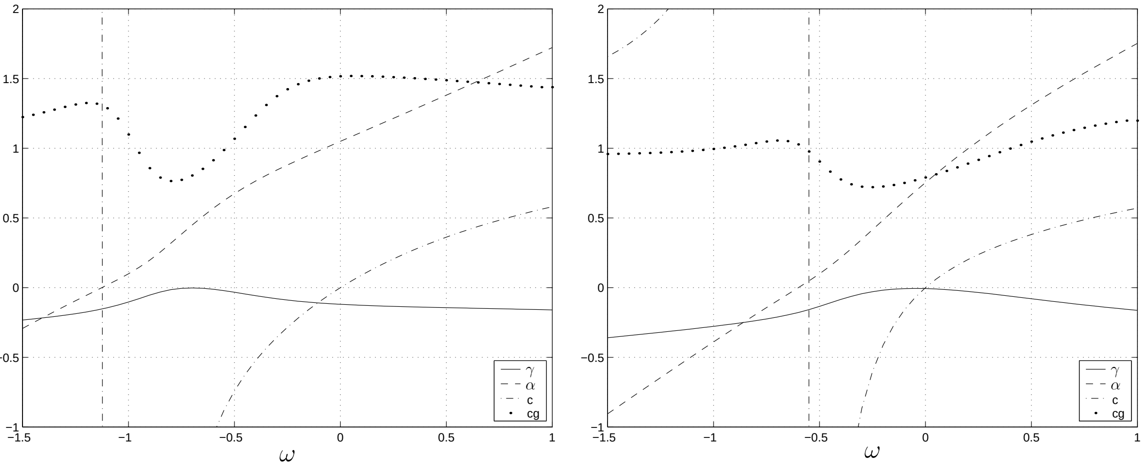



Figura 2.3: Contornos en el plano ($L$,$\omega$) de $\gamma$ [(a) y (c)] y $\alpha$ [(b) y (d)] constantes para el modo con $n$ =-1 menos estable para $Re$=90 [(a) y (b)] y $Re$=100 [(c) y (d)]. Las líneas discontinuas se corresponden a valores negativos.

$$c \equiv \frac{\omega}{\alpha} < 0. \tag{2.26}$$

Sin embargo, la velocidad de grupo es positiva, como se muestra en la figura 2.4(a) para $L = 1$. Así, aunque las crestas de las ondas inestables viajen en la dirección $z$ decreciente, los paquetes de onda con una frecuencia $\omega$ viajan hacia $z > 0$. Estos resultados de la velocidad de fase para estos modos inestables con un parámetro de giro alto y bajos números de Reynolds son coherentes con los resultados de la estabilidad temporal (Mackrodt, 1976, Cotton y Salwen, 1981 y Maslowe y Stewartson, 1982).

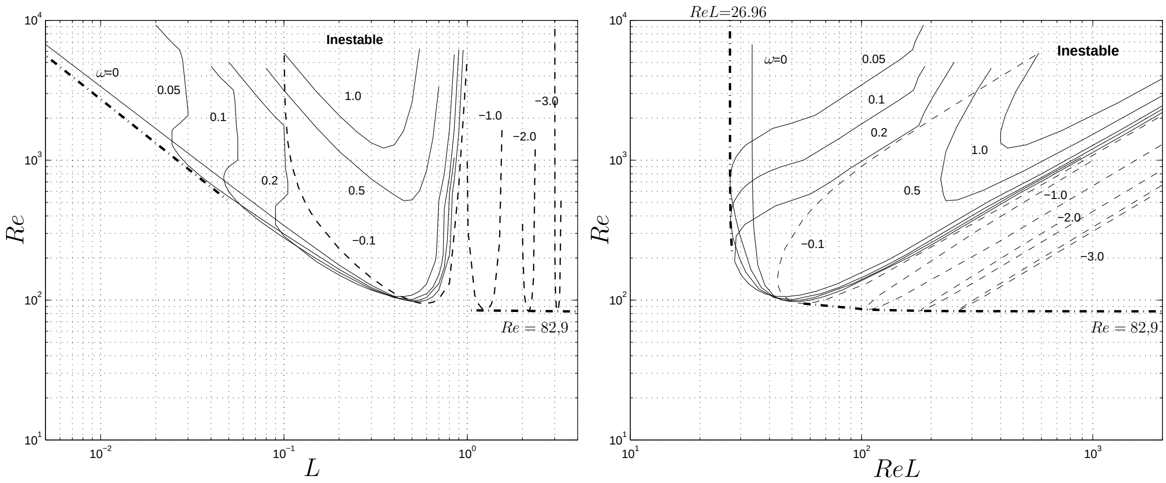



(a) (b)

Figura 2.4: Factor de crecimiento $\gamma$, número de onda $\alpha$, velocidad de fase $c$ y velocidad de grupo $c_g$ para los modos más inestables en función de la frecuencia $\omega$ para $n$=-1, $Re$=90, $L$=1 (a) y $n$=-1, $Re$=100, $L$=0.5 (b).

Cuando el número de Reynolds decrece por debajo de 90, la región de inestabilidad en el plano $(L, \omega)$ se hace cada vez más estrecha y se desplaza hacia valores mayores de $L$ y más negativos de $\omega$, hasta que desaparece para $Re \approx 82{,}9$ (con $L \to \infty$ y $\omega \to -\infty$). Este valor del número de Reynolds coincide con el encontrado en los trabajos previos de estabilidad temporal para este tipo de flujos, dado en primer lugar por Pedley (1969). Por otro lado, a medida que el Reynolds aumenta, la región de inestabilidad en el plano ($L$,$\omega$) se expande. Para $Re = 100$ [figuras 2.3(c)-(d)], la región con $\gamma > 0$ alcanza ya el semiplano $\omega > 0$ [ver figura 2.3(c)], lo que implica que a partir de este Reynolds existen regiones inestables con velocidades de fase y de grupo ambas positivas [ver figura 2.4(b) para $L = 0{,}5$]. Esta situación aparece por primera vez para $Re \approx 97{,}35$ cuando $L \approx 0{,}535$.

La figura 2.5(a) muestra las curvas neutras (curvas en las que $\gamma = 0$) en el plano $(L, \omega)$ para $n = -1$ y para valores constantes de $\omega$. Como se ha mencionado anteriormente, el mínimo número de Reynolds para que se produzca la inestabilidad es $Re = 82{,}9$, y ocurre en el límite $L \to \infty$ y $\omega \to -\infty$. Se observa que la región de inestabilidad para una frecuencia $\omega$ negativa se vuelve más estrecha a medida que $|\omega|$ se incrementa. Para $\omega < 0$ las curvas neutras se ubican a la derecha de $L = -\omega$ $(L \geq -\omega)$.

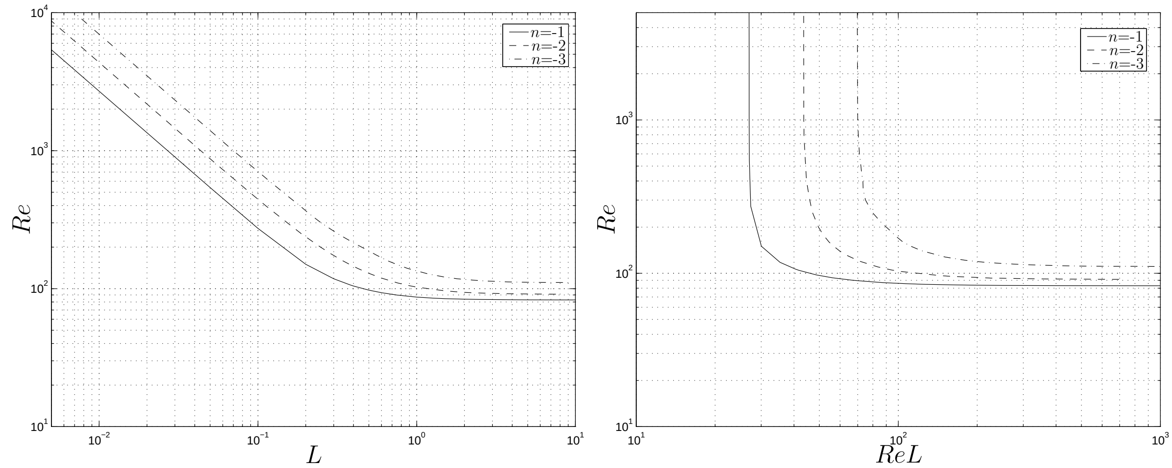



(a) (b)

Figura 2.5: Curvas de estabilidad neutra para $n$=-1 y varias frecuencias en el plano ($L$,$Re$) (a) y en el plano ($Re_\theta$,$Re$) (b). Las curvas discontinuas se corresponden a valores negativos de $\omega$. Las curvas de punto y raya representan las envolventes de estas curvas para valores grandes y pequeños de $L$.

El límite de la estabilidad para pequeños valores del parámetro de giro se aprecia mejor en la figura 2.5 (b), donde las curvas neutras se representan en el plano $(Re_\theta = ReL, Re)$. El mínimo valor de $Re_\theta$ para la inestabilidad ($\approx$26.96) coincide con el dado por Mackrodt (1976) usando el análisis de estabilidad temporal. De hecho, la envolvente de todas las curvas neutras, que representa el valor crítico del número de Reynolds en función de $L$, $Re_c(L)$ coincide con el límite obtenido en el análisis de estabilidad temporal (Mackrodt 1976).

Si $|n|$ aumenta, la región de inestabilidad en el plano $(ReL, Re)$ se vuelve menor, con el límite de la estabilidad localizado para valores mayores tanto de $Re$ como de $L$. Esto se puede apreciar en la figura 2.6, donde se representa las envolventes de las curvas neutras para diferentes frecuencias con los números de onda azimutales $n = -1, n = -2, n = -3$ en los planos $(Re, L)$ y $(Re_\theta, Re)$. Las asíntotas de las curvas neutras para los valores $Re_\theta \to \infty$ y $Re \to \infty$ mostradas en la figura concuerdan con los valores encontrados por Cotton y Salwen (1981) en el análisis de estabilidad temporal.




(a) (b)

Figura 2.6: Envolventes de las curvas neutras para la inestabilidad convectiva para $n$=-1, -2 y -3 en el plano ($L$,$Re$) (a) y en el plano $(Re_\theta, Re)$ (b).

## 2.2.4. La aparición de la inestabilidad absoluta.

Las curvas neutras dadas en las figuras 2.5 y 2.6 marcan el comienzo de la inestabilidad convectiva. Para un valor de $L$, cuando el número de Reynolds es un poco mayor a $Re_{c1}(L)$, donde $Re_{c1}(L)$ viene dado por la envolvente de la curva neutra de la figura 2.5 para $n = -1$, el valor de la velocidad de crecimiento de las perturbaciones ($\gamma$) es positivo para algunas de las frecuencias ($\omega$). El paquete de ondas inestable con esa frecuencia viaja con una velocidad de grupo positiva (ver figura 2.4), de manera que se corresponde con una inestabilidad convectiva. Lo mismo puede decirse de las perturbaciones con números azimutales $n = -2$ y $n = -3$ cuando $Re$ es mayor al correspondiente en las curvas neutras representadas en la figura 2.6.

Se observa en la figura 2.4 que la velocidad de grupo $c_g$ es aproximadamente mínima para la frecuencia, el número azimutal, el número de Reynolds y el parámetro de giro en el que la velocidad de crecimiento es máxima. Es decir, el paquete de ondas correspondiente a los modos más inestables viaja a una menor velocidad a lo largo del conducto. Cuando el número de Reynolds se incrementa, la máxima velocidad de crecimiento también lo hace y el mínimo de $c_g$ decrece hasta que se anula en un punto cúspide cuando se alcanza un $Re = Re_a > Re_c$ a una frecuencia $\omega_a(L)$ (ver las figuras 2.7 y 2.8 para dos valores diferentes de $L$ y $n = -1$; en estas figuras, al igual que en la figura 2.4, $c_g$ se evalúa numéricamente usando diferencias finitas de segundo orden tomando un $\Delta\omega$ de $10^{-4}$ en la proximidad del punto cúspide). Para estos valores de la frecuencia y del número de Reynolds, la velocidad de crecimiento presenta también un punto cúspide [ver figuras 2.7 (a) y 2.8 (a)], de manera que el flujo es aún más inestable para esa frecuencia ($\omega_a$). Lo que ocurre es que las dos ramas de la relación de dispersión se unen en la frecuencia $\omega = \omega_a$ cuando $Re = Re_a(L)$, y el flujo se vuelve absolutamente inestable de acuerdo con el criterio de Briggs-Bers (Huerre y Monkewitz, 1990 y Huerre y Rossi, 1998). En efecto, si se define la velocidad de grupo compleja como

$$v_g \equiv \frac{\partial\bar{\omega}}{\partial k} = i\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial a} = \frac{\partial\omega}{\partial\alpha} + i\frac{\partial\omega}{\partial\gamma} = c_g + i\frac{\partial\omega}{\partial\gamma} \tag{2.27}$$

donde $\bar{\omega} = \omega + i\omega_i$ es la frecuencia compleja y $k \equiv a/i = \alpha - i\gamma$ es el número de onda complejo [ver ecuaciones (2.13) y (2.25)], la velocidad $v_g$ se hace nula para $Re_a$ cuando $\omega = \omega_a(L)$ porque $c_g = 0$ y $\partial\gamma/\partial\omega \to \infty$. Por lo tanto, los puntos cúspides de las figuras 2.7 y 2.8 son puntos de fusión de las dos ramas espaciales $k^+$ y $k^-$ en el plano complejo ($\alpha$,$\gamma$); la rama positiva se aleja a la parte inferior del semiplano cuando $\omega_i = \Im(\bar{\omega})$ aumenta, mientras que la rama negativa muere en la parte superior del semiplano ($\alpha$,$\gamma$) cuando $\omega_i$ aumenta (ver figura 2.9 con los valores de $n$ y $L$ considerados en las figuras 2.7 y 2.8). Estas dos condiciones caracterizan la transición a la estabilidad absoluta de acuerdo con el criterio de Briggs-Bers. Para un $Re > Re_a$ las dos ramas se mezclan y el presente análisis espacial de estabilidad deja de ser apropiado. No obstante, las figuras 2.7, 2.8 y 2.9 muestran que el presente análisis de estabilidad espacial es una herramienta cómoda y eficiente para detectar la aparición de la inestabilidad absoluta: se deben buscar sólo las condiciones en la que la velocidad de grupo se anula, y comprobar si se corresponden o no a un punto de silla de las dos ramas (positiva y negativa) de la relación de dispersión compleja.

En las condiciones de los puntos cúspides de las figuras 2.7 y 2.8 [por ejemplo, para $Re = Re_a(L)$], las perturbaciones con $n = -1$ y una frecuencia real $\omega = \omega_a(L)$ son inestables ($\gamma$ es positivo y su valor es grande) y tienen velocidad de grupo compleja nula,

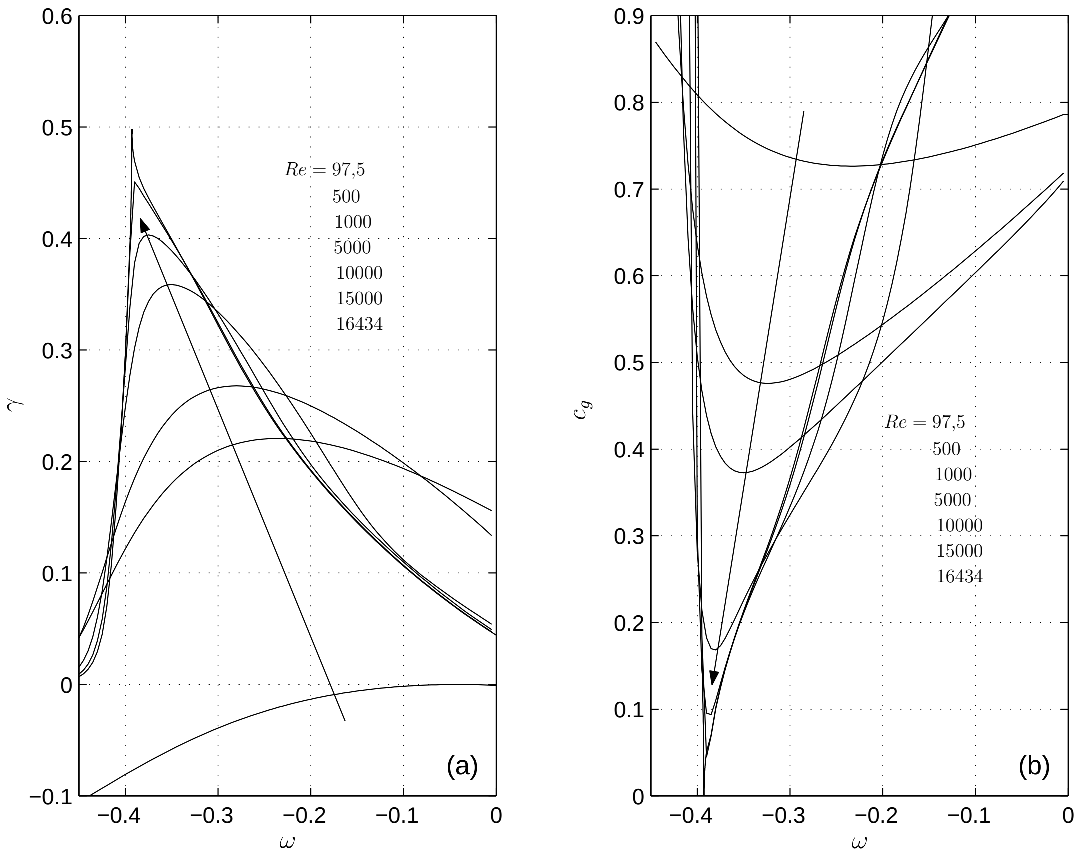



Figura 2.7: Factor de crecimiento, $\gamma$ (a) y velocidad de grupo, $c_g$ (b) frente a la frecuencia $\omega$ para el caso $n$=-1 y $L$=0.5 y distintos números de Reynolds entre $Re_c(0.5)\approx$ 97,5 y $Re_a(0.5)\approx$ 16434.

de tal forma que crecen *in situ*. Para $Re > Re_a(L)$, existen perturbaciones inestables que se propagan aguas arriba, pero éstas ya no pueden ser caracterizadas por el análisis espacial de estabilidad. La figura 2.10 muestra el límite $Re_a(L)$ junto con $Re_c(L)$ para $n = -1$, que es el número azimutal que se vuelve inestable en primer lugar, convectivamente y a continuación absolutamente, cuando el número de Reynolds aumenta para cada $L$. Un hecho destacable es que el flujo no puede ser absolutamente inestable si el parámetro de giro es inferior a un valor crítico $L^* \cong 0{,}38$ (ver la figura 2.11), mientras que el flujo puede ser inestable convectivamente para cualquier valor de $L$, siempre y cuando el $Re$ sea lo suficientemente alto. En términos del parámetro de giro [figura 2.10(b)], el flujo es convectivamente inestable si $ReL > 26{,}96$, mientras que es absolutamente inestable si $ReL > 251$, aproximadamente. Para valores altos de $L$ ($L > 20$), $Re_c \approx Re_a$, y el flujo se convierte en absolutamente inestable justo después de que se haya hecho convectivamente inestable cuando $Re$ aumenta.

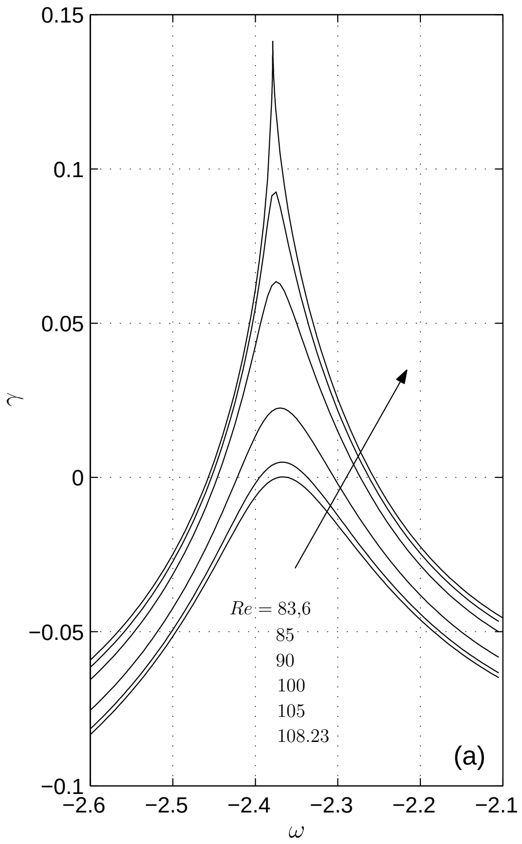
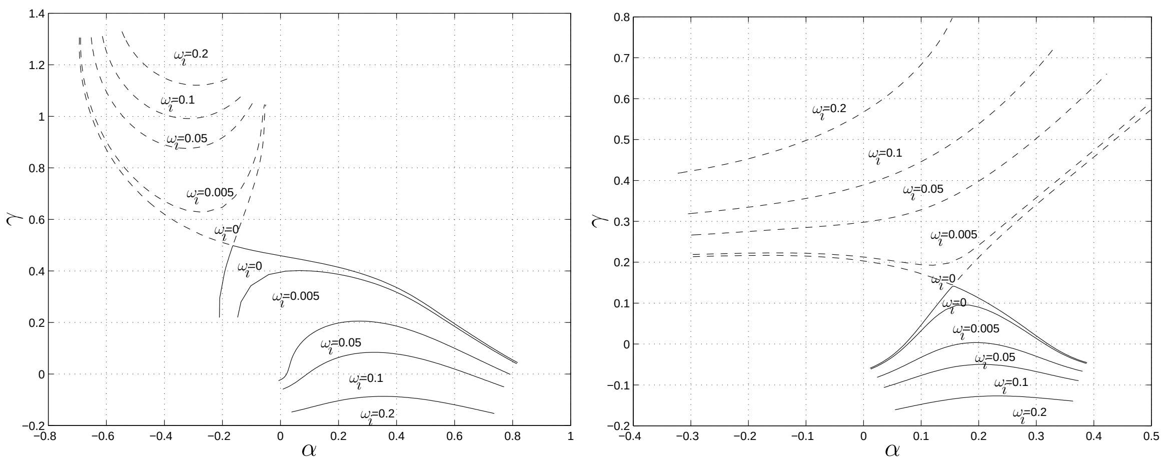



Figura 2.8: Factor de crecimiento $\gamma$ y velocidad de grupo $c_g$ frente a la frecuencia para el caso $n$=-1 y $L$=2.5 y distintos números de Reynolds entre $Re_c(2.5)\approx$ 83,6 y $Re_a(2.5)\approx$ 108,23.

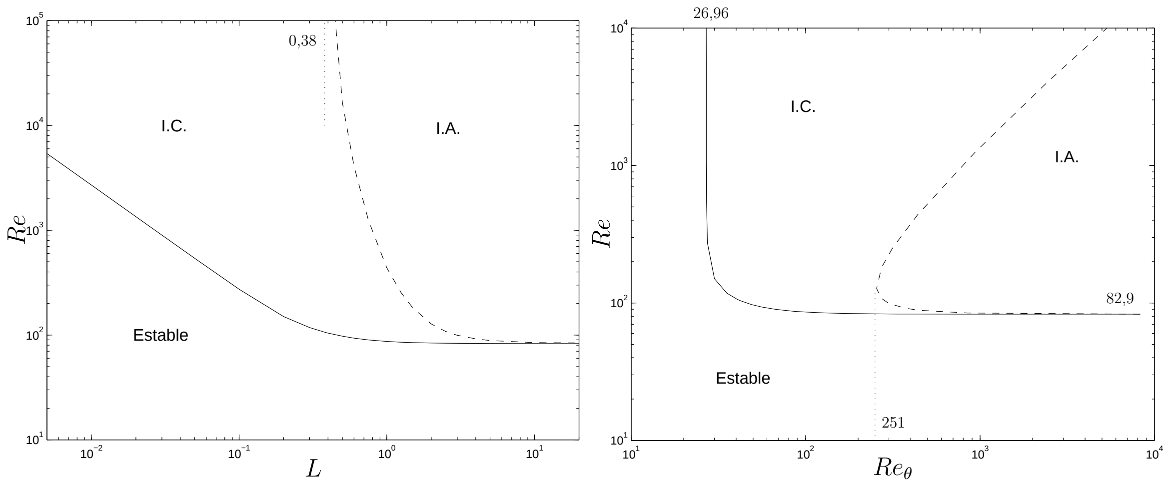
La figura 2.11 compara los límites de la inestabilidad absoluta para $n = -1, -2$ y $-3$, mostrando que $n = -1$ es el número de onda azimutal que primero se vuelve absolutamente inestable para cada $L$ cuando $Re$ aumenta. No se muestran valores mayores de $|n|$ pues la tendencia es la misma. Se observa que con $n = -2$ y $n = -3$ el flujo sólo puede ser absolutamente inestable si $L$ es mayor a 0,55 y 0,64, respectivamente.

La figura 2.12 muestra las frecuencias $\omega_c(L)$ y $\omega_a(L)$ con las que primero aparecen la inestabilidad convectiva y absoluta para perturbaciones con $n = -1, -2$ y $-3$. Para parámetros de giro $L$ altos, las dos frecuencias prácticamente coinciden y se pueden aproximar por $\omega_c \approx \omega_a \approx nL$. Cabe destacar de nuevo el hecho de que $\omega_a(L)$ sólo existe para $L > L_n^*$ donde $L_n^* \approx 0{,}38, 0{,}55$ y $0{,}64$ para $n = -1, -2$ y $-3$, respectivamente. Esto significa que, al contrario de lo que sucede con la estabilidad convectiva, la inestabilidad




(a) (b)

Figura 2.9: Ramas espaciales $k^+$ (líneas continuas) y $k^-$ (líneas discontinuas) en el plano complejo ($\alpha$,$\gamma$) para diferentes valores de $\omega_i$ para las condiciones del punto cúspide de la figura 2.7(a) y la figura 2.8(b). El número de onda complejo adimensional es, con la presente notación, $k = a/i = \alpha - i\gamma$.

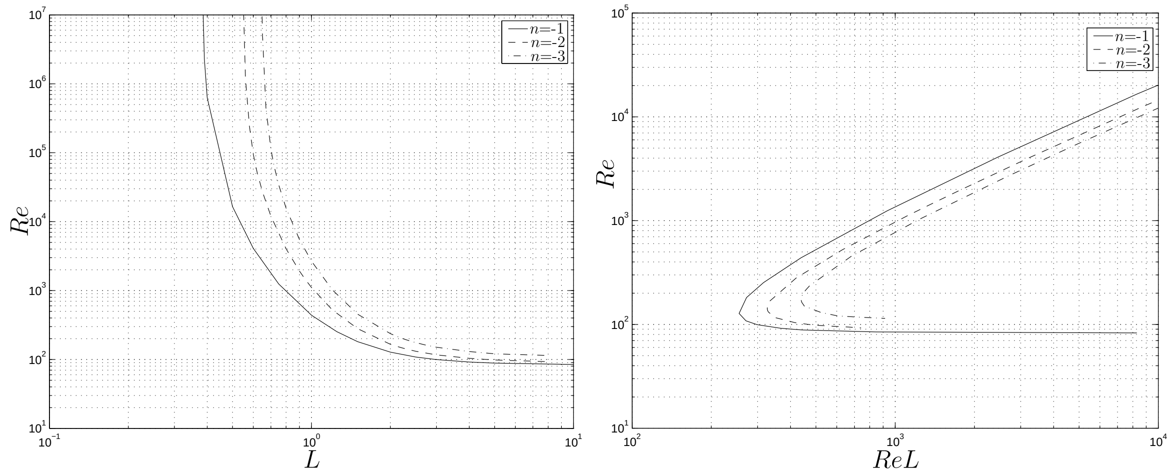



(a) (b)

Figura 2.10: Regiones de estabilidad, de inestabilidad convectiva (I.C.) e inestabilidad absoluta (I.A.) para $n$=-1 en el plano ($L$,$Re$) (a) y en el plano ($Re_\theta$,$Re$) (b). Estas regiones se dividen por las líneas continuas [$Re_c(L)$] y discontinuas [$Re_a(L)$]. Las líneas de puntos marcan el parámetro de giro $L$ mínimo para el cual aparece inestabilidad absoluta.

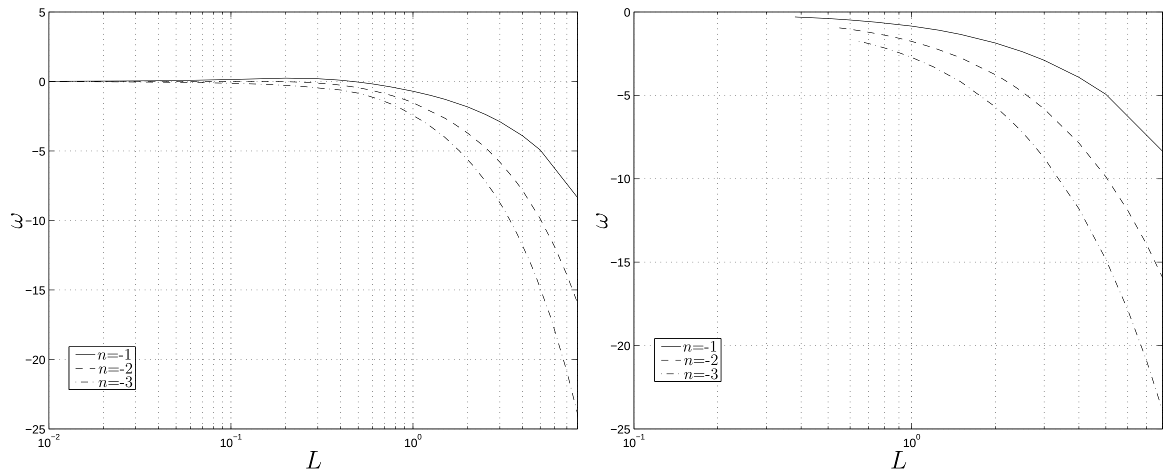
absoluta no aparece para todos los parámetros de giro con sólo aumentar el número de Reynolds.

Finalmente, en la figura 2.13 se representan las autofunciones para $n = -1$ y $L = 0{,}5$ correspondiente a dos modos, uno de la curva neutra para la inestabilidad convectiva,




(a) (b)

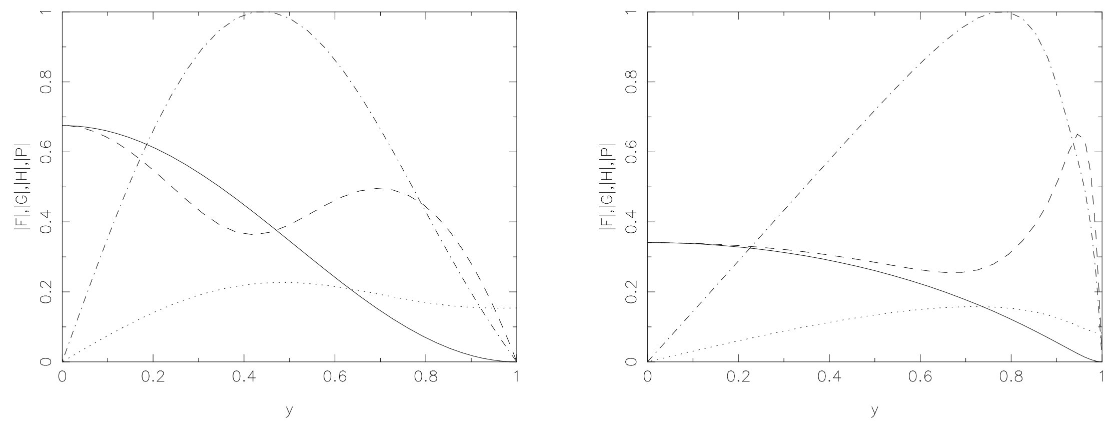
Figura 2.11: Límites para la inestabilidad absoluta para $n$=-1, -2 y -3 en los planos ($Re$,$L$) (a) y ($Re_\theta$,$Re$) (b).




(a) (b)

Figura 2.12: $\omega_c(L)$ (a) y $\omega_a(L)$ (b) para $n$=-1, -2 y -3.

$Re = Re_c(0{,}5) = 97{,}5$ y $\omega = \omega_c(0{,}5) = -0{,}04$ y otro del comienzo de la inestabilidad absoluta $Re = Re_a(0{,}5) = 16434$ y $\omega = \omega_a(0{,}5) \approx -0{,}39$. A bajos números de Reynolds como $Re = 97{,}5$ [figura 2.13(a)], las perturbaciones se corresponden a modos centrales, con el máximo de las velocidades de la perturbación cerca del eje del conducto. Sin embargo, para altos $Re$ [figura 2.13(b)] los modos inestables están más próximos a la pared.




(a) (b)

Figura 2.13: Amplitud de las autofunciones $|F|$ (líneas continuas), $|G|$ (líneas discontinuas), $|H|$ (líneas punto y raya) y $|P|$ (líneas de puntos) para $n$=-1, $L$=0.5 con $Re$=$Re_c$(0,5)=97.5 y $\omega$=$\omega_c$(0.5)=-0.04 (a) y $Re$=$Re_a$(0,5)=16434 y $\omega$=$\omega_a$(0.5)=-0.3929 (a). El valor máximo de $|H|$ está normalizado a la unidad.

### 2.2.5. Conclusiones del análisis de estabilidad lineal para un flujo básico analítico sin dependencia axial.

Los principales resultados del análisis de estabilidad espacial del flujo de Poiseuille representado en este apartado se resumen en la figura 2.10 (junto con las figuras 2.6 y 2.11). El análisis confirma el límite de la estabilidad (convectiva) obtenida en los trabajos previos de la inestabilidad temporal de este tipo de flujo (Mackrodt, 1976, Cotton y Salwen, 1981). El análisis espacial permite obtener, para cada número de onda azimutal, las curvas neutras para cada frecuencia real de las perturbaciones (ver figura 2.5) que es la información más importante desde el punto de vista experimental. Asimismo, el análisis de estabilidad espacial mejora con una simple herramienta la búsqueda de la transición convectiva-absoluta cuando el número de Reynolds se incrementa para un parámetro de giro dado. En particular, se ha mostrado que los paquetes de onda correspondientes a las frecuencias más inestables para cada $Re$ y $L$ son los que se desplazan a una menor velocidad aguas abajo, ya que poseen la menor velocidad de grupo. A medida que el valor de $Re$ crece, la velocidad de grupo compleja $v_g$ se anula para un $Re = Re_a(L)$, y el flujo se vuelve absolutamente inestable de acuerdo con el criterio de Briggs-Bers. El flujo puede hacerse absolutamente inestable a partir de unos determinados parámetros de giro que varían según el número azimutal $n$. El presente análisis de estabilidad lineal es similar al dado por Olendrau *et al.* (1999) para el vórtice de Batchelor. Sin embargo, el principio de la estabilidad absoluta se encuentra de una forma más sencilla con tan sólo analizar las condiciones en las que la parte de la velocidad de grupo compleja desaparece. La principal diferencia cualitativa entre el presente resultado y el dado para el vórtice de Batchelor es que el flujo de Hagen-Poiseuille rotando como sólido rígido puede ser absolutamente inestable a pesar de la ausencia de un flujo negativo en la dirección axial. Además, se ha mostrado que las perturbaciones con número azimutal $n = -1$ son las primeras que pasan a ser absolutamente inestables a medida que el Reynolds se incrementa para $L > L_n^*$ o el parámetro de giro se aumenta para cada $Re > Re_c \cong 82{,}9$.

En toda esta sección se ha supuesto que las autofunciones no dependen de la variable axial ($\mathbf{S} = \mathbf{S}(x)$), puesto que el flujo base tampoco depende de $z$. A continuación se abordará un análisis de estabilidad con dependencia axial (no paralelo). Este método necesita para arrancar una condición inicial que viene proporcionada por la solución de estabilidad casi paralela descrita en esta sección.

## 2.3. Estabilidad lineal no paralela para un flujo básico con dependencia axial en un conducto de sección constante.

### 2.3.1. Introducción.

En la sección anterior se ha estudiado la estabilidad lineal de un flujo de Hagen-Poiseuille con superposición de una rotación como sólido rígido en un conducto. En la presente sección se va a estudiar la estabilidad del flujo en un conducto que rota cuando entra en el mismo sin rotación y con un perfil uniforme de velocidad axial. Se quiere conocer si las inestabilidades se producen, en caso de que existan, antes de que se llegue al flujo de Hagen-Poiseuille desarrollado con rotación como sólido rígido. Lo que ocurre en la práctica fue mostrado en el trabajo de Imao *et al.* (1992), en el que se representaron las medidas realizadas mediante la técnica *LDA* (del inglés, Laser Doppler Anemometry) en el flujo abierto en un conducto que gira cuando, como ya se ha mencionado, un perfil de velocidad axial uniforme es forzado en la región de entrada para un valor de Reynolds constante y tres parámetros de giro distintos. Estos autores obtuvieron las ondas espirales de inestabilidad, que aparecen con claridad en la región de transición, para unos valores altos del parámetro de giro.

Para tratar de profundizar en este problema, en la presente sección se analiza la estabilidad lineal no paralela para el flujo básico antes mencionado. Primero se presentarán los resultados numéricos del flujo básico para lo cual se emplea una formulación en variables no primitivas, esto es, función de corriente, circulación y vorticidad para la simulación axilsimétrica en un conducto lo suficientemente extenso como para alcanzar el estado en la salida de un flujo de Poiseuille con rotación como sólido rígido. Cabe reseñar en este sentido que la simulación axilsimétrica se justifica porque el flujo desarrollado es estable para perturbaciones axilsimétricas para todos los valores de $Re$ y $L$, como se ha visto en la sección anterior. La estabilidad lineal no paralela de este flujo es analizada utilizando la técnica *PSE*. Esta técnica (ver, por ejemplo, Bertolotti *et al.*, 1992 o Herbert 1997) tiene en cuenta tanto la evolución axial del flujo básico como la *'historia'* de las perturbaciones. Los resultados se comparan con los de la estabilidad lineal casi-paralela que sólo consideran la variación axial del flujo base y con los experimentos de Imao *et al.* (1992). Por último, se analiza el criterio que caracteriza la aparición de la inestabilidad absoluta con la técnica *PSE* y se discuten los resultados, mostrando las grandes ventajas de la utilización de esta técnica frente a la casi-paralela y la discusión de si es correcta la caracterización tanto de la aparición de las inestabilidades convectivas como de las absolutas para este tipo de flujos.

### 2.3.2. Desarrollo del flujo axilsimétrico en un conducto con giro.

El flujo básico cuya estabilidad va a ser considerada es axilsimétrico y se desarrolla en un conducto de radio $R$ que gira a una velocidad angular $\Omega$. En la entrada, el flujo es uniforme con una velocidad axial $W_i$. Si el conducto es lo suficientemente extenso, el flujo tiende a desarrollarse hasta llegar a un flujo de Poiseuille más una rotación como sólido rígido, es decir, hasta que el perfil de velocidad viene dado por (2.1), con $W_0 = 2W_i$.

Además el parámetro de giro (2.3) y del número de Reynolds (2.4), el otro parámetro adimensional es la relación de aspecto

$$\Delta = \frac{R}{z_0}\,, \qquad (2.28)$$

donde $z_0$ es la longitud del conducto. También se usará el número de Reynolds azimutal del flujo, $Re_\theta \equiv ReL$.

La simulación numérica del flujo base axilsimétrico fue considerada por Imao *et al.* (1989), entre otros. En esta sección se va a emplear la formulación función de corriente-circulación-vorticidad ($\Psi$-$\Gamma$-$\eta$ de ahora en adelante), definidas en función del campo de velocidad como

$$\frac{U}{W_0} = -\frac{\Delta}{y}\frac{\partial \Psi}{\partial x}\,, \quad \frac{W}{W_0} = \frac{1}{y}\frac{\partial \Psi}{\partial y}\,, \tag{2.29}$$

$$\eta = \frac{R}{W_0}[\nabla \wedge \mathbf{V}]_\theta = \frac{\Delta}{W_0}\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{1}{W_0}\frac{\partial W}{\partial y}\,, \tag{2.30}$$

$$\Gamma = y\,\frac{V}{W_0}\,, \tag{2.31}$$

donde, a diferencia de (2.10),

$$x \equiv \frac{z}{z_o}\,. \tag{2.32}$$

Con esta formulación se satisface idénticamente la ecuación de continuidad y las tres ecuaciones a resolver son las componentes azimutales de las ecuaciones de cantidad de movimiento y de la vorticidad, junto con la definición (2.30) de $\eta$. En forma adimensional estas ecuaciones pueden escribirse como

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \frac{1}{y}\frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial \Gamma}{\partial y} - \frac{1}{y}\frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{\partial \Gamma}{\partial x} + \frac{1}{Re\Delta}\left(\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial y^2} - \frac{1}{y}\frac{\partial \Gamma}{\partial y} + \Delta^2\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2}\right)\,, \tag{2.33}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{1}{y}\frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{1}{y}\frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\eta}{y^2}\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\Gamma}{y^3}\frac{\partial \Gamma}{\partial x} + \frac{1}{Re\Delta}\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\eta}{y^2} + \Delta^2\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\right)\,, \tag{2.34}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \frac{1}{y}\frac{\partial \Psi}{\partial y} + \Delta^2\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -y\eta\,. \tag{2.35}$$

Se ha utilizado la misma notación $\Psi$, $\eta$, $\Gamma$ y $t$ (tiempo) para las variables adimensionales cuyos valores característicos son $W_0R^2$, $W_0/R$, $W_0R$, y $z_o/W_0$, respectivamente.

Estas ecuaciones se resuelven con las siguientes condiciones de contorno: en la entrada, $x$=0, se supone un flujo axial uniforme ($W_i/W_0$=0.5) junto con $U$=$V$=0,

$$\Psi = y^2\,, \quad \eta = -\frac{\Delta^2}{y}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}\,, \quad \Gamma = 0 \qquad\qquad x = 0\,, \quad 0 \le y \le 1\,. \tag{2.36}$$

En la salida, $x$=1, los perfiles de velocidad se suponen independientes de $x$,

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = 0\,, \quad \eta = -\frac{1}{y}\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} - \frac{1}{y^2}\frac{\partial\Psi}{\partial y}\,, \quad \frac{\partial\Gamma}{\partial x} = 0 \qquad\qquad x = 1\,, \quad 0 \le y \le 1\,. \tag{2.37}$$

En el eje de simetría ($y$=0), se tiene

$$\Psi = \eta = \Gamma = 0 \qquad\qquad 0 \le x \le 1\,, \quad y = 0\,. \tag{2.38}$$

Finalmente, en la pared con giro, $U$=$W$=0 y $V/W_0$=$L$:

$$\Psi = 0\,, \quad \eta = -\frac{1}{y}\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}\,, \quad \Gamma = L \qquad\qquad 0 \le x \le 1\,, \quad y = 1\,. \tag{2.39}$$

En las simulaciones se ha seleccionado una longitud del conducto, $\Delta^{-1}$, lo suficientemente grande para alcanzar en el estado estacionario el flujo (2.1) aguas abajo, que en las variables no primitivas viene dado por

$$[\Psi, \eta, \Gamma] = [y^2/2 - y^4/4,\, 2y,\, Ly]\,. \tag{2.40}$$

Tal y como estimó Pedley (1969), $\Delta^{-1}$=O[$max(Re, Re_\theta)$]. Sin embargo, para las distintas simulaciones realizadas se encuentra que el criterio de Pedley es muy conservativo. El flujo asintótico aguas abajo se alcanza en tan solo un 30-40 % de la longitud estimada. Esto también se observa en los resultados experimentales dados por Imao *et al.* (1992). Para el caso más desfavorable considerado, $Re$=500 y $L$=1.5, en el cual la longitud estimada debería ser $\Delta^{-1}$=750, el flujo asintótico a la salida se alcanza en

$z/R \approx 360$ tanto en los experimentos como en las simulaciones numéricas. Por esta razón se ha elegido $\Delta^{-1}=400$ en todas las simulaciones presentadas en esta sección.

Para resolver numéricamente el problema (2.34)-(2.40) se ha usado un método explícito en un esquema de diferencias finitas, de segundo orden en el espacio, y un método *predictor-corrector* de segundo orden para avanzar en el tiempo (ver, por ejemplo Lopez & Weidman, 1996). Para valores dados de $Re$ y $L$, la simulación comienza en $t=0$ con el fluido en reposo, y finaliza cuando se ha alcanzado el estado estacionario. Una vez que se encuentra el flujo básico en las variables del problema ($[\Psi(y,x), \eta(y,x), \Gamma(y,x)]$), se utilizan las expresiones (2.29) y (2.31) para obtener el campo de velocidad, que en forma adimensional se expresará como $[f(y,x), g(y,x), h(y,x)]$, relacionado con $[U, V, W]$ mediante

$$\mathbf{V} \equiv W_0[\Delta f,\, Lg,\, h]\,. \tag{2.41}$$

Como se mostrará en la siguiente sección, aunque el campo de presión del flujo básico puede ser obtenido mediante $[\Psi, \eta, \Gamma]$ si se resuelve la ecuación de Poisson adicional, éste no es necesario para realizar el análisis de estabilidad espacial. La posibilidad de poder evitar el campo de presiones justifica el uso de las variables no primitivas para el cálculo numérico del flujo básico incompresible. No obstante, de ahora en adelante se emplearán las variables primitivas (velocidad-presión) para describir el problema de la estabilidad lineal y espacial. La figura 2.14 muestra algunos perfiles radiales de la componente de velocidad axial ($h$) y azimutal ($g$) para el estado estacionario en distintas secciones axiales, con $Re=500$ y $L=0.5$ ($\Delta^{-1}=400$). Se observa que en $x/\Delta=40$ ya se ha alcanzado prácticamente el flujo de Poiseuille con rotación como sólido rígido superpuesta.

### 2.3.3. Formulación de la estabilidad lineal no paralela. Descripción del método *PSE*.

Para analizar la estabilidad del flujo básico anterior, las variables del flujo $(u, v, w)$ y $p$ son nuevamente descompuestas en dos partes, una parte principal, $(U, V, W)$ y $P$, a la que se le añade una pequeña perturbación tal y como se ha definido en la sección 2.2.1. La diferencia es que ahora la amplitud de las perturbaciones dependerá, al igual que el flujo base, de la variable axial, esto es,

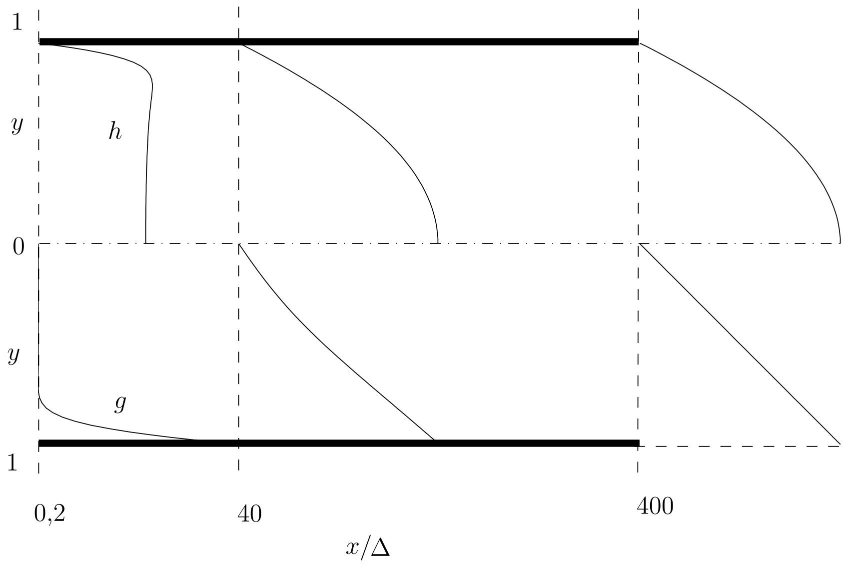



Figura 2.14: Esquema de la geometría del conducto con los estados estacionarios de los perfiles radiales de la velocidad axial ($h$, curvas superiores) y azimutal ($g$, curvas inferiores) en $x/\Delta = 0{,}2, 40$ y 400. $\Delta^{-1} = 400$, $Re = 500$ y $L = 0{,}5$. Los cálculos numéricos se obtienen empleando $\delta x = 5 \times 10^{-4}$, $\delta y = 0{,}012$ y $\delta t = 10^{-4}$. El estado estacionario se alcanza para $t \simeq 143$.

$$u(x, y) = W_0[\Delta\, f(y, x) + \overline{u}]\,, \tag{2.42}$$

$$w(x, y) = W_0[h(y, x) + \overline{w}]\,, \tag{2.43}$$

$$v(x, y) = W_0[Lg(y, x) + \overline{v}]\,, \tag{2.44}$$

$$p(x, y) = \rho W_0^2(e(y, x) + \overline{p})\,, \tag{2.45}$$

donde

$$\begin{pmatrix} \overline{u} \\ \overline{v} \\ \overline{w} \\ \overline{p} \end{pmatrix} = \mathbf{S}(y, x)\chi(x, \theta, t) \equiv \begin{pmatrix} F(y, x) \\ G(y, x) \\ H(y, x) \\ \Pi(y, x) \end{pmatrix} \chi(x, \theta, t)\,, \tag{2.46}$$

$$\chi(x, \theta, t) = e^{[\frac{1}{\Delta}\int_{x_0}^{x} a(x)dx + in\theta - i\omega\frac{t}{\Delta}]} \tag{2.47}$$

siendo $x_0$ una coordenada axial inicial (donde se introduce la perturbación). Como se ve, también depende de $x$ la parte exponencial de las perturbaciones a través de

$$a(x) \equiv \gamma(x) + i\alpha(x)\,.$$

Se verá más adelante que el método *PSE* resuelve esta ambigüedad en el reparto de la dependencia axial de las perturbaciones entre la amplitud $\mathbf{S}(y,x)$ y la fase $\chi(x,\theta,t)$ mediante una condición de normalización.

La parte real del número de onda complejo adimensional $a(x;\omega)$ sigue siendo la velocidad de crecimiento $\gamma(x;\omega)$ y la parte imaginaria $\alpha(x;\omega)$ continua relacionándose con el número de onda axial. Para realizar el análisis de estabilidad espacial, se fija una frecuencia real $\omega$ y se buscarán los autovalores $a(x;\omega)$. El flujo es inestable si $\gamma(x;\omega) > 0$.

Sustituyendo (2.42)-(2.45) en las ecuaciones incompresibles de Navier-Stokes y despreciando tanto los términos de segundo orden para las pequeñas perturbaciones como los términos que contienen el producto de $\Delta$ y las derivadas segundas axiales (esto último constituye la base de la técnica *PSE*, ver, por ejemplo, Bertolotti *et al.*, 1992 y Herbet, 1997) se obtiene la siguiente ecuación parabólica para $\mathbf{S}$

$$\mathbf{L}\cdot\mathbf{S} + \Delta\mathbf{M}\cdot\frac{\partial\mathbf{S}}{\partial x} = \mathbf{0}\,. \tag{2.48}$$

Las matrices $\mathbf{L}$ y $\mathbf{M}$ se definen como

$$\mathbf{L} \equiv \mathbf{L}_1 + a\mathbf{L}_2 + \frac{1}{Re}\mathbf{L}_3 + a^2\frac{1}{Re}\mathbf{L}_4 + \Delta\mathbf{L}_5\,, \tag{2.49}$$

$$\mathbf{L_1} = \begin{pmatrix} 1 + y\frac{\partial}{\partial y} & in & 0 & 0 \\ i(nLg - \omega y) & -2Lg & 0 & y\frac{\partial}{\partial y} \\ L\left(y\frac{\partial g}{\partial y} + g\right) & i(nLg - \omega y) & 0 & in \\ y\frac{\partial h}{\partial y} & 0 & i(nLg - \omega y) & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.50}$$

$$\mathbf{L_2} = \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & y & 0 \\ yh & 0 & 0 & 0 \\ 0 & yh & 0 & 0 \\ 0 & 0 & yh & y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -y & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.51}$$

$$\mathbf{L_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -D_y + \frac{n^2+1}{y} & \frac{2in}{y} & 0 & 0 \\ -\frac{2in}{y} & -D_y + \frac{n^2+1}{y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -D_y + \frac{n^2}{y} & 0 \end{pmatrix}, \quad D_y \equiv y\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y}\,, \tag{2.52}$$

$$\mathbf{L_5} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ y\frac{\partial f}{\partial y} + f\frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f\left(1 + y\frac{\partial}{\partial y}\right) & Ly\frac{\partial g}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & y\left(\frac{\partial h}{\partial x} + f\frac{\partial}{\partial y}\right) & 0 \end{pmatrix} . \tag{2.53}$$

Esta ecuación parabólica debe ser resuelta de nuevo con las condiciones de contorno en el eje ($y$=0)

$$F(0,x) = G(0,x) = 0,\ \frac{dH}{dy}|_{y=0} = 0,\ (n=0), \tag{2.54}$$

$$F(0,x) \pm iG(0,x) = 0,\ \frac{dF}{dy}|_{y=0} = 0,\ H(0,x) = 0,\ (n=\pm 1)\,, \tag{2.55}$$

$$F(0,x) = G(0,x) = H(0,x) = 0,\ (|n| > 1)\,; \tag{2.56}$$

y en la pared del conducto ($y$=1)

$$F(1,x) = G(1,x) = H(1,x) = 0\,. \tag{2.57}$$

Además de ellas se necesita una condición inicial en $x$=$x_0$. Una elección apropiada es la solución del problema de autovalor local (Bertolotti *et al.*, 1992, Fernández Feria, 1999)

$$\mathbf{L}_0 \cdot \mathbf{S}_0 \equiv \left[\mathbf{L}_1 + a_0\mathbf{L}_2 + \frac{1}{Re}\mathbf{L}_3 + a_0^2\frac{1}{Re}\mathbf{L}_4 + \Delta\mathbf{L}_5\right] \cdot \mathbf{S}_0 = \mathbf{0}\,, \tag{2.58}$$

que nos proporciona el valor inicial $a_0 \equiv a(x_0)$, y la autofunción $S_0(y) \equiv S(y, x_0)$ que se emplea para arrancar la integración de la ecuación (2.48) para un conjunto dado de parámetros adimensionales. Es importante reseñar, además, que el análisis de estabilidad espacial que se considera en este apartado (frecuencia $\omega$ real y número de onda complejo $a_0$) es el único apropiado para el análisis de estabilidad basado en la técnica *PSE* (Bertolotti *et al.*, 1992). Es decir, la resolución de la ecuación (2.58) con las condiciones de contorno (2.54)-(2.57) y para un flujo básico paralelo de Hagen-Poiseuille con una rotación como sólido rígido coincide con el mismo problema de autovalores no lineal resuelto en la sección anterior.

La ecuación (2.58) cuenta con el efecto no paralelo del flujo básico, pero desprecia el efecto de la evolución convectiva de las perturbaciones. La solución de (2.58) se denotará como solución casi-paralela de ahora en adelante. Esta solución casi paralela será comparada en la siguiente sección con la solución del método *PSE* (2.48) para diferentes valores de $x$ ($x > x_0$) y así conocer la importancia del efecto de la historia de las perturbaciones.

### 2.3.4. Condición de normalización y método numérico.

El método *PSE* descompone la influencia de la coordenada $x$ en las perturbaciones en dos partes. En primer lugar, una variación lenta que representa la amplitud y, en segundo lugar, la parte exponencial o de crecimiento rápido, donde se incluyen las características de la fase y la frecuencia de la onda.

Existe, por tanto, una ambigüedad en la partición de las perturbaciones en dos funciones dependientes de $x$. Para poder cerrar el problema se ha de imponer una condición adicional que suponga una restricción a la variación axial de $\mathbf{S}$. A esta condición se le denomina de normalización y, básicamente, se usa aquella que limita las variaciones axiales en $\mathbf{S}$, según la pequeña variación axial del flujo básico (pequeño $\Delta$). De esta forma, la velocidad de crecimiento de las perturbaciones y la variación axial se representan como una función exponencial. Se pueden emplear muchos tipos de condiciones de normalización ( Bertolotti *et al.*, 1992, Herbert, 1997, Fernández Feria, 1999). En esta sección se usará la condición integral basada en la energía cinética de las perturbaciones. Si se define el crecimiento de la amplificación física basada en la variación de la energía cinética de las perturbaciones como $a_1(x)$,

$$a_1(x) \equiv \gamma_1(x) + i\alpha_1(x) \equiv R\,\frac{\int_0^R \left[\overline{u}^\dagger \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} + \overline{v}^\dagger \frac{\partial \overline{v}}{\partial z} + \overline{w}^\dagger \frac{\partial \overline{w}}{\partial z}\right] dr}{\int_0^R \left[|\overline{u}|^2 + |\overline{v}|^2 + |\overline{w}|^2\right] dr}$$

$$= a(x) + \Delta \frac{\int_0^1 \left[F^\dagger \frac{\partial F}{\partial x} + G^\dagger \frac{\partial G}{\partial x} + H^\dagger \frac{\partial H}{\partial x}\right] dy}{\int_0^1 \left[|F|^2 + |G|^2 + |H|^2\right] dy}\,, \tag{2.59}$$

donde $\dagger$ indica el complejo conjugado, la condición de normalización puede ser expresada como $a_1(x) = a(x)$ para cualquier $x > x_0$. Para una coordenada axial constante en la integración de (2.48), el segundo término del segundo miembro de (2.59) (aquél que multiplica a $\Delta$) es cero, transfiriendo de esta forma la parte principal de la variación axial de las perturbaciones a la función exponencial.

Para resolver numéricamente la ecuación (2.48) junto con la condición de normalización, la dependencia radial ($y$) de $\mathbf{S}$ se discretiza usando el mallado espectral de colocación dados por los polinomios de Chebyshev, tal y como se ha descrito en la sección 2.2.2. El número de puntos radiales, $N$, usado es de nuevo 50, el cual se demuestra más que suficiente para obtener una precisión en la quinta cifra decimal.

La variación del flujo (2.48) se resuelve de forma numérica utilizando un esquema de diferencias finitas implícito:

$$\mathbf{L}_{j+1} \cdot \mathbf{S}_{j+1} + \Delta \mathbf{M} \cdot \frac{\mathbf{S}_{j+1} - \mathbf{S}_j}{(\delta x)_j} = \mathbf{0}\,, \tag{2.60}$$

donde $j$ es el índice del intervalo espacial en la dirección axial y $(\delta x)_j$ el incremento en dicha dirección. La forma de proceder para la resolución de las 4N ecuaciones discretizadas resultantes del sistema (2.60) es la siguiente. Se comienza en $x = x_0$, y en esta posición axial se calcula el autovalor complejo $a_0 = a(x_0)$, junto con la también desconocida autofunción $\mathbf{S_0} = \mathbf{S}(x = x_0)$. Una vez conocido $a_0$ y $\mathbf{S_0}$ se comienza a iterar el sistema de ecuaciones no lineal (2.60) junto con la condición de normalización para resolver $a(x)$ y $\mathbf{S}(x)$ (con $x > x_0$) en la posición $j+1$. Este procedimiento iterativo continua hasta que las modificaciones en la parte real e imaginaria de $a(x)$ sean menores a una cierta tolerancia fijada en $10^{-8}$ (entre 2 y 4 iteraciones son suficientes, excepto en la posición $j = 1$, donde se requieren más iteraciones). El proceso se repite para cada $j$ hasta que $x$ alcanza la posición final ($x = 1$). Las inestabilidades numéricas imponen un límite inferior en el incremento espacial $(\delta x)_j$ para valores dados de los parámetros físicos y de $N$. Este límite afecta en gran medida a la exactitud de la función $a(x)$ que se obtiene numéricamente. Para tener más control sobre las inestabilidades numéricas se utiliza una técnica descrita por Anderson *et al.* (1998), que permite el uso de pequeños $\delta x$ en los esquemas numéricos y, en consecuencia, mejoran la exactitud de la solución. Gracias a este método se pueden alcanzar valores de $\delta x$ lo suficientemente pequeños como para obtener $a(x)$ con 4 ó 5 cifras significativas.

Como ya se ha mencionado, el problema de autovalores no lineal (2.58) se ha resuelto exactamente igual a como ya se ha descrito en el apartado 2.2.2.

## 2.4. Resultados de la estabilidad no paralela y discusión.

### 2.4.1. Comparación entre los resultados casi paralelos y los del *PSE*.

En este momento ya es conocido que los valores iniciales del método *PSE* (2.48) son los autovalores y las autofunciones de (2.58) en la posición inicial $x = x_0$. Antes de caracterizar las propiedades del flujo con este método, es interesante comparar la función $a(x)$ calculada mediante (2.58) en el rango $x_0 \leq x \leq 1$ con los resultados obtenidas con la técnica *PSE*.

La figura 2.15 muestra la comparación para el caso $Re = 100$ y $L = 0{,}5$ cuando la frecuencia de perturbación es $\omega = -1$ y el número de onda azimutal es $n = -1$ (la longitud del conducto es $\Delta^{-1} = 100$). Para estas condiciones, el flujo de Hagen-Poiseuille con la superposición de una rotación como sólido rígido a la salida del conducto es estable (en realidad, el flujo asintótico aguas abajo es estable para estos valores de $Re$ y $L$ para cualquier perturbación). Por lo tanto se espera que $\gamma(x) < 0$ para cualquier valor de $x$. Este hecho se muestra en la figura 2.15, donde se representan las funciones $\gamma(x) = \gamma_{CP}$ y $\alpha(x) = \alpha_{CP}$ para $x_0 = 0{,}015 \leq x \leq 1$ obtenidas mediante la aproximación casi paralela que utiliza la ecuación (2.58) (especificada mediante los subíndices *CP*) para los tres modos menos estables (líneas con círculos). También se representan en línea continua los resultados obtenidos mediante la técnica *PSE* para estos tres modos menos estables. Se observa que el modo menos estable de los tres modos aguas abajo es el segundo menos estable en $x_0$ y el que llega a ser el menos estable al final del conducto [que coincide, claro está, con el de la figura 2.4(b)]. El cruce entre los modos menos estables a lo largo del conducto es una característica común en casi todos los casos considerados por lo que, en las siguientes secciones, no sólo se considerará la evolución axial del modo menos estable en $x = x_0$, sino que será también necesario seguir la evolución axial de varios modos iniciales. Se deduce también de la figura 2.15 que los valores asintóticos se alcanzan prácticamente en $x \simeq 0{,}2$ donde el flujo de Hagen-Poiseuille con la superposición de una rotación como sólido rígido ya se ha desarrollado. La figura 2.15 muestra además las funciones $\gamma_{PSE}(x)$ y $\alpha_{PSE}(x)$ calculadas a partir de (2.58) cuando la integración comienza en $x = 0{,}015$ con la formulación no paralela para los distintos modos descritos (líneas continuas, $\delta x = 0{,}005$ en la integración numérica). Se puede ver cómo estas funciones fluctúan antes de alcanzar la asíntota aguas abajo, excepto en el modo menos estable al final del conducto. Sin embargo, es significativo el hecho de que las funciones $\gamma_{PSE}(x)$ y $\alpha_{PSE}(x)$, correspondientes al modo inicial que aguas abajo se convierte en el menos estable, no contengan fluctuaciones considerables. Esta característica garantiza que el *PSE* nos proporciona la información más relevante desde el punto de vista físico sobre la estabilidad del flujo. Esto último sucede en todas las secciones que son consideradas a continuación. Además debe añadirse que los resultados del *PSE*, además de ser físicamente más precisos que los de la formulación casi paralela (ya que se tiene en cuenta la *'historia'* de las perturbaciones), son considerablemente menos costosos de obtener numéricamente: el tiempo de *CPU* para obtener toda la curva $\gamma_{PSE}(x)$ de la figura 2.16 es del orden del tiempo de CPU para obtener un solo punto de $\gamma_{CP}(x)$ [2].

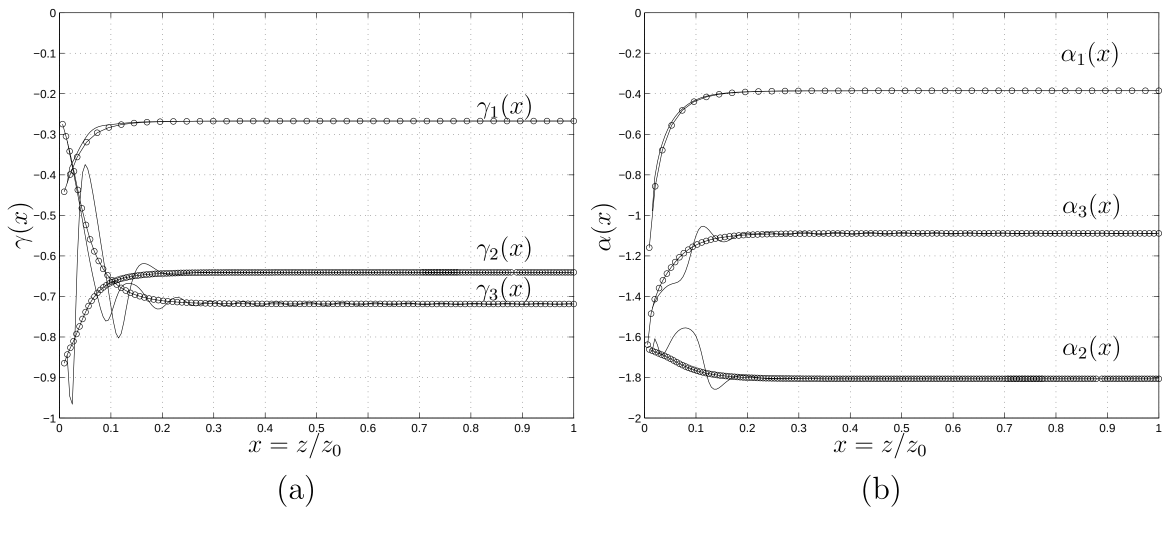



Figura 2.15: (a): $\gamma_{PSE}(x)$ (líneas continuas) y $\gamma_{CP}(x)$ (líneas con círculos). (b): $\alpha_{PSE}(x)$ (líneas continuas) y $\alpha_{CP}(x)$ (líneas con círculos). $Re = 100$, $L = 0{,}5$, $\Delta^{-1} = 100$, $\omega = -1$, $n = -1$; $x_0 = 0{,}015$, $\delta x = 0{,}005$. Se muestra la evolución axial de los tres modos más inestables.

[2]Tiempo de *CPU* en un ordenador Origin 2000 de 16 procesadores en paralelo de 200 MHz y 4Gb de memoria *RAM*.

A continuación se exponen algunos comentarios acerca de la exactitud de los resultados del método *PSE*. Todos los resultados dados en esta sección se obtienen con $\delta x$=0.005 que es el valor más pequeño que permite que el método numérico empleado sea estable, después de aplicar la técnica de estabilización descrita por Anderson *et al.* (1998). Este valor de $\delta x$ es lo suficientemente pequeño para obtener las evoluciones $\gamma(x)$ y $\alpha(x)$ del modo que llega a ser el menos estable (el modo físico) con 4 ó 5 cifras decimales significativas como se observó para los resultados obtenidos con $\delta x$=0.006, 0.007 y 0.01 (no mostrados). Sin embargo, la evolución axial de los modos que fluctúan varía significativamente a medida que $\delta x$ aumenta corroborando nuevamente que este comportamiento tiene un origen puramente numérico. Por lo tanto, el uso de distintos valores de $\delta x$ es importante no sólo para conocer la precisión de los resultados, sino también para descartar los modos que no son físicos. Lo mismo puede decirse con relación a la coordenada axial inicial $x = x_0$ (se ha seleccionado $x_0$=0.01 en análisis posteriores), ya que la evolución axial del modo físicamente relevante (menos estable) es independiente de ésta. Sin embargo, la evolución de los modos que fluctúan y se cruzan, más estables al final del conducto, depende de estos parámetros numéricos ($x_0$,$\delta x$).

La diferencia entre $\gamma_{CP}(x)$ y $\gamma_{PSE}(x)$ para el modo físico en la figura 2.15 es en realidad muy pequeña por lo que se podría pensar que la única ventaja de utilizar el método *PSE* es puramente computacional. No obstante, esto no ocurre cuando el flujo se hace inestable, tal y como se muestra en la figura 2.16. En ella, se considera el caso $Re$ = 500 y $L$ = 0,5 en un conducto de longitud $\Delta^{-1}$ = 400, para perturbaciones de frecuencia $\omega = -0{,}1$ y $n = -1$. Estos valores de $Re$ y $L$ se corresponden a uno de los casos analizados experimentalmente por Imao *et al.* (1992) (véase en la siguiente sección). Según se ha visto en el apartado 2.1.4 este flujo es inestable para esos valores de $\omega$ y $n$. Obviamente, los valores asintóticos aguas abajo de $a_{PSE}$ y $a_{CP}$ (recuérdese que $a$=$\gamma$+$i\alpha$) coinciden en ambos casos ya que se obtienen los mismos resultados cuando el flujo ya se ha desarrollado debido a que la derivada axial es despreciable en (2.48). Los resultados en la posición axial inicial $x = x_0 = 0{,}01$ son también los mismos porque $a_{PSE}$ usa (2.58) como condición inicial del método *PSE*. Sin embargo, la evolución axial de $a(x)$ es bastante diferente en ambos casos, particularmente cerca de la posición axial donde el flujo se hace inestable ($\gamma = 0$). En consecuencia, las predicciones de la inestabilidad, que se relacionan con la localización de la coordenada donde el flujo es inestable, la frecuencia, la longitud de onda y el número de onda de la perturbación que llega a ser inestable son diferentes en las dos formulaciones. Esto puede apreciarse mejor el figura 2.17, donde las propiedades de estabilidad del flujo ($Re = 500$, $L = 0{,}5$) de acuerdo con las dos formulaciones se comparan para un amplio intervalo de frecuencias, y para los modos $n = -1$ y $n = -2$. Las perturbaciones con $n = -1$ se hacen inestables en $x/\Delta \equiv z/R \simeq 12$ para $\omega \simeq -0{,}15$ según la formulación casi paralela (2.58), y en $z/R \simeq 10$ para $\omega \simeq -0{,}1$ de acuerdo con el método *PSE* (2.48); mientras que las perturbaciones con $n = -2$ lo hacen en $z/R \simeq 16$, $\omega \simeq -0{,}5$ siguiendo a (2.58), y en $z/R \simeq 12{,}4$, $\omega \simeq -0{,}47$ según el *PSE*.

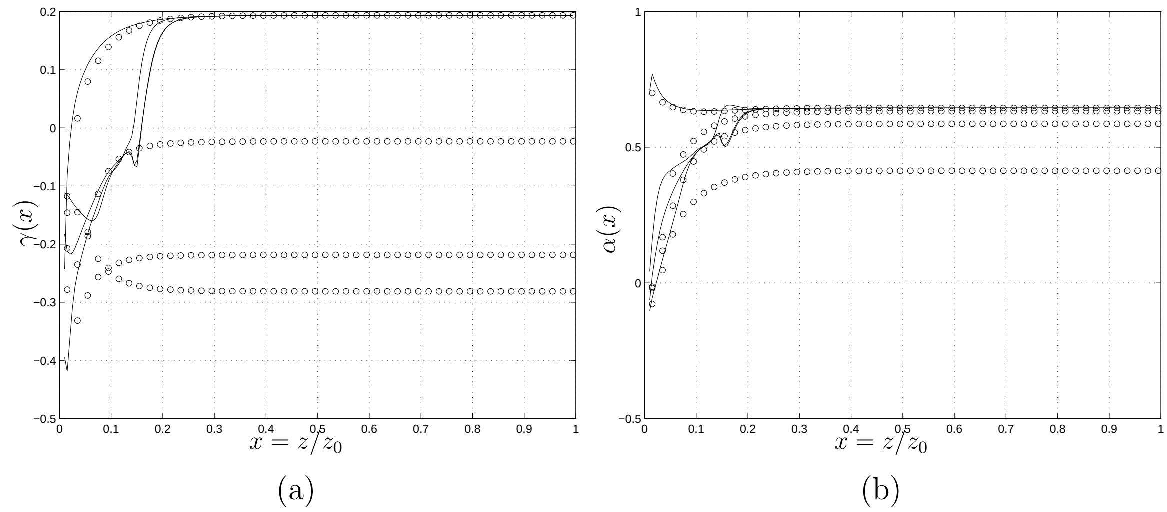
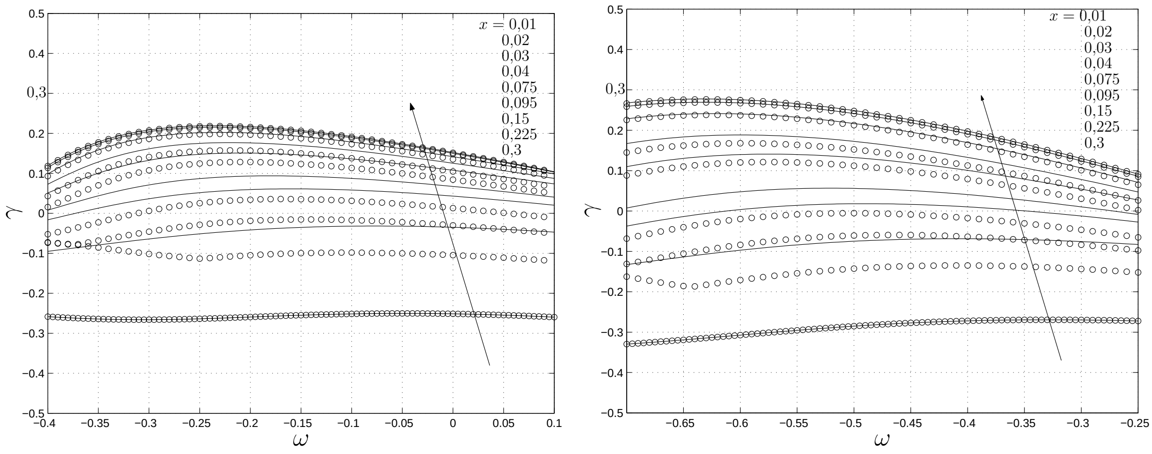


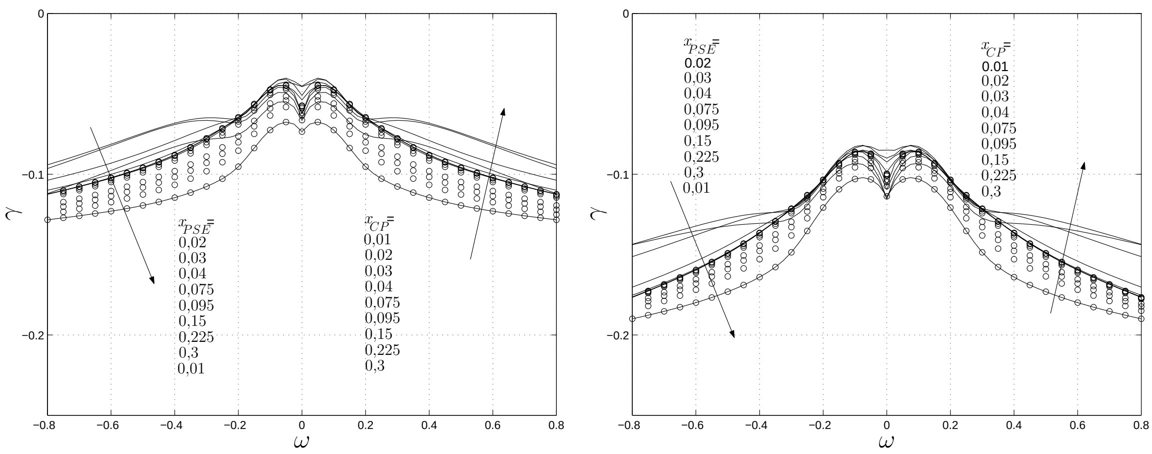

Figura 2.16: Como en la figura 2.15, pero para $Re = 500$, $L = 0{,}5$, $\Delta^{-1} = 400$, $\omega = -0{,}1$, $n = -1$; $x_0 = 0{,}01$, $\delta x = 0{,}005$ y los cuatro modos menos estables.

Antes de finalizar este apartado, es interesante presentar algunos resultados para el caso del flujo sin giro, esto es, con el parámetro de giro nulo ($L = 0$). Como es conocido, el flujo de Hagen-Poiseuille es siempre linealmente estable (ver, por ejemplo, Cotton y Salwen, 1981). Además como no hay componente de velocidad azimutal, los resultados de la inestabilidad son simétricos con respecto a $\omega$=0, para un número de onda $n$ dado. La figura 2.18 muestra $\gamma(\omega)$ para $Re$ = 500, $n$=-1 y $n$=-2 y diferentes valores de $x$. Sólo se muestra el modo menos estable. La diferencia entre $\gamma_{CP}$ y $\gamma_{PSE}$ es tan importante como la ya observada en la figura 2.17 para $L = 0{,}5$ pero, en este caso, no existen consecuencias físicas de estabilidad del flujo porque es estable para cualquier perturbación. La comparación entre las evoluciones axiales del modo menos estable obtenidos para ambas formulaciones con $\omega$=-0.06 se representan en la figura 2.19.




(a) (b)

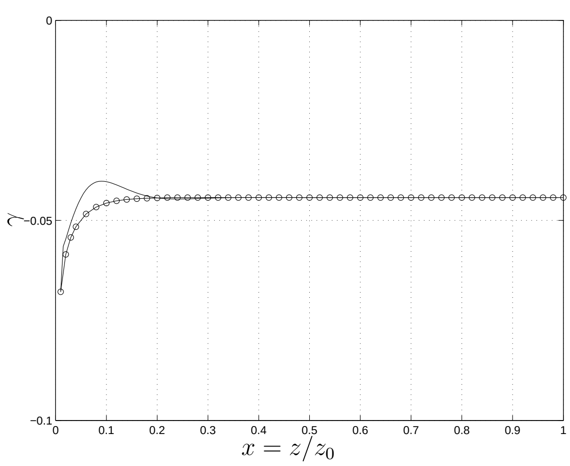
Figura 2.17: Comparación entre $\gamma_{PSE}$ (líneas continuas) y $\gamma_{CP}$ (puntos) para distintos valores de $x$ en función de $\omega$, para perturbaciones con $n = -1$ (a) y $n = -2$ (b), para un flujo con giro con $Re = 500$, $L = 0{,}5$ y $\Delta^{-1} = 400$.



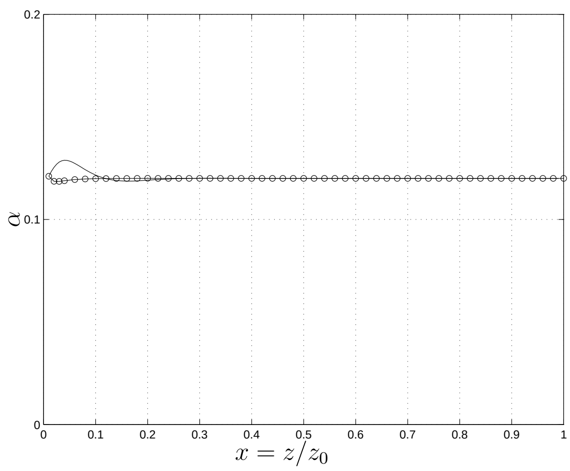

(a) (b)

Figura 2.18: Comparación entre $\gamma_{PSE}$ (líneas continuas) y $\gamma_{CP}$ (círculos) para distintos valores de $x$ en función de $\omega$, para perturbaciones con $n = -1$ (a) y $n = -2$ (b), de un flujo sin giro ($L = 0$) con $Re = 500$ y $\Delta^{-1} = 400$.

Por todo lo expuesto en este apartado se concluye que el uso del método *PSE* es básico para caracterizar de una forma correcta el principio de la inestabilidad espacial del flujo. Por esta razón, todos los resultados que se muestran desde ahora hasta el final del capítulo se obtienen empleando esta formulación, salvo que se indique lo contrario.




(a)




(b)

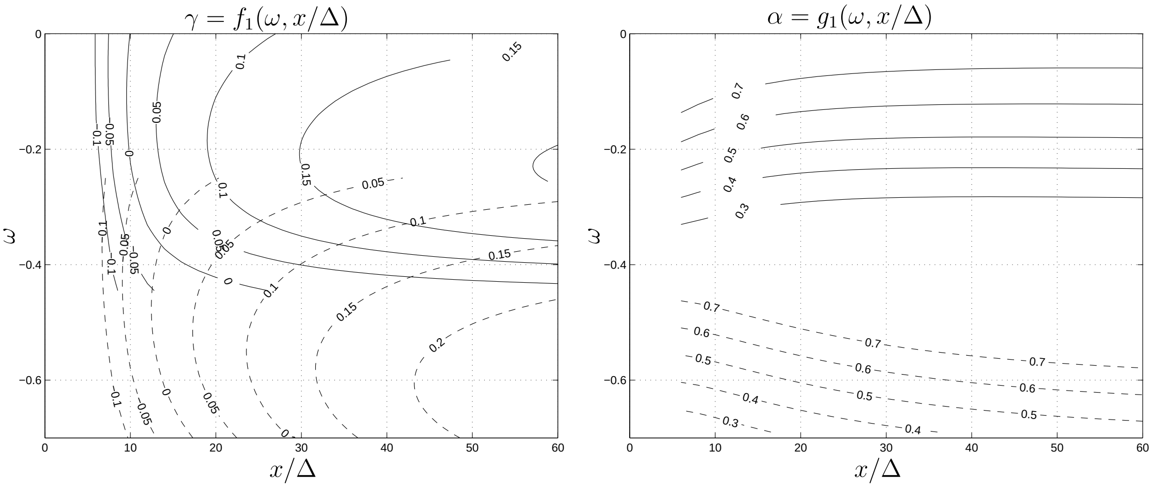
Figura 2.19: (a): $\gamma_{PSE}(x)$ (línea continua) y $\gamma_{CP}(x)$ (líneas con círculos). (b): $\alpha_{PSE}(x)$ (línea continua) y $\alpha_{CP}(x)$ (líneas con círculos). $Re = 500$, $L = 0{,}0$, $\Delta^{-1} = 400$, $\omega = -0{,}06$, $n = -1$; $x_0 = 0{,}01$ y $\delta x = 0{,}005$. Sólo se muestra el modo más inestable.

### 2.4.2. Comparación entre los resultados del *PSE* y los resultados experimentales.

En esta sección se consideran tres de los casos que fueron analizados experimentalmente por Imao *et al.* (1992) con más detalle. Haciendo uso de la anemometría láser Doppler y de análisis de espectros de frecuencia y dispositivos ópticos, los autores caracterizaron la aparición de ondas helicoidales en el flujo axial de un conducto con giro para $Re = 500$ y varios valores del parámetro de giro, $L$. El flujo se desarrolla desde la entrada (con un campo de velocidad uniforme) hasta la salida del conducto (con el flujo de Hagen-Poiseuille con rotación como sólido rígido). No obstante, para ciertos parámetros de giro, el flujo fluctúa antes de que el estado estacionario se alcance. Los autores de este trabajo fueron capaces de caracterizar la frecuencia, la longitud de onda y el número de onda de las espirales que se forman después de que el flujo básico se inestabilice.

$Re = 500$ **y** $L = 0{,}5$**.**

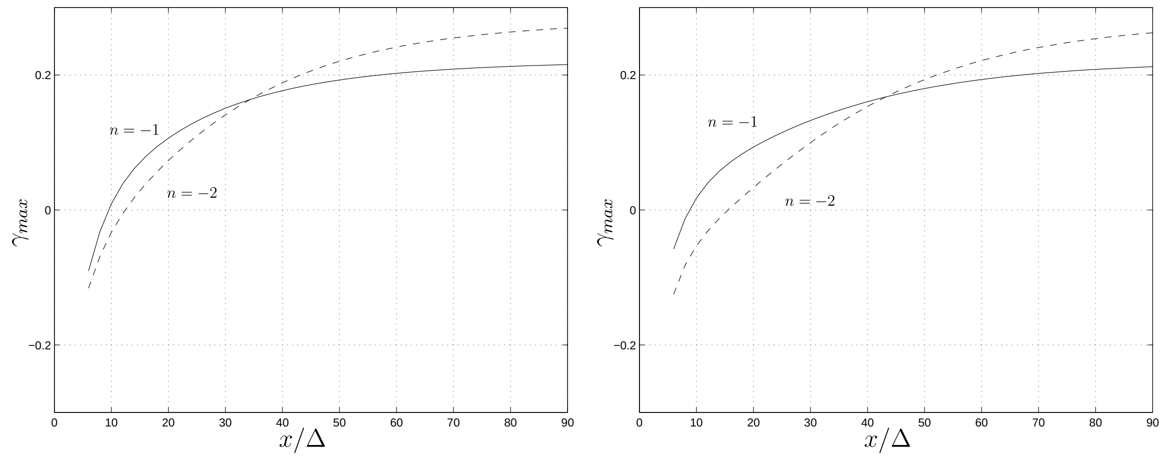
Los resultados del método *PSE* para este caso ya han sido mostrados por las figuras 2.16 y 2.17. La figura 2.20 muestra los isocontornos de $\gamma$ y $\alpha$ en el plano $(x, \omega)$ para el modo más inestable de $n = -1$ y $n = -2$. La longitud del conducto se fija en $\Delta^{-1} = 400$ para la simulación del flujo básico (siendo $x/\Delta = z/R$). La coordenada axial en el que el flujo se vuelve inestable se aprecia mejor en la figura 2.21(a), donde se han representado los valores de $\gamma$ máximo para $n = -1$ y $n = -2$ frente a la coordenada axial. Las frecuencias y las longitudes de onda asociadas a dicho $\gamma$ máximo se muestran en la figura 2.22. De los resultados se deduce que el flujo se vuelve inestable rápidamente (bajos $z/R$), mucho antes de que el flujo se haya desarrollado. En particular, el modo $n = -1$ es el primero que se hace inestable en $z/R \simeq 9{,}6$ [véase figura 2.21(a)], con una frecuencia de $\omega \simeq -0{,}1$, y un número de onda $\alpha \simeq 0{,}72$ (ver figura 2.22). Por otro lado, el modo con $n = -2$ se hace inestable justo después del $n = -1$, en $z/R \simeq 11{,}8$, con una velocidad de crecimiento de las perturbaciones que supera al del modo $n = -1$ siendo el más inestable cuando el flujo está totalmente desarrollado [figura 2.21(a)]. La frecuencia y el número de onda de este modo $n = -2$ cuando es inestable en $z/R \simeq 12{,}4$ son $\omega \simeq -0{,}47$ y $\alpha \simeq -0{,}72$, respectivamente (figura 2.22).




(a) (b)

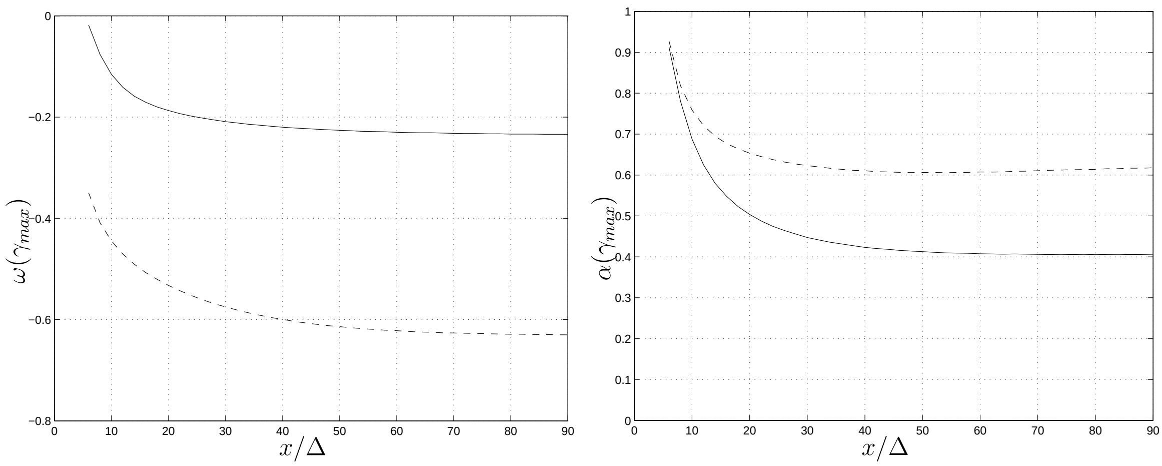
Figura 2.20: Isocontornos constantes de $\gamma$ (a) y $\alpha$ (b) en el plano $(x/\Delta, \omega)$ para los modos más inestables correspondientes a $n = -1$ (líneas continuas) y $n = -2$ (líneas a trazos). El caso considerado es $Re = 500$, $L = 0{,}5$, $\Delta^{-1} = 400$, $\delta x = 0{,}005$ y $x_0 = 0{,}01$ ($x_0/\Delta = 4$).

Los resultados experimentales de Imao *et al.* (1992) para este caso de $Re = 500$ y $L = 0{,}5$ ($Re_z = 500$, $N = 1$ en su notación) muestran que el flujo es inestable antes de que se desarrolle aguas abajo. Particularmente, en $z/R = 60$ los autores caracterizan una onda espiral (que ya es detectada, según ellos, con una menor intensidad en un primer lugar antes de $z/R = 30$) superpuesta al flujo básico con un número de onda azimutal $|n| = 2$, con una frecuencia que aproximadamente coincide con la frecuencia de rotación del conducto y una longitud de onda en torno a ocho veces el diámetro del




(a) (b)

Figura 2.21: Valores máximos de $\gamma$ frente a la coordenada $z/R$ de los casos representados en la figura 2.20. (a). Los mismos resultados pero para el flujo básico con la condición del flujo de Hagen-Poiseuille a la entrada (b).




(a) (b)

Figura 2.22: Valores de frecuencia (a) y el número de onda axial (b) de la velocidad de crecimiento de perturbaciones representada en la figura 2.21(a).

conducto. En nuestra notación estos valores se corresponden con $\omega \simeq -0{,}5$ y $\alpha \simeq 0{,}78$, respectivamente. Estos son cercanos a los teóricos encontrados con el método *PSE* para $n = -2$. Sin embargo, existen dos discrepancias importantes: la técnica *PSE* predice que el modo más inestable es $n = -1$ en lugar de $n = -2$ y el valor de la coordenada axial que predice el *PSE* está más aguas arriba que el valor experimental $z/R \simeq 30$. Se debe de admitir que existe una cierta imprecisión en la localización de la coordenada axial medida experimentalmente porque la perturbación debe manifestarse a una cierta distancia aguas abajo, después de que la velocidad de crecimiento sea positiva antes de que se manifieste físicamente. Además, los resultados del *PSE* muestran que la velocidad de crecimiento para $n = -2$ crece con $x$ más rápido que para $n = -1$ sobrepasándolo en $z/R \simeq 33$ [figura 2.21(a)], por lo que es en $z/R = 60$ donde la onda espiral describe el modo más inestable que se corresponde con $n = -2$. Estas dos circunstancias deben explicar el porqué la onda espiral observada se corresponde con $n = -2$ y, de esta forma, existe concordancia entre las frecuencias y las longitudes de onda experimentales y las teóricas ($\omega \simeq -0{,}5$ y $\alpha \simeq 0{,}78$ en los experimentos, $\omega \simeq -0{,}47$ y $\alpha \simeq 0{,}72$ con el método *PSE*).

En las figuras 2.21(b) y 2.23 se han incluido los resultados que se obtienen para el flujo básico con los mismos parámetros ($Re = 500$, $L = 0{,}5$) pero con diferentes condiciones de contorno a la entrada del conducto para el flujo básico. En lugar de la velocidad axial uniforme en la entrada se considera el caso en el que el flujo entra en el conducto con un perfil de velocidad axial de Hagen-Poiseuille ya desarrollado y, por supuesto, sin rotación, ya que ésta se desarrolla a lo largo del conducto. Esta condición en la entrada no se corresponde con el montaje experimental de Imao *et al.* (1992), pero es interesante para conocer cómo varían los resultados de la inestabilidad si se cambian las condiciones de contorno en la entrada. Se observan que los resultados para $n$=-1 son similares aunque existen diferencias importantes para $n$=-2, en particular para el número de onda axial [comparar las figuras 2.23(b) y 2.22(b)], y para la coordenada donde el flujo se hace inestable [comparar las figuras 2.21(a) y 2.21(b)].

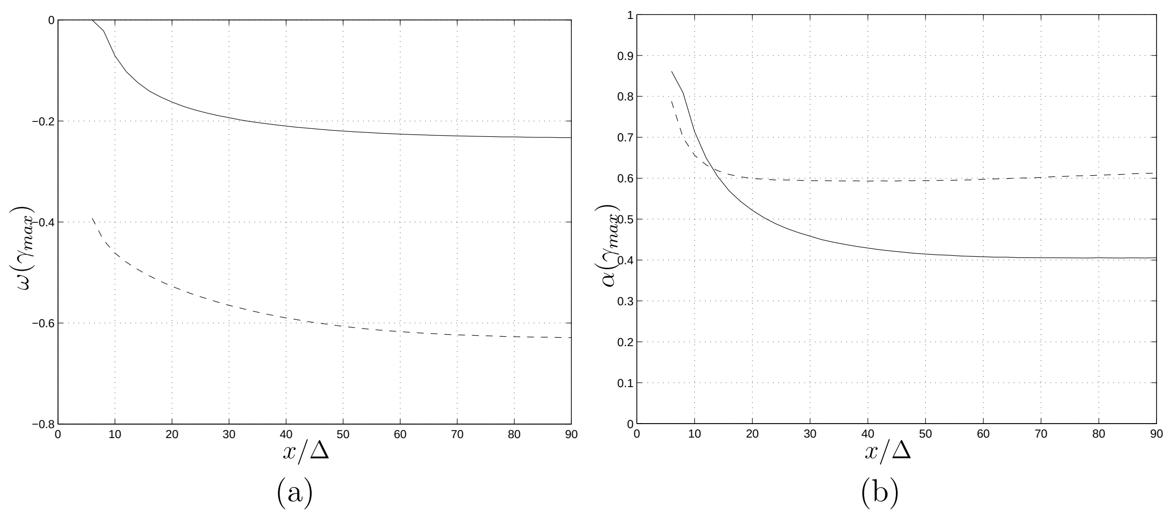



Figura 2.23: Valores de la frecuencia $\omega$ (a) y número de onda axial $\alpha$ (b) correspondientes a la velocidad de crecimiento de la perturbación máxima ($\gamma_{max}$) representada en 2.21(b).

$Re = 500$ **y** $L = 1$**.**

La comparación anterior entre las perturbaciones con los modos $n = -1$ y $n = -2$ es más evidente para el caso $L = 1$. Para este parámetro de giro Imao *et al.* (1992) ($Re_z = 500$ y $N = 2$ en su notación) afirmaron que existen dos tipos de espirales que aparecen de forma alterna. De hecho, los resultados del método *PSE* muestran que los valores máximos de la velocidad de crecimiento de la perturbación para los modos $n = -1$ y $n = -2$ están muy cercanos el uno al otro en la región de entrada del conducto [véase la figura 2.24(a)]. Por otra parte, las frecuencias que se corresponden a $\gamma(x) = 0$ para $n = -1$ y $n = -2$ están en concordancia de una forma más que notable con los resultados experimentales: Imao *et al.* encuentra que $|\omega/n| \simeq 0{,}7$, resultado que concuerda bastante bien con los resultados $\omega \simeq 0{,}65$ para $n = -1$ y $\omega \simeq -1{,}3$ para $n = -2$ [figura 2.24(b)].

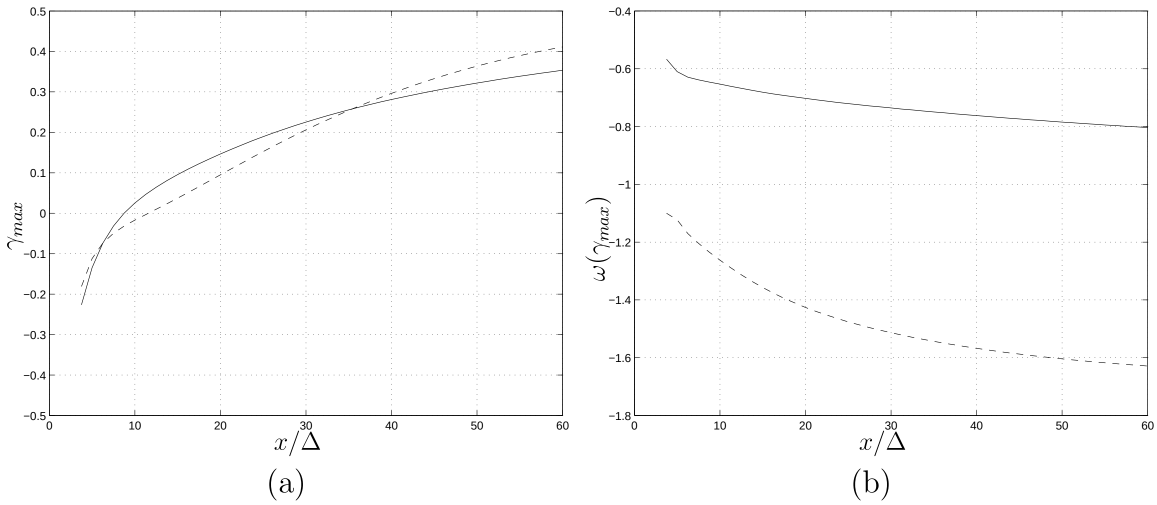



Figura 2.24: Valores máximos de $\gamma$ (a) y sus frecuencias correspondientes (b) en función de $z/R$ para $Re = 500$ y $L = 1$. Las líneas continuas se corresponden con el modo $n = -1$ y las discontinuas con el modo $n = -2$.

$Re = 500$ **y** $L = 1{,}5$**.**

La figura 2.25 muestra las superficies $\gamma(\omega; x)$ y $\alpha(\omega; x)$ para los modos menos estables con $n = -1$ y $n = -2$ obtenidos con el *PSE* para este caso (la longitud del conducto en la simulación numérica del flujo básico sigue siendo $\Delta^{-1} = 400$). Los valores máximos de

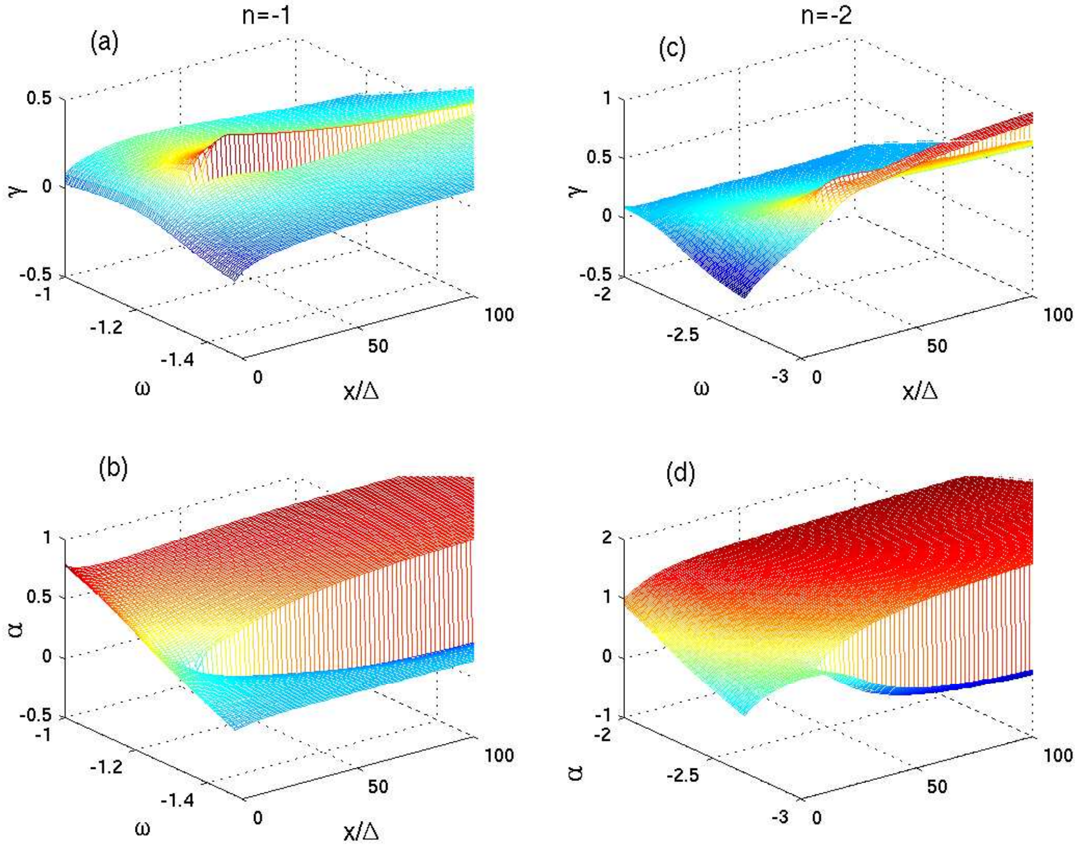



Figura 2.25: Superficies $\gamma(\omega, x/\Delta)$ y $\alpha(\omega, x/\Delta)$ para $Re = 500$ y $L = 1{,}5$. $n = -1$ [(a) y (b)], y $n = -2$ [(c) y (d)]. $x_0 = 0{,}01$ ($x_0/\Delta = 4$) y $\delta x = 0{,}005$.

$\gamma$ a lo largo del conducto se han representado en la figura 2.26 para los modos $n = -1$ y $n = -2$. Los valores correspondientes de la frecuencia, $\omega$, y la longitud de onda axial, $\alpha$, se muestran en la figura 2.27. De acuerdo con estas figuras, el flujo se vuelve inestable en $z/R \simeq 5{,}5$ para una perturbación con $n = -1$, $\omega \simeq -1{,}2$ y $\alpha \simeq 0{,}41$. Los experimentos de Imao *et al.* (1992) para este caso ($Re_z = 500$ y $N = 3$ en su notación) muestran que en $z/R \simeq 26$ ya existe una onda espiral de número de onda azimutal $|n| = 1$, con una frecuencia de 0,8 veces la frecuencia de rotación del conducto y una longitud de onda de 10 veces el diámetro, que en nuestra notación se corresponde a $\omega \simeq -1{,}2$ y $\alpha \simeq 0{,}32$, respectivamente. Estos valores experimentales de $n$, $\omega$ y $\alpha$ son similares a los predichos por el método *PSE* (como ya se ha discutido anteriormente, la coordenada donde la onda espiral se detecta en primer lugar experimentalmente debe ubicarse aguas abajo de la coordenada donde la velocidad de crecimiento $\gamma$ se hace positiva).

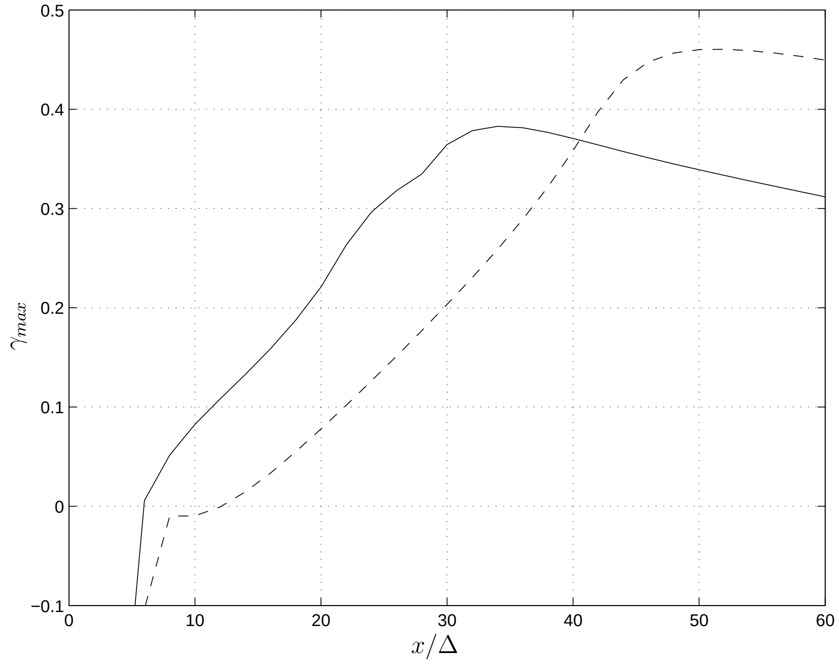
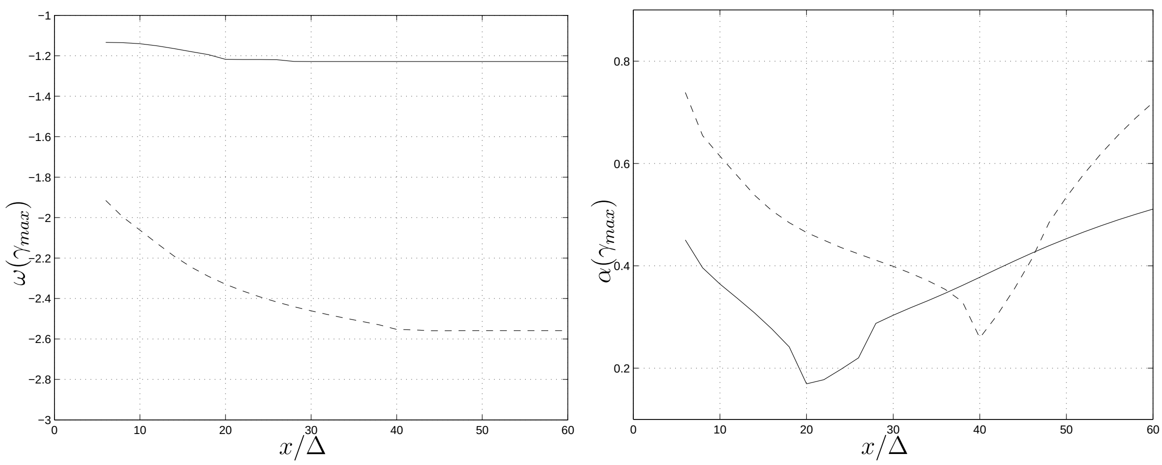



Figura 2.26: Valores máximos de $\gamma$ en función de $z/R$ para $Re = 500$ y $L = 1{,}5$. La línea continua es del modo $n = -1$ y la discontinua para $n = -2$.

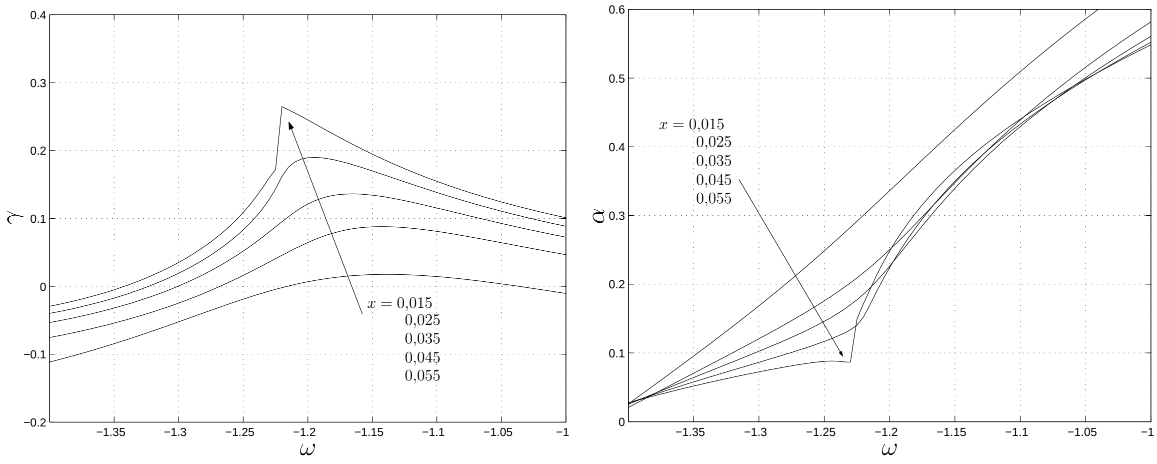



(a) (b)

Figura 2.27: Frecuencia (a) y número de onda axial (b) correspondientes a las funciones $\gamma(x)$ representadas en la figura 2.26 para el modo $n = -1$ (línea continua) y $n = -2$ (línea discontinua).

Una diferencia importante en el presente caso con respecto a aquellos considerados en secciones anteriores es que el flujo de Hagen-Poiseuille con giro con un número de Reynolds $Re = 500$ y un parámetro de giro $L = 1{,}5$ no es tan solo un flujo convectivamente inestable, sino que también lo es absolutamente (ver figura 2.10). Por lo tanto, este caso sirve para validar si la inestabilidad absoluta aparece antes de que el flujo se desarrolle aguas abajo (como ocurre con las inestabilidades convectivas descritas en las anteriores secciones) y, además, para analizar la formación de la inestabilidad absoluta en el flujo que se desarrolla axialmente. De hecho, la figura 2.25(b) muestra para $n = -1$ que con $z/R \simeq 22$ ($x \simeq 0{,}055$) existe un punto de silla en el número de onda $\alpha(\omega; x)$ para $\omega \simeq -1{,}23$ que coincide con el punto cúspide de $\gamma(\omega; x)$ en la figura 2.25(a) (la inestabilidad convectiva para $n = -1$ aparece aguas arriba en $z/R \simeq 5$). Este comportamiento que, de acuerdo con el criterio de Briggs-Bers debe indicar el principio de inestabilidad absoluta (véase por ejemplo Huerre y Monkewitz, 1990) se aprecia mejor en la figura 2.28, donde se representan las secciones transversales $\gamma(\omega)$ y $\alpha(\omega)$ de las figuras 2.25(a) y (b) para distintos valores de $x$. En $x \simeq 0{,}055$, tanto $\partial\alpha/\partial\omega$ como $\partial\gamma/\partial\omega$ se vuelven infinito para $\omega \simeq -1{,}23$, debido a que existe un punto de silla de $\alpha$ y un punto cúspide para $\gamma$, respectivamente; por lo que la velocidad de grupo compleja $v_g = \partial\omega/\partial\alpha + i\partial\omega/\partial\gamma$ se anula. Ésta es una condición necesaria, aunque no suficiente, para que exista la inestabilidad absoluta en el flujo. No obstante, ya se ha afirmado en la sección 2.2.4. que la condición de $v_g$=0 se relaciona con el principio de la inestabilidad absoluta para un flujo de Hagen-Poiseuille con la imposición de una rotación como sólido rígido, por lo que se puede pensar que esto también ocurre cuando el flujo se desarrolla (no es fácil caracterizar la fusión de las dos ramas espaciales de la relación de dispersión con la formulación *PSE*). Por todo lo argumentado, el flujo se vuelve absolutamente inestable según un criterio de Briggs-Bers antes de que el flujo se desarrolle. Un comportamiento similar aparece para $n = -2$ pero más aguas abajo, en $z/R \simeq 44$ ($x \simeq 0{,}11$) para $\omega \simeq -2{,}56$ [ver las figuras 2.25(c) y (d)]. Sin embargo, el análisis de estabilidad espacial en el que se basa la técnica *PSE* no es válido una vez que el flujo es absolutamente inestable en $z/R \simeq 22$ para $n = -1$.

Con relación a los resultados experimentales de Imao *et al.* (1992), estos autores afirman que aparecen fluctuaciones en el caso de $L = 1{,}5$ son mucho mayores que en los casos previamente considerados. En $z/R = 60$ la amplitud de las fluctuaciones llega a ser del 30 por ciento con respecto a la velocidad axial máxima. Este aspecto debe estar relacionado con la aparición de la inestabilidad absoluta. Aguas abajo, no obstante, el flujo es turbulento. El fenómeno de la **RV** no fue confirmado en este trabajo experimental. Por consiguiente, se ha analizado y estudiado de nuevo la estabilidad espacial de un flujo que es absolutamente inestable y que se caracteriza, además, por tener una velocidad axial toda ella positiva.




(a) (b)

Figura 2.28: $\gamma(\omega)$ para distintos valores de $x$ (a) y $\alpha(\omega)$ en los mismos $x$, para $Re = 500$, $L = 1{,}5$ y $n = -1$.

## 2.4.3. Conclusiones de la estabilidad no paralela.

Se ha realizado en esta sección un estudio de la estabilidad espacial no paralela de un flujo base del cual se habían obtenido previamente resultados experimentales. Se ha mostrado como el uso del método *PSE* es una herramienta útil y eficiente para analizar la estabilidad no paralela del flujo con giro que se desarrolla a lo largo de un conducto. Aunque el modo menos estable a la entrada del conducto no coincide, en general, con el modo más inestable a la salida, la técnica *PSE* siempre sigue de una forma correcta al modo que llega a ser el menos estable aguas abajo en el conducto. Cuando el flujo se convierte en inestable (convectivamente para perturbaciones no axilsimétricas) lo hace antes de alcanzar el flujo asintótico, esto es, el flujo de Hagen-Poiseuille con la superposición de la rotación como sólido rígido tal y como se presenta en los resultados de las experiencias previas de Imao *et al.* (1992). En realidad, existe una buena similitud entre las frecuencias experimentales, y los números de onda axiales y azimutales de las perturbaciones que observaron dichos autores. El método es también apropiado para detectar una de las condiciones que caracterizan la inestabilidad absoluta de un flujo que se desarrolla axialmente y que también aparece antes de que el flujo se desarrolle por completo. No obstante, más allá de la coordenada axial donde la perturbación tiene una velocidad de grupo compleja negativa, el presente análisis de estabilidad espacial en el que se basa la formulación *PSE* deja de ser válido. Por los resultados presentados en esta sección se propone este método para poder ser usado en el análisis de estabilidad espacial en otros flujos con giro que se desarrollen axialmente que puedan tener interés teórico y práctico.

# Capítulo 3

# Montaje experimental.

## 3.1. Introducción.

Se han realizado numerosas experiencias con la finalidad de visualizar y conocer con una mayor profundidad el efecto que el giro tiene sobre la estabilidad del flujo además de las propuestas para dar una explicación al fenómeno de la **RV** en conductos. En el presente trabajo se ha diseñado un aparato generador de flujos con giro para el estudio de las transiciones observadas en las simulaciones numéricas y se ha propuesto una geometría que, básicamente, consta de un depósito (o cuerpo exterior) cuya superficie interna tiene forma de tobera y en el que se ubica un cuerpo interior que gira libremente y que también posee una geometría lentamente variable basada en la función tangente hiperbólica. El mecanizado de los cuerpos ha sido posible gracias al uso de un torno numérico de grandes dimensiones (errores de décimas de milímetro)[1]. La sección entre ambos cuerpos es constante hasta una cierta posición axial, a partir de la cual se ha realizado una contracción de la sección, con el objeto de intensificar el chorro con giro (ver detalles más adelante). La geometría del experimento se ha elegido para cumplir una doble finalidad. En primer lugar, la forma del cuerpo interno simula la que poseen los cuerpos internos de muchas turbomáquinas hidráulicas (ver, por ejemplo, Kochevsky, 2001). En segundo lugar, la forma lentamente variable en la dirección axial facilita la simulación numérica axilsimétrica del flujo.

El fluido de trabajo es agua (100 %) y contiene o bien partículas disueltas de pequeño tamaño, en el caso que se quiera obtener información cuantitativa del flujo, o bien una

[1]Este mecanizado se ha realizado en la empresa Técnicas Andaluzas de Centrifugación S.A.L. de Córdoba. Las partes pequeñas han sido mecanizadas por el autor de la tesis en el Taller de Mecanizado de la Universidad de Málaga y de la Universidad de Córdoba con la ayuda de los técnicos del taller.

sal de sodio también disuelta que proporciona la fluorescencia necesaria para visualizar cualitativamente la estructura del flujo. Ambos tipos de partículas nunca se han usado simultáneamente.

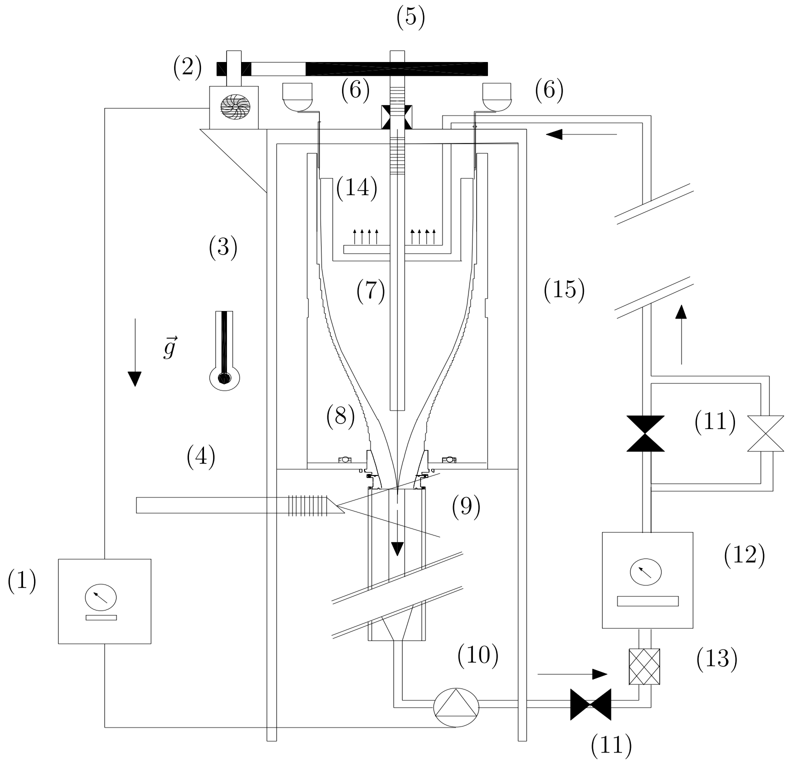
En el presente capítulo se abordará la descripción de todos los componentes, el diseño, los mecanismos necesarios, así como la descripción cualitativa y cuantitativa de flujo y la funcionalidad de cada una de las partes que constituyen el montaje experimental. Éste es el promotor de los futuros capítulos en los que primeramente se analizarán los resultados de la simulación numérica axilsimétrica y su relación con la estabilidad espacial (capítulo 4) para posteriormente discutir la correspondencia existente entre estos resultados y los experimentales (capítulo 5).

## 3.2. Descripción del montaje experimental.

### 3.2.1. Dimensiones, disposición y geometría del montaje.

Desde el punto de vista del fluido, un flujo de caudal $Q$ de fluido incompresible y viscosidad cinemática $\nu(T)$ entra en la cavidad del cuerpo interior, sale a través de un anillo circular de 10 mm de espesor y recorre la sección entre el cuerpo interior y exterior para desembocar en el conducto de sección uniforme. A continuación se detallarán las partes que componen el montaje experimental.

El aparato tiene una disposición vertical y está constituido, de forma general, por una estructura de aluminio que soporta un depósito y un cuerpo interior, ambos de nylon, un motor de corriente alterna con su caja reductora y control de velocidad que permite hacer girar el cuerpo interior, una zona de visualización y medida hecha de metacrilato, con un conducto en su interior de Polietileno tetrafluorado (FEP) y un tramo final de PVC. Esta última región se conecta a una bomba de impulsión ubicada a nivel del suelo que recircula el agua a la parte alta del aparato, pasando previamente por un filtro que elimina las posibles impurezas existentes en el agua y un caudalímetro de gran precisión (tolerancia de décimas de litros por hora). La información cualitativa del flujo se obtiene mediante la iluminación con un plano de luz láser que incide sobre una tinta fluorescente contenida en el fluido que permite la visualización del flujo, mientras que para obtener la información cuantitativa del campo de velocidad se utiliza la técnica *LDA* (del inglés, *Laser Doppler Anemometry*). El cañón láser que proporciona la pantalla bidimensional se posiciona en una barra de aluminio fijada a la estructura, mientras que el láser *LDA*, junto con su posicionador automático 2D, se apoya en una bancada adosada a la estructura. El esquema de cada uno de los componentes y su ubicación se refleja en la figura 3.1, en la que se adjunta una leyenda explicativa.




(1) Cuadro de mandos eléctricos
(2) Motor asíncrono
(3) Termómetro
(4) Láser *LDA* o 2D
(5) Sistema de poleas y correas
(6) Depósitos con fluoresceína
(7) Cuerpo interior
(8) Cuerpo exterior
(9) Zona de visualización y medida
(10) Bomba impulsora
(11) Válvulas de regulación de caudal
(12) Caudalímetro de precisión
(13) Filtro
(14) Depósito interior
(15) Estructura de aluminio

Figura 3.1: Esquema general del montaje experimental.

Para asegurar el correcto posicionamiento tanto horizontal como vertical de todos los componentes que se ubican en la estructura se ha empleado un nivel digital de precisión (tolerancia de una décima de grado). Para las uniones entre las distintas partes se ha procurado evitar las discontinuidades geométricas y la zona de visualización y medida es desmontable para dotar de una mayor versatilidad al sistema de conexiones y facilitar de este modo la limpieza de las distintas piezas.

Los cuerpos exterior e interior tienen 830 y 950 mm de longitud respectivamente. Este último tiene una cavidad o depósito interior de 220 mm (ver figura 3.1). La función analítica que describe la forma de ambos cuerpos se presentará en el siguiente capítulo, cuando se introduzca la geometría del conducto de sección variable para la simulación numérica axilsimétrica del flujo viscoso, y se comentarán además ciertos aspectos relacionados con la forma definitiva del cuerpo interior y su proceso de fabricación.

La zona de visualización y medida tiene 990 mm de longitud. La unión entre el depósito con esta última zona se realiza mediante dos piezas que se representan en la figura 3.2. En ella se distingue con detalle una primera pieza de nylon que sirve de unión entre el depósito y una plancha de aluminio en la cual se apoya. A continuación existe otra pieza que une ésta última con la zona de visualización y medida que está fabricada en metacrilato con una sección cuadrada y que contiene en su interior un tubo FEP de 56 $\pm 0.1$ mm de diámetro exterior y 0,5 mm de espesor. Por último, la zona de medida se conecta a la bomba impulsora mediante la contracción lineal de un conducto de PVC de 600 mm de longitud que tiene un diámetro exterior de 100 mm y uno interior de entrada y otro de salida de 55 mm y 16 mm, respectivamente. La conexión hidráulica se ha realizado con conductos de PVC estándar de diámetro interno de 16mm y externo de 20 mm (1/2 pulgada). Cabe destacar además que el tubo FEP de sección uniforme encaja a presión en la parte superior de la zona de visualización y medida, gracias a un mecanizado de milésimas de milímetro, y se fija con una abrazadera a su parte inferior.

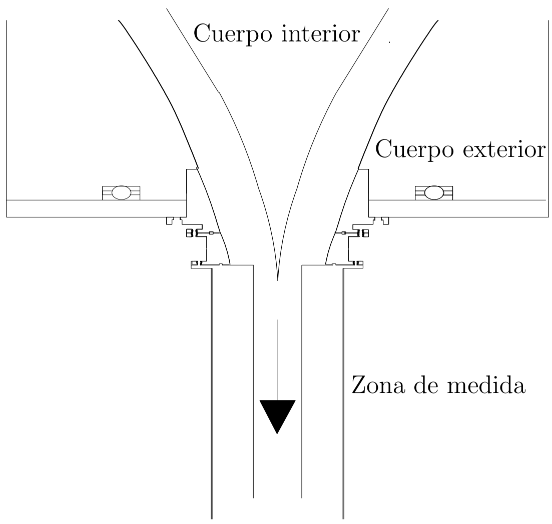



Figura 3.2: Detalle de la unión entre el final del cuerpo exterior y el comienzo del conducto de sección constante.

El centro del conducto está claramente delimitado si bien previamente se establecieron algunas pruebas para conocer la existencia de errores relacionados con la excentricidad del cuerpo interno cuando se somete a un giro constante dadas las dimensiones del mismo (mayor a un metro desde el comienzo del eje hasta el final de cuerpo) y los errores en el balanceo de la aparamenta mecánica asociada (rodamientos, poleas y correas, entre otros). Así pues, se ha procedido, en un primer lugar, a la alineación del conjunto eje de acero inoxidable-cuerpo interior con errores menores a una décima de milímetro mediante un torno de mecanizado. Sin embargo, tras el posterior montaje en la estructura del experimento, se ha comprobado mediante un comparador analógico de vástago lineal con precisión de centésimas de milímetro que las variaciones de la punta son inferiores a $\pm 1.25$ mm. Por consiguiente, el flujo no es completamente axilsimétrico. Sin embargo, tal y como se mostrará más adelante, los resultados experimentales de los perfiles radiales de velocidad axial cuando no existe giro son claramente axilsimétricos.

### 3.2.2. Funcionalidad.

Las distintas partes que constituyen el sistema del montaje experimental cumplen el objetivo que a continuación se detalla. El pequeño depósito del cuerpo interior sirve para remansar el flujo que recircula y obtener las condiciones de flujo uniforme a la entrada anular del espacio entre los dos cuerpos. La entrada del flujo mediante un anillo de PVC perforado con taladros de 4 mm se realiza en el fondo de este pequeño depósito interno. Con ello, se consigue evitar cualquier flujo tipo chorro que perturbe el perfil del campo de velocidad a la entrada. En la figura 3.3 se observa de forma esquemática como en esta región de entrada el nivel de agua es superior a la máxima cota del cuerpo interior. Por este motivo, es razonable suponer que el flujo tiene un perfil uniforme de velocidad axial a la entrada.

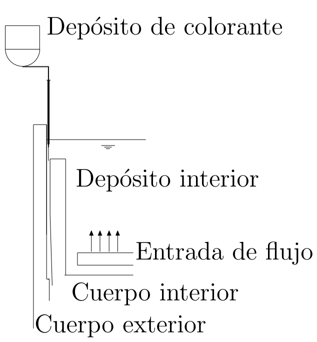



Figura 3.3: Detalle de la entrada del flujo entre los cuerpos interior y exterior, junto con el depósito que contiene fluoresceína que es inyectada en el fluido a través de una jeringa.

El espaciado existente entre el cuerpo interior y exterior a la entrada se ha aprovechado para disponer dos jeringas por las cuales se inyecta fluoresceína (Rhodamina 6G disuelta en agua). Esta sustancia, tal y como se deduce de su espectro de longitud de onda (figura 3.4), posee una banda visible (o de absorción) en las mismas longitudes de onda en las que emite el plano láser de luz verde del que se dispone (40 mW, $\lambda$= 630 nm) y que se posiciona en la región de visualización y medida. Por lo tanto, y dada la transparencia de este tramo debido a la utilización de metacrilato como material, es posible obtener distintas visualizaciones de planos ($r$,$z$) con distintos grados de inclinación, $\phi$, con sólo rotar el láser 2D.

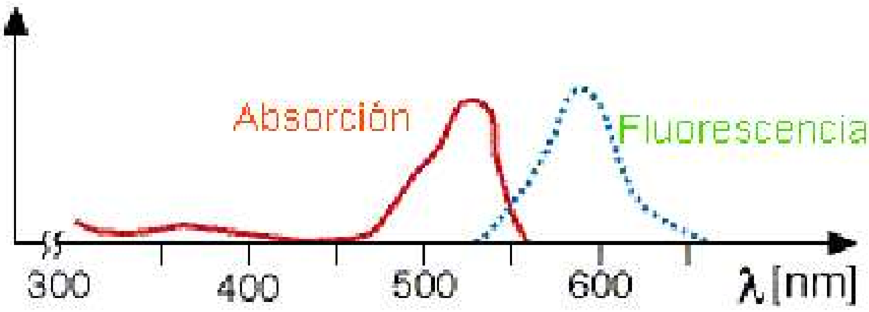



Figura 3.4: Intensidad lumínica relativa en función de la longitud de onda para la sustancia fluorescente, Rhodamina 6G, empleada en el experimento.

Además de la posibilidad de obtener información cualitativa del flujo, se ha empleado la técnica *LDA*, basada en el efecto Doppler, para obtener los datos del perfil radial de las componentes axial y azimutal de la velocidad para distintos planos $z$ constante. Para tal fin, se ha colocado un conducto de sección uniforme hecho de Polietileno tetrafluorado (FEP), que posee un índice de refracción semejante al del agua ($n_{FEP}$=1.38 frente al teórico $n_{agua}$=1.34, a una temperatura de referencia de 20°$C$) y de un depósito de sección cuadrada fabricado con placas de metacrilato de 8 mm de espesor y centrado con respecto al eje del conducto. Este depósito que envuelve al tubo FEP tiene como misión hacer de ventana óptica entre el aire y el agua que hay en el interior del conducto. Dicha ventana óptica fuerza a que los haces láser no se desvíen y, para que esto suceda, debe llenarse de agua para minimizar la distorsión óptica de los haces láser del dispositivo *LDA* que mide una componente del campo de velocidad del flujo. A este depósito cuadrado de metacrilato se le fija un conducto que desemboca en la parte superior del experimento y que tiene la función de purgar el aire cuando se llena de agua.

En la figura 3.5 se muestra una descomposición del campo de velocidad en un plano $z$ constante y se indica la posición donde se ubica la óptica de enfoque y recepción del láser *LDA*. Según se deduce de la misma, es posible conocer el perfil radial de la velocidad axial $W$ con tan solo hacer pasar los haces láser paralelos a las paredes del conducto [figura 3.5(b)]. Asimismo, y girando noventa grados la óptica, de tal forma que los haces queden paralelos a la superficie horizontal [figura 3.5(b)], éste es capaz de obtener la información del campo de velocidad radial ($\delta = 0°$) o de la velocidad azimutal ($\delta = 90°$). De éstas dos últimas, y por motivos que serán posteriormente expuestos, se ha elegido el perfil de velocidad azimutal para su comparación con los perfiles teóricos axilsimétricos resultados de la simulación numérica.

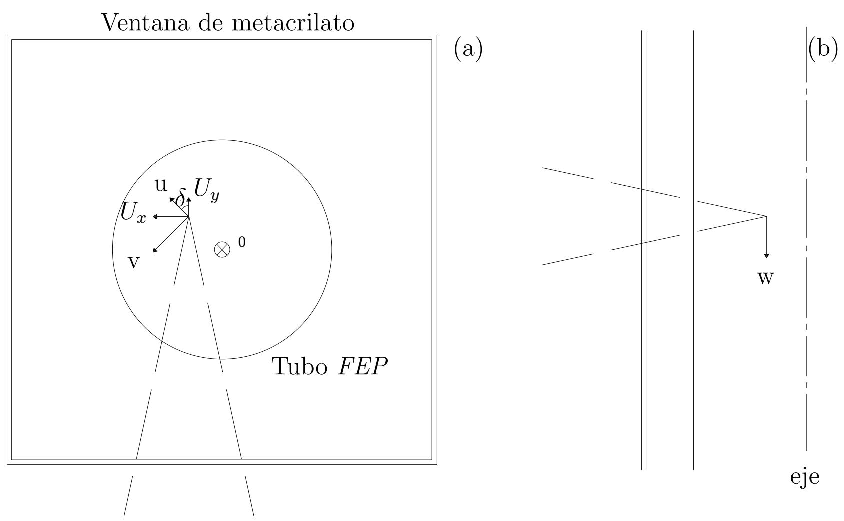



Figura 3.5: Esquema de la vista en planta y en perfil de la descomposición del campo de velocidad para un plano $z$=constante para la velocidad radial y azimutal (a) y axial (b). Las líneas discontinuas marcan las trayectorias de los haces del láser *LDA*.

### 3.2.3. Mecanismo de rotación y control de velocidad de giro.

Para realizar el experimento y conseguir la rotación del cuerpo interior se dispone de un sistema de motor de corriente alterna equipado con una reductora que posee un sistema de polea y correa de arrastre dentada que permite transmitir el giro a otra polea que se fija a un eje transversal de acero inoxidable. Este mecanismo posee dos rodamientos cónicos con sus correspondientes arandelas de pretensión para su libre movimiento rotacional y que, a su vez, aseguran el empotramiento de la polea al eje. Este eje de acero inoxidable se enrosca al cuerpo interior para fijarlo.

El motor que permite el giro del cuerpo interior se encuentra sometido a la acción de un variador de frecuencia lineal (de 0 a 50 Hz), con su correspondiente cuadro de mandos eléctricos. Este sistema de control posee además un display que muestra la velocidad de giro. Para calibrar este display se ha supuesto que el control es lineal y se han tomado dos puntos de la relación entre frecuencia y velocidad angular del cuerpo interior. Uno de los puntos se corresponde con el estado en reposo (0 Hz equivale 0 rad/s), mientras que el segundo se ha obtenido realizando una serie de tres medidas en régimen estacionario cuando el variador de frecuencia alimentaba el motor a 220 V, 50 Hz (máxima frecuencia disponible). El resultado de este ensayo ha proporcionado un valor de 0.222 rad/s. Con estos dos puntos ya introducidos en el controlador, el display muestra cualquier valor intermedio interpolando linealmente. Cabe destacar también que esta prueba se ha realizado con las mismas condiciones en las que se realizan el resto de los experimentos, esto es, el sistema completamente lleno de agua, para así evitar posibles efectos no deseables en el control relacionados con la inercia de la masa de agua.

Una vez finalizado el proceso de calibración del display, se debe conocer cuál es el error en el control del motor para conocer si la linealidad supuesta es correcta ya que se ha realizado un control en lazo abierto porque no existe ningún dispositivo tipo *encoder* que nos facilite, por un lado, la velocidad real del motor y, por otro, una señal de control que realimente la etapa de potencia. Por este motivo, se ha debido comprobar exactamente cuál es la velocidad real del motor con respecto a la indicada por el display asociado al variador de frecuencia lineal. Se han tomado tres medidas en distintos estados estacionarios de giro cuando el caudal era nulo. En la figura 3.6 se ha representado el resultado de la media de estas medidas frente a la velocidad marcada por el display. Los datos que se observan son las medias de las tres medidas junto con la desviación estándar correspondiente. Según se deduce de ella, la variación es prácticamente lineal lo que implica que el variador de frecuencia satisface de una forma más que notable su función de controlador de la velocidad angular del cuerpo interior y, en consecuencia, del parámetro de giro.

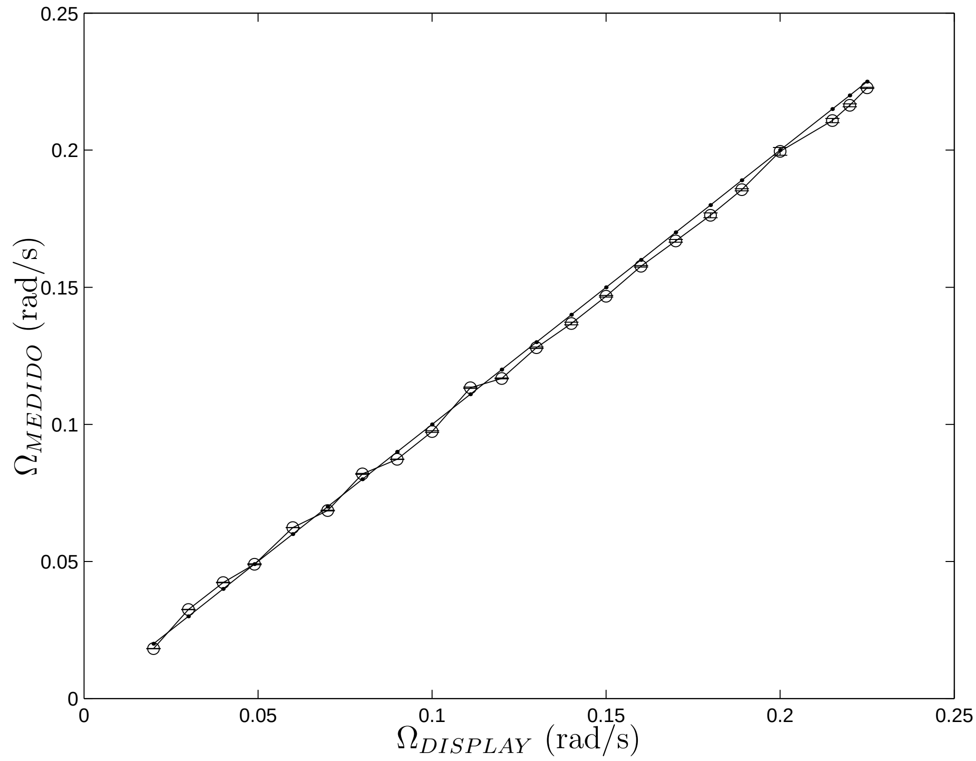



Figura 3.6: Relación entre la velocidad real de giro del motor y la medición de la frecuencia del variador lineal.

Las pruebas de validación del control se han realizado para distintos parámetros de giro en estado estacionario y se ha esperado el tiempo necesario para que el cuerpo interior diese al menos un mínimo de dos vueltas para parámetros de giro bajos (inferiores a 0.030 rad/s) y al menos 4 para parámetros de giro superiores. Los errores en el parámetro de giro $L$ [ver ecuación (2.3)] son, según la precisión del display (milésimas de radianes por segundo), menores al 1 %.

## 3.3. Técnicas de medida cualitativa y cuantitativa.

Como se ha comentado en la sección anterior, se dispone de una sustancia fluorescente que resalta la estructura del flujo y mediante la cual podemos conocer cualitativamente el comportamiento del flujo. Un ejemplo de esto último se observa en la figura 3.7 para la que se ha visualizado la sección del plano $\phi = 0°$ para un número de Reynolds $Re$=1500 y un parámetro de giro $L$=0. La fotografía se ha obtenido mediante una cámara digital compacta modelo Canon A70 con *CCD* de 3,2 megapíxeles y objetivo zoom 3x de alta calidad. En ella se observan las trazas correspondientes a distintos puntos (incluidos aquellos donde se realiza la inyección) y la forma axilsimétrica en ausencia de giro (líneas paralelas a las paredes del conducto). La fluoresceína va contaminando el agua progresivamente hasta llegar a saturarla debido a la mezcla que se produce en la bomba de impulsión. Por consiguiente, sólo en los primeros instantes posteriores a la inyección se puede visualizar de forma idónea la estructura del flujo.

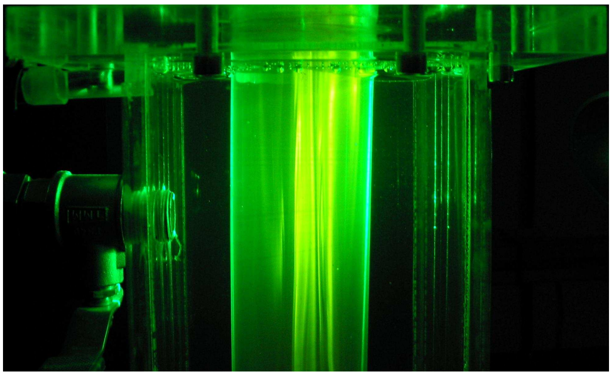


Figura 3.7: Imagen digital obtenida para $Re$=1500, $L$=0 para $\phi = 0°$.

Para obtener los perfiles experimentales de velocidad axial y azimutal se ha utilizado la técnica *LDA*. Se dispone de un equipo de la casa *DANTEC* para la medición de una componente de la velocidad y con un posicionador automático 2D controlado por un ordenador. Esta técnica de medición es muy precisa, no intrusiva, puede medir desde cientos de metros por segundo a milímetros por segundo con una velocidad de muestreo muy elevada (del orden de MHz), pero presenta varios inconvenientes como son la distribución espacial de velocidades si el flujo es no estacionario y sólo evalúa medias aritméticas en fenómenos transitorios. Las características de los haces láser del sistema utilizado son: diámetro nominal del haz de 1.68 mm, distancia focal de 160.6 mm, distancia entre haces de 38.4 mm a la salida de la óptica de enfoque y recepción y longitud de onda de 632.8 nm. La potencia del láser He-Ne (clase IIIb) compensado en frecuencia es de 10mW, el número de franjas es de 29 y el volumen de medida es 0.6412×0.0766×0.0761 mm ($\Delta x \times \Delta y \times \Delta z$). El rango de frecuencias para la validación de velocidades se ha elegido para un correcto funcionamiento según el número de Reynolds a estudiar ($Re$=1500, para todas las pruebas efectuadas, ver detalles en los capítulos 4 y 5). Se ha empleado la reflexión de los haces para alinear el láser de tal forma que éstos se encuentran de forma normal a la superficie de la zona de medida de sección cuadrada. Todo el conjunto del sistema de posicionamiento en el que se apoya la óptica de enfoque y recepción ha sido a su vez nivelado con un nivel digital de precisión $\pm 0.1$ grados. El software que controla dicho sistema permite una variación bidimensional del láser para cada posición $z$ constante en las direcciones cartesianas ($x$,$y$). La variación en la dirección axial ($z$) se consigue gracias a un micrómetro manual.

La correcta elección de las partículas a emplear es de vital importancia para minimizar los errores de medición del campo de velocidad. Básicamente, la elección se centra en tres grandes grupos de partículas que son los poliamidas con tres tamaños nominales (5, 20 o 50 $\mu$m), esferas de vidrio (10 $\mu$m) o esferas de vidrio recubiertas de plata (10 $\mu$m, y con una mayor reflectividad). De los tres tipos, el más indicado para el agua es el primer grupo y, si bien los dos restantes pueden también ser empleados, es aconsejable su uso para otro tipo de líquidos. Por consiguiente, se introduce en el agua del experimento partículas micrométricas de poliamida o PSP (del inglés, *Polyamid Seeding Particles*) que han sido fabricadas por la casa *DANTEC* mediante un proceso de polimerización y que por tanto tienen una forma redonda pero no completamente esférica. La distribución del tamaño de partículas es de 5 a 35 $\mu$m, siendo su tamaño medio de 20 $\mu$m y como características cabe destacar su densidad de 1.03 $Kg/m^3$ y un índice de refracción de 1.5. El rango de precisión en las medidas del campo de velocidad observado con este tipo de partículas es de aproximadamente milímetros por segundo. Debido a que el número de Reynolds se fija en 1500 para el estudio experimental para los distintos parámetros de giro y teniendo en cuenta que la escala de tiempo de exposición de las partículas necesaria no es demasiado baja, se ha establecido una técnica de medida incluida en el software de *DANTEC* basada en la media aritmética de un número de mediciones validadas (fijado en 300) y un tiempo máximo de espera de 60 segundos entre punto y punto del mallado cartesiano. Se ha comprobado el proceso utilizando un mayor número de mediciones validadas y con un mayor tiempo de espera obteniéndose resultados similares. El *software* proporciona además la desviación típica del conjunto de mediciones validadas.

Otro aspecto muy importante a tener en cuenta es el índice de refracción resultante del conjunto fluido-sólido (agua-FEP) y para tal fin se ha realizado una comprobación previa. Se representan en la figura 3.8 dos perfiles radiales de velocidad axial junto con la desviación estándar de cada medida, correspondientes al caso $Re = 1500$, $L$=0 y una cota desde el final del cuerpo interior de 110 mm para $\delta = 90°$ (a) y $0°$ (b), con un incremento radial de 0,75 mm y 0,5 mm, respectivamente. En esta prueba sólo se pretende contrastar cómo en el caso $\delta = 0°$ el índice de refracción es el esperado ($n_{FEP-agua} = 1$), mientras que el caso $\delta = 90°$ es $n_{FEP-agua} = 1{,}34$, que aproximadamente coincide también con el valor teórico para el agua. Estos dos valores se conocen gracias al paso por cero de la velocidad axial en la pared del conducto y se han empleado en todos los resultados del montaje experimental en los que se representen perfiles radiales de velocidad, ya sean axial o azimutal.

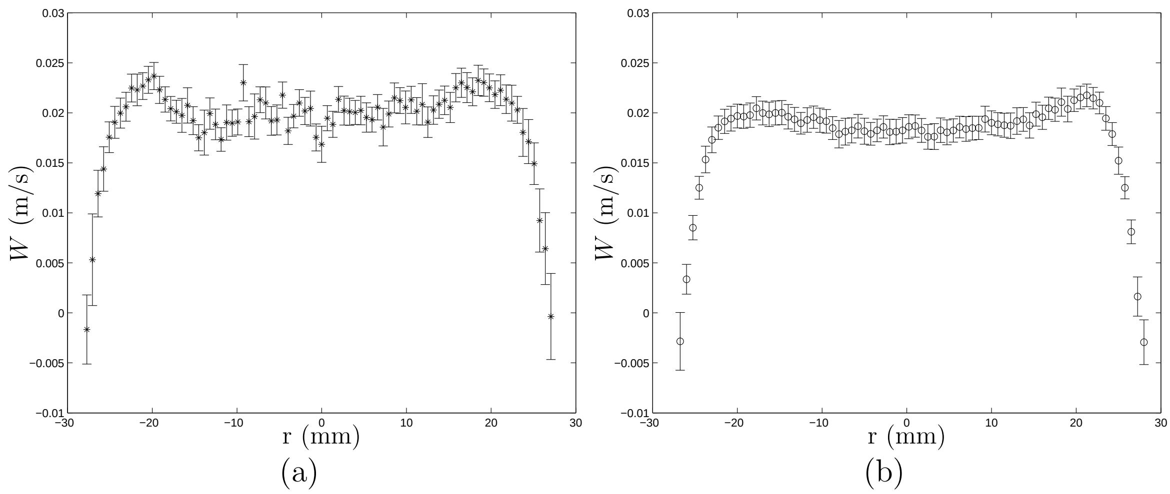



Figura 3.8: Perfiles radiales de velocidad axial para el caso $Re$=1000, $L$=0, $z$=110 mm desde el final del cuerpo interior para el caso de $\delta = 90°$ (a) y $\delta = 0°$ (b).

Para conocer la precisión del láser se ha hecho un primer experimento con una doble finalidad: conocer si el caudal medido con el caudalímetro[2] coincide con el caudal calculado a partir de la velocidad axial y saber si existe axilsimetría en el flujo en ausencia de giro. En este experimento previo se han realizado mediciones a unos números de Reynolds elevados y se ha realizado un barrido radial en dos direcciones perpendiculares que cruzan el centro del conducto ($\delta = 0°$, $\delta = 90°$) en una sección transversal a una distancia desde el final del cuerpo interno de $z$=110 mm, equivalente a cuatro radios del conducto. Los resultados experimentales se observan en la figura 3.9 donde se representan los perfiles radiales de velocidad axial para los números de Reynolds 10000, 7500 y 5000. Todas las medidas se tomaron a una temperatura constante de 35±0,2°$C$. De esta figura se puede deducir en un primer lugar que, además de existir axilsimetría en el flujo, hay una gran diferencia en la desviación estándar del error de las medidas dependiendo de la amplitud del campo de velocidad. A medida que el número de Reynolds disminuye, la desviación

[2]Caudalímetro electromagnético de precisión de la casa KROHNE

| Re | $Q_{CAUDAL}$ (l/h) | $Q_{LDA}$ (l/h) |
|---|---|---|
| 10000 | 980 | 970 |
| 7500 | 724 | 710 |
| 5000 | 483 | 460 |

Tabla 3.1: Comparación entre los caudales medidos con el caudalímetro y los calculados mediante el perfil de velocidad axial medido con *LDA*.

estándar del error va a ser menor pero también es menor la precisión del láser. Sirva como ejemplo para ilustrar lo anterior el caso del número de Reynolds 5000, que en el rango de velocidad axial esperado se encuentra dentro de la franja mínima que el láser puede medir (desde 0.12 a -0.12 m/s). Por lo tanto, si las velocidades no superan los 24 mm/s (hecho que ocurrirá para $Re$=1500, el cual será estudiado profundamente en el capítulo siguiente) hemos de tener en cuenta que el láser está midiendo por debajo del 20 % del nivel mínimo posible. Éste es el motivo por el que no se han realizado medidas de la componente radial: la velocidad $u$ en cualquier sección del conducto uniforme es tan pequeña que la precisión del láser *LDA* no es suficiente.

Otro dato que se puede calcular es el caudal medio experimental con tan solo realizar la integral $Q = 2\pi \int wrdr$. Los cálculos se encuentran reflejados en la tabla 3.1. En ella se puede observar que el error relativo entre la medición con *LDA* y lo que marca el caudalímetro es menor al 3 % para estos casos. Es importante reseñar asimismo que el caudalímetro ha sido comprobado previamente de forma independiente mediante medidas de volumen de agua con una probeta milimetrada y de tiempo con un cronómetro que marca centésimas de segundo, encontrándose errores en torno a ±0.5 litros por hora para varios rangos de caudales y temperaturas.

La relación de datos obtenidos a $Re$=1500 indica que la media de la velocidad posee un error relativo en torno al ±10 % en la mayoría de los casos, se genere o no giro. Para los casos en los que existe giro se han encontrado errores de hasta un ±15 % para el parámetro de giro más alto con el que se ha experimentado en los cuales el flujo era claramente inestable. Estos errores se justifican por la existencia de una fuerte estela que

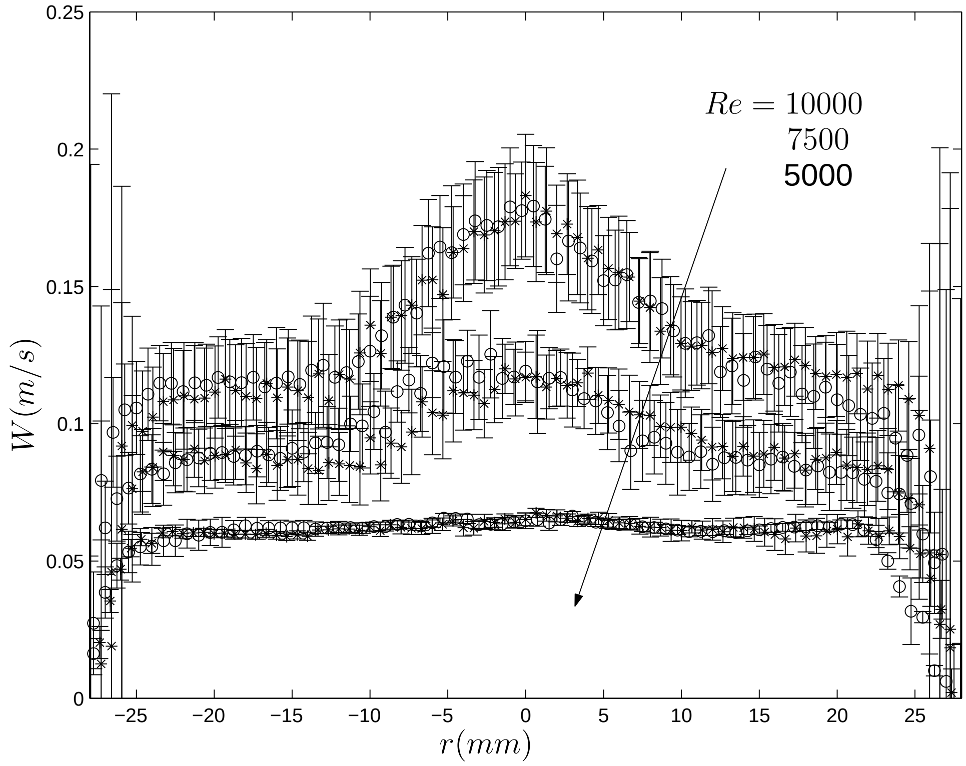



Figura 3.9: Perfiles de velocidad axial de dos rectas perpendiculares ($x$=cte, círculos $y$=cte, estrellas) que pasan por el eje del conducto para $Re$=10000, 7500, 5000.

implica un alto gradiente de velocidad en la dirección del eje, a la que se le suma una perturbación periódica (ver capitulo 5).

Para disminuir los errores de medida debidos a las discontinuidades en los procesos de puesta en marcha y parada, se ha procurado que todas las medidas (por ejemplo, las de la figura 3.7 y las que serán expuestas en el capítulo 5) se efectúen una vez alcanzada el estado estacionario y con la temperatura del agua constante que, en todas las experiencias realizadas, es de 35±0,2°$C$. Con estas variaciones de ±0,2°$C$ en cada régimen térmico estacionario se evitan efectos no deseables entre los que se encuentran las inestabilidades debidas a la convección térmica y la diferencia de velocidades entre el inicio y el fin de la toma de medidas (deformación del campo de velocidad). Además, es necesario realizar otras aclaraciones en cuanto al posible efecto dañino que las variaciones de temperatura pueden tener que afectan en el experimento relacionadas con la fuerte variación de la viscosidad cinemática con esta variable [ver, en la figura 3.10, $\nu = f(T)$], que afectan a los parámetros adimensionales $Re$ y $L$. El rango del valor de la temperatura es tan alto debido a que el aporte calorífico de la bomba de impulsión alcanza una temperatura estacionaria al compensarse con la temperatura ambiente (normalmente, entre los $26 - 28°C$) a la que se expone el líquido en la parte superior del montaje (ver fig. 3.1) a lo que hay que añadir la no disponibilidad de un intercambiador de calor eficiente que pudiera controlar la temperatura del agua. Las medidas se adquieren en distintos días por lo que, a pesar del cambio de los factores climatológicos externos, se ha procurado que el intervalo de temperatura sea siempre el mismo. Por este motivo, no debe de realizarse una corrección del caudal para compensar el nivel térmico del fluido con el aporte o disminución de caudal necesario y, de este modo, mantener el número de Reynolds y el parámetro de giro constante. Por consiguiente, para el caso $Re$=1500, las válvulas no han sido modificadas y el rango de caudales se ha fijado en un valor constante de 172±1 l/h. Estas variaciones en el caudal y en la temperatura proporcionan un error inferior al ±2 % en el número de Reynolds. Se ha conseguido, por consiguiente, que tanto el número de Reynolds, $Re$, como el parámetro de giro, $L$, se mantengan constantes, ya que cualquier variación del caudal está estrechemente ligada a una fluctuación en el valor tanto de $Re$ como de $L$.

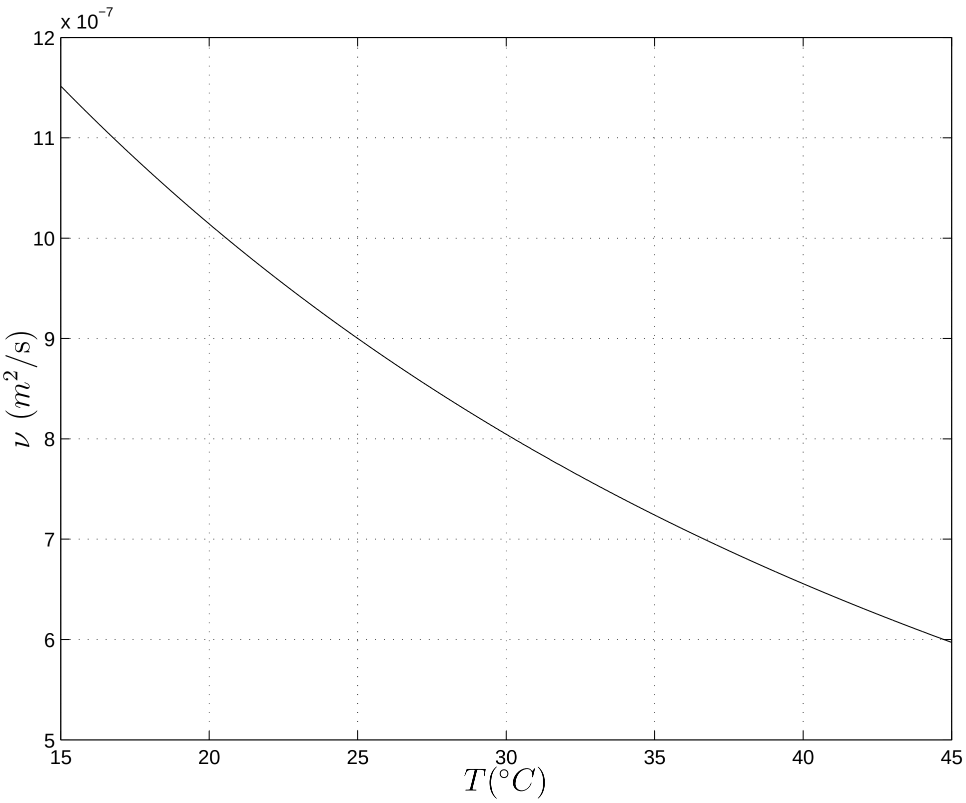



Figura 3.10: Viscosidad cinemática del agua en función de la temperatura.

## 3.4. Conclusiones y discusión.

En este capítulo se ha analizado la influencia que los distintos componentes que constituyen el montaje experimental tienen sobre la estructura del flujo, así como la función específica para el que han sido diseñados. Se han presentado las dimensiones de los cuerpos interior y exterior, el mecanismo de rotación y control de la velocidad de giro, el modo de adquirir la información cualitativa y cuantitativa del flujo, además de algunos resultados significativos que describen brevemente las características de los distintos elementos y sus aplicaciones. A lo largo del capítulo se han detallado las tolerancias de los distintos componentes tanto en el proceso de fabricación, como en el de posicionamiento y los mecanismos asociados a la puesta en marcha del montaje.

Por otra parte, se han destacado las fuentes de errores de los distintos aparatos de medición. Estos son, fundamentalmente, el caudalímetro, el variador de frecuencia, el sensor de temperatura y la anemometría láser. Se ha explicado de forma genérica cuál es el efecto de cada uno de ellos y cómo se ha de proceder para realizar la toma de medidas de forma correcta. Básicamente, el parámetro crítico a controlar es la temperatura, debido al hecho de que tanto el número de Reynolds, $Re$, como el parámetro de giro, $L$, dependen de ella a través de la viscosidad cinemática y sus variaciones son muy sensibles a cualquier pequeña fluctuación. Además se ha descrito el rango de velocidades en el que se realizan las mediciones y se ha determinado la validez del aparato del que se dispone para el nivel de velocidades axiales y azimutales esperado.

Los resultados cuantitativos de la medida del perfil radial de velocidad axial a elevados números de Reynolds ha servido para valorar si el experimento posee la condición de axilsimetría en el flujo. Asimismo, se ha comprobado si la integral a lo largo de la dirección radial del producto de la velocidad axial media medida por el radio (desde un extremo a otro de la pared, pasando por el centro) está o no acorde con el caudal medido. Las comparaciones hechas han resultado ser muy satisfactorias en este sentido. Asimismo, el índice de refracción del conjunto agua-FEP (material del conducto de sección uniforme) se ha calculado con precisión gracias a la elección de un intervalo de medio milímetro en el posicionador en la toma de datos experimentales.

La geometría propuesta en este capítulo presenta la ventaja de poder ser comparada fácilmente con el resultado de la simulación axilsimétrica. Además, las posibles diferencias del flujo real medido con el caso axilsimétrico pueden ser predichas por el análisis de estabilidad espacial descrito en el capítulo anterior.

# Capítulo 4

# Simulación axilsimétrica y estabilidad espacial del flujo en el montaje experimental.

## 4.1. Introducción y objetivos.

En este capítulo se realiza la simulación numérica axilsimétrica del flujo con giro en el apartado experimental descrito en el capítulo anterior y se analiza la estabilidad lineal del mismo para perturbaciones no axilsimétricas (la propia simulación numérica sirve como análisis de estabilidad no lineal para las perturbaciones axilsimétricas).

Para la simulación numérica, nos basaremos en el código numérico ya desarrollado (Ortega Casanova, 2000) al que se le han realizado una serie de cambios encaminados a adaptar la geometría variable a la existente en el montaje experimental, a mejorar el error de mallado y a disminuir la capacidad de memoria ocupada por el código, gracias a las herramientas numéricas que han sido también previamente desarrolladas (Sanmiguel Rojas, 2002). Se presenta, por tanto, la geometría a simular, las ecuaciones y las condiciones de contorno, así como las variables adimensionales y la resolución numérica propuestas que difieren levemente del código numérico original de Ortega Casanova (2000) en tres aspectos básicos: la adimensionalización basada en la longitud y velocidad característica del flujo en el conducto de sección uniforme (tramo final del dominio), el uso de una técnica *ADI* (del inglés, *Alternating Direction-Implicit*) de mallados alternos para la discretización axial y la introducción del mallado no equiespaciado para las direcciones radial y axial. Todos estos aspectos serán abordados brevemente ya que sólo suponen modificaciones del código original. En última instancia, y para finalizar este primer bloque del capítulo, se presentan y discuten los resultados de la simulación numérica axilsimétrica.

Una vez obtenido el campo de velocidad para cada uno de los casos estudiados en función del número de Reynolds, $Re$, y del parámetro de giro, $L_0$, se afrontará el análisis de estabilidad lineal espacial. En este caso ya disponemos de las herramientas de análisis introducidas en el capítulo 2 para el estudio de la estabilidad lineal casi paralela y no paralela. Además, se introduce una nueva opción, alternativa a las subrutinas *IMSL*, para la resolución del problema de autovalores no lineal mediante la utilización de las subrutinas *ARPACK* (de las iniciales del inglés, ARnoldi PACKage) que están ampliamente extendidas en la literatura especializada (ver, como ejemplo para su utilización Lehoucq *et al.*, 1997 y Sonrensen, 1995, y, como ejemplo de aplicación a la estabilidad de flujos, Sánchez *et al.*, 2002). Asimismo se desarrolla una nueva formulación de la estabilidad no paralela que, de forma local, tiene en cuenta la *'historia'* de las perturbaciones (alternativa a la formulación *PSE*). Por otro lado, y aunque se haga uso de la misma formulación que en el capítulo 2, se replantea el problema en variables relacionadas con la geometría del experimento, es decir, teniendo en cuenta la lenta variación axial del conducto. Esta formulación afecta directamente a los operadores existentes en las matrices. En el presente capítulo se muestran además parte de los resultados del código general de estabilidad para una geometría lentamente variable. Como consecuencia de lo anterior, un conducto de sección uniforme es sólo un caso particular de esta formulación más general. Para finalizar, se presentan y discuten algunos de los resultados aportados por el análisis de estabilidad para $Re$=1500 y distintos parámetros de giro $L_0$. Los resultados de estabilidad correspondientes a los casos experimentales estudiados serán presentados en el siguiente capítulo.

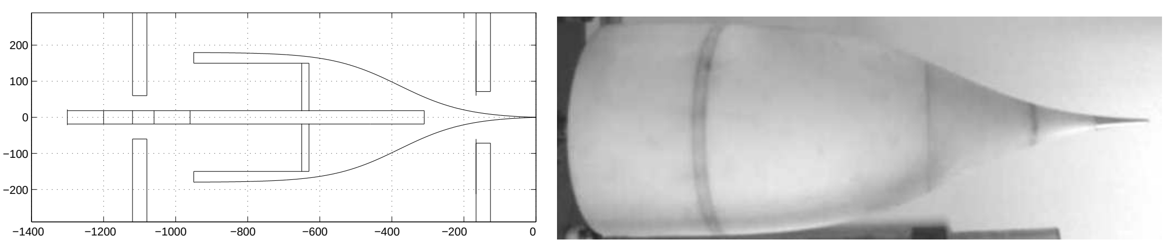
## 4.2. Geometría de la simulación numérica.

### 4.2.1. Introducción.

Antes de presentar la geometría de la simulación numérica axilsimétrica es necesario realizar una aclaración relacionada con el proceso de modificación que se ha llevado a cabo en la misma. Este cambio está íntimamente ligado al proceso de fabricación de las piezas del montaje experimental y lo que se pretende es reflejar fielmente la geometría final existente. En este sentido, hemos de reseñar que, en un principio, la forma del cuerpo interno y externo venía dada analíticamente por las expresiones presentadas en esta sección. La finalidad de esta geometría es la de conseguir la **RV** axilsimétrica en la zona de visualización y medida. Una vez diseñados los perfiles del cuerpo exterior e interior conforme al planteamiento propuesto se realiza un mecanizado mediante un torno numérico. Se pudo comparar de forma satisfactoria que el perfil mecanizado coincide con el teórico, excepto en la punta del cuerpo interior en los últimos 20 mm aproximadamente. En esta zona la imposibilidad física de poder mecanizar un diámetro menor a 2 mm con el material empleado en los dos cuerpos (nylon), volvió a modificar levemente la forma del cuerpo interior en este último tramo con la condición, claro está, de que la forma teórica original de la parte interna del depósito, así como la del cuerpo interior hasta esa coordenada, permanece inalterada. En el proceso de fabricación fue necesario el uso de aluminio para poder mecanizar la punta del cuerpo interior, que finaliza de forma cónica. A continuación se aclara de forma analítica esta modificación y se compara con el perfil real del cuerpo interior existente.

### 4.2.2. Geometría propuesta.

La geometría inicial del cuerpo interior propuesta para su simulación numérica y posterior mecanizado para su montaje experimental viene representada en la figura 4.1(a). En ella se puede observar de forma detallada como muere asintóticamente hasta el eje. En la figura 4.1(b) se ha obtenido una fotografía del cuerpo interior ya montado y fijado al eje. Si se compara con el perfil teórico se puede comprobar la exactitud del mecanizado. A continuación pasaremos a describir analíticamente este proceso de cambio.




(a) (b)

Figura 4.1: Perfil teórico del cuerpo interior con las medidas reales en milímetros (a) y fotografía del cuerpo real en el montaje experimental (b).

Si partimos de la curva teórica original dimensional, en mm,

$$f(x) \approx 91{,}64 \tanh\left(\frac{750 - x}{189{,}7 - 1}\right) + 88{,}36\,, \tag{4.1}$$

podemos adaptarla al mecanizado real basándonos de nuevo en la función tangente hiperbólica que introduce el efecto deseado, esto es, el pequeño chaflán de la punta y el corte del origen de coordenadas en la posición real. Esta función viene dada por

$$r_i(x) = \frac{f(x)}{2} \tanh\left(\frac{x_1 - x}{\epsilon}\right), \tag{4.2}$$

donde $f(x)$ viene dada por (4.1), $x_1$ es la nueva posición de corte por el eje (18 mm contados a partir de la sección constante, según la disposición final) y $\epsilon$ es un parámetro que debe ser lo suficientemente bajo como para que $f(x)$ sufra un fuerte decaimiento y lo suficientemente alto como para que la punta no sea considerada un escalón. Este parámetro es constante y se ha fijado en 0.25 mm. El resultado de la curva teórica y la comparación con la punta real, que se ha obtenido gracias a una fotografía digital, se representa de forma dimensional en la figura 4.2. Se observa que el error radial llega a ser menor al milímetro en todas las coordenadas axiales y, por consiguiente, se considera satisfactorio para su implementación numérica (téngase en cuenta que el radio máximo del cuerpo interior es de 179.9 mm). Finalmente, en la figura 4.3, se muestra la geometría completa (ya mostrada de forma esquemática en el capítulo anterior), en la que se distingue la región de entrada y la de salida, la forma lentamente variable de ambos cuerpos y la fuerte contracción en forma de tobera convergente. Esta figura es muy ilustrativa para distinguir las distintas regiones en las que se fijarán las condiciones de contorno. Obsérvese que el origen de la coordenada axial coincide con el final de la punta del cuerpo interior. A partir de ahí, el flujo transcurre en un conducto de sección constante. La figura 4.4 muestra la sección de paso del fluido a lo largo de todo el dominio de integración: es constante entre el cuerpo externo e interno hasta $z \approx$-110 mm, en donde comienza una contracción hasta $z$=0, y a partir de ahí la sección vuelve a ser constante e igual a la del conducto.

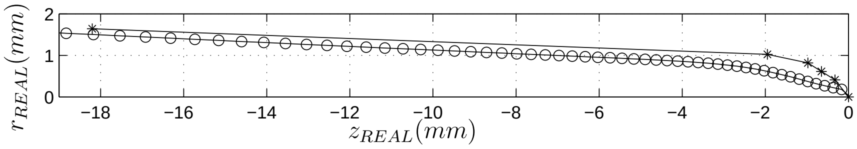



Figura 4.2: Perfiles del final del cuerpo interior teórico ($-o-$) y real ($- \times -$).

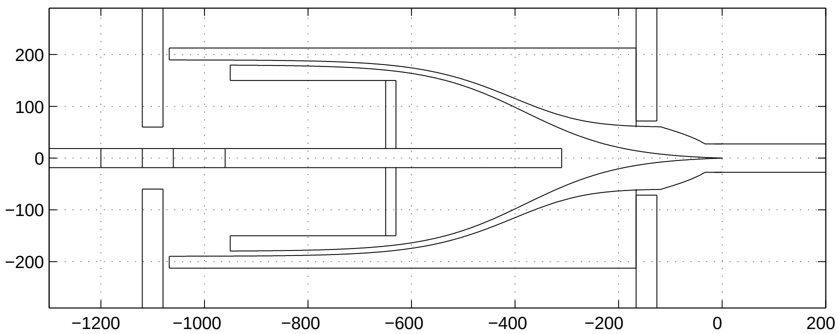



Figura 4.3: Esquema del cuerpo interior y exterior con las dimensiones reales en milímetros.

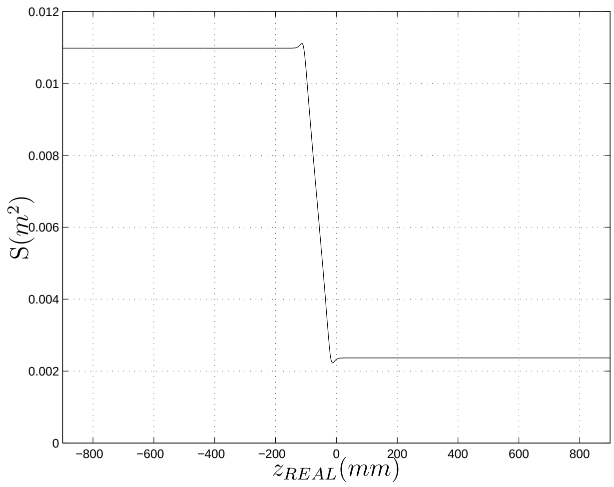



Figura 4.4: Sección de paso del fluido en función de la coordenada axial.

# 4.3. Simulación axilsimétrica.

## 4.3.1. Planteamiento del problema. Ecuaciones.

La formulación que se va a emplear para resolver el código numérico va a ser la misma que la empleada en el apartado 2.3.2, es decir, la basada en la función de corriente, circulación y vorticidad ($\Psi$-$\Gamma$-$\eta$). No obstante, el dominio numérico del experimento en el plano ($r$,$z$) no es rectangular, con lo cual es necesario elegir las magnitudes características que se van a usar para adimensionalizar el problema. La velocidad característica se define como $W_0$, que es la máxima velocidad axial en el tramo final del conducto de sección constante, mientras que la longitud característica es el radio $R_0$ del conducto de sección uniforme ($R_0$=27.5 mm). De esta forma, las magnitudes adimensionales quedan como (se utilizan los mismos símbolos para no complicar la notación)

$$\begin{gathered} \frac{v}{W_0}, \frac{r}{R_0}, \frac{z}{R_0}, \frac{t}{R_0/W_0}, \\ \frac{\Psi}{W_0 R_0^2}, \frac{\Gamma}{W_0 R_0}, \frac{\eta}{W_0/R_0}. \end{gathered} \tag{4.3}$$

Las longitudes adimensionales del cuerpo interno y del conducto uniforme son

$$\frac{e_1}{R_0}, \frac{e_2}{R_0}. \tag{4.4}$$

Los valores numéricos de la simulación son $e_1$=-35.58 y $e_2$=36.42.

El número de Reynolds se define como

$$Re = \frac{W_0 R_0}{\nu}, \tag{4.5}$$

y el parámetro de giro $L_0$, relación entre las velocidades azimutal y axial características, queda como

$$L_0 = \frac{\Omega R_0}{W_0}, \tag{4.6}$$

que son expresiones idénticas a (2.3)-(2.4). Con esta adimensionalización se ha pretendido que las variables primitivas y no primitivas resultado de la simulación numérica se relacionen con las del conducto uniforme. De esta forma, se puede establecer una correspondencia con los resultados del análisis de estabilidad espacial del conducto de sección uniforme realizado en el capítulo 2.

Con estas variables adimensionales, las ecuaciones de Navier-Stokes quedan como

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial z}\frac{\partial \Gamma}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial r}\frac{\partial \Gamma}{\partial z} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial \Gamma}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial z^2}\right), \tag{4.7}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial z}\frac{\partial \eta}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial r}\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\eta}{r^2}\frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{\Gamma}{r^3}\frac{\partial \Gamma}{\partial z} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \eta}{\partial r} - \frac{\eta}{r^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2}\right), \tag{4.8}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = -r\eta\,. \tag{4.9}$$

Con la adimensionalización elegida el parámetro de giro $L_0$ no aparece en las ecuaciones, sino solamente en las condiciones de contorno del flujo.

### 4.3.2. Condiciones de contorno.

Las condiciones de contorno que se han empleado en las distintas regiones para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes son las que se presentan a continuación, distinguiéndose la sección de entrada (comienzo del cuerpo interior), las paredes de los cuerpos, el eje de simetría en el conducto de sección uniforme y la sección de salida o tramo final de dicho conducto. En la región de entrada, el flujo sólo tiene componentes axial y azimutal, siendo el perfil de la velocidad axial uniforme (lo cual es bastante realista según la discusión hecha en la sección 3.2.2.). La velocidad azimutal corresponde al flujo entre dos cilindros concéntricos en el que existe un giro de la pared interna y la exterior permanece fija, que es el único caso que va a ser objeto de estudio:

$$v_{in} = L_0 \left( \frac{-1}{r\,(1 - R_{ei}^2)} + \frac{r}{1 - R_{ei}^2} \right)\,,\; r_i(e_1) \le r \le r_e(e_1), \tag{4.10}$$

siendo $R_{ei} = \frac{r_{ei}}{r_{ii}}$ o cociente entre los radios externo del cuerpo interior e interno del cuerpo exterior en la coordenada axial $z = e_1$. Este valor de $R_{ei}$ es fijo e igual a 0.95 para todas las simulaciones. En la figura 4.5 se representa el perfil radial $v_{in}$ para distintos valores del parámetro de giro $L_0$.

Con los perfiles de velocidad axial, $w_{in}$, y de velocidad azimutal, $v_{in}$, se pueden obtener las condiciones de contorno en la región de entrada en términos de la función de corriente, $\Psi_{in}$, y de la circulación, $\Gamma_{in}$, mediante las expresiones

$$\Psi_{in} = \int_R^r r w_{in} dr \;=\; w_{in}\frac{1}{2}\left(r^2 - R^2\right)\,,$$

$$\Gamma_{in} = r v_{in}\,. \tag{4.11}$$

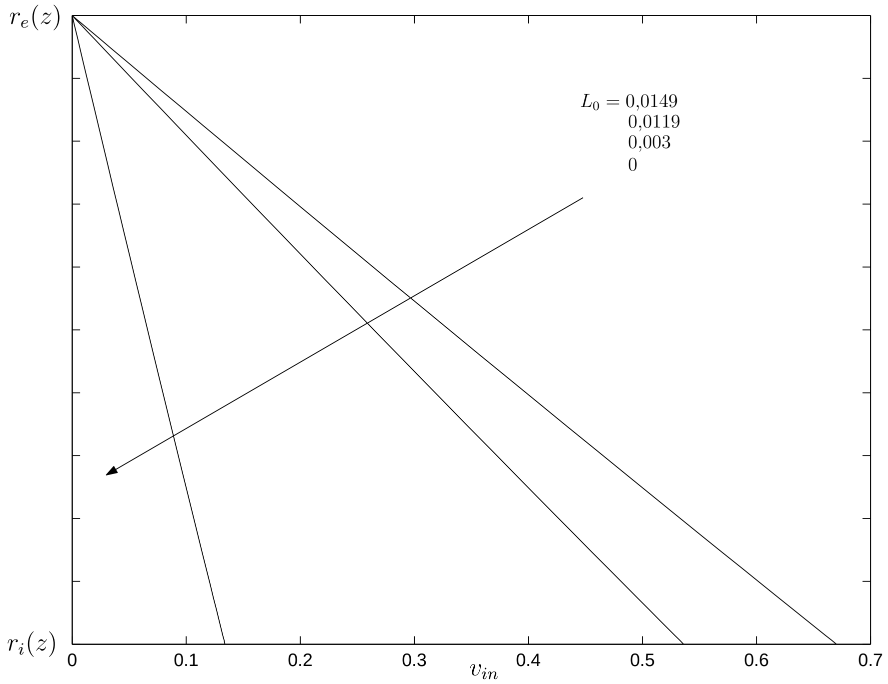



Figura 4.5: Perfil radial teórico de la velocidad azimutal a la entrada, $v_{in}$, para distintos parámetros de giro $L_0$. Todos los datos de velocidad se expresan en variables adimensionales.

La vorticidad en esta región de entrada se calcula mediante la ecuación de Poisson (4.9).

En la región de salida $z = e_2$ se impone la condición de segunda derivada nula tanto en la función de corriente $\Psi$, como en la circulación $\Gamma$ y la vorticidad $\eta$, es decir,

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} = 0\,, 0 \leq r \leq r_e(e_2)\,. \tag{4.12}$$

La validez de esta condición de contorno se comprueba en la sección 4.3.4.

En las paredes sólidas interna y externa correspondientes a los cuerpos externo e interno, respectivamente, se impone la condición de no deslizamiento o campo de velocidad nulo. La única excepción es el caso en el que existe giro, en él la componente azimutal de la velocidad en la pared externa del cuerpo interior será distinta de cero. Estas condiciones se pueden expresar en función de las variables no primitivas en $r = r_e(z)$ como

$$\Psi = cte\ , \frac{\partial \Psi}{\partial z} = \frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0\ ,\ \Gamma = 0\ ,\ \eta = -\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2}\right)\ ,\ e_1 \leq z \leq e_2 \tag{4.13}$$

y en la pared interior, $r = r_i(z)$, como

$$\Psi = cte\,, \frac{\partial \Psi}{\partial z} = \frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0\,,\ \Gamma = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \Omega\, r^2 \end{array} \right\}\,,\ \eta = -\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2}\right)\,,\ e_1 \le z \le 0. \quad (4.14)$$

Finalmente, el eje de simetría $r = 0$ se resuelve imponiendo la condición de simetría, es decir,

$$\Psi = cte\ ,\ \frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0\ ,\ \Gamma = 0\ ,\ \eta = 0\ ,\ 0 \le z \le e_2. \quad (4.15)$$

En el dominio computacional se han reproducido las medidas del montaje experimental descrito en el capítulo anterior con las condiciones anteriormente expuestas.

### 4.3.3. Métodos para la resolución numérica.

En este apartado se van a describir brevemente los métodos numéricos implementados para resolver el problema planteado. Para poder resolver numéricamente mediante diferencias finitas las ecuaciones de Navier-Stokes (4.7-4.9), una opción, y que es la que definitivamente se ha usado, es transformar la geometría propuesta (figura 4.3) en otra rectangular. Esto se hará introduciendo el cambio de coordenadas en la dirección radial

$$y = \frac{r - r_i(z)}{\beta}\,, \quad (4.16)$$

donde $\beta = r_e(z) - r_i(z)$. Esta transformación parte del dominio físico inicial

$$r_i(z) \le r \le r_e(z)\,,\ -e_1 \le z \le e_2$$

y proporciona una salida equivalente a un dominio computacional rectangular

$$0 \le y \le 1\,,\ -e_1 \le z \le e_2\,.$$

que será discretizado para implementar la técnica de diferencias finitas.

La transformación anterior es idéntica a la empleada por Ortega Casanova (2000) pero con funciones $r_i(z)$ y $r_e(z)$ diferentes. En este dominio computacional es donde se van a resolver las ecuaciones (4.7-4.9) con las correspondientes condiciones de contorno. Estas ecuaciones y condiciones de contorno escritas en las coordenadas ($r$,$z$) se van a discretizar utilizando una aproximación de segundo orden en un mallado no equiespaciado. Esta técnica, introducida por Sanmiguel Rojas (2002), permite evitar el inconveniente principal que poseen las funciones de compresión. Como es sabido, las funciones de compresión permiten acumular nodos en aquellas regiones donde son realmente necesarios; sin embargo, presentan la desventaja de incrementar el error local en aquellas regiones con mayor grado de concentración. Con el uso de las diferencias finitas directamente adaptadas a un mallado no uniforme se evitaría este inconveniente con sólo complicar las expresiones de las derivadas expresadas en diferencias finitas, pero que son tan fáciles de implementar numéricamente como las diferencias finitas en un mallado equiespaciado. Por supuesto, los nodos se concentrarán en las regiones donde se requiera más precisión. En el caso del problema objeto de estudio del presente trabajo, la región que requiere una mayor exactitud se sitúa al final del cuerpo interior, o entrada del conducto de sección uniforme en la dirección $z$ (la máxima concentración se sitúa en $z$=0), donde los gradientes axiales de las variables serán mayores. El mismo efecto es deseable en la región de entrada, donde el perfil de velocidad axial uniforme se desarrolla en una pequeña región de entrada y, además, cerca de las paredes y del eje en la dirección radial, para disminuir los errores en las condiciones de contorno (en las proximidades de $y$=0 y de $y = 1$). Para la discretización del plano computacional ($y$,$z$) se van a emplear $nz$+1 nodos en la dirección $z$ y $nr$+1 en la dirección $r$, siendo ambas distribuciones variables. La notación empleada es la del índice $i$ ($0 \leq i \leq nz$) para recorrer el dominio discreto variable en la dirección $r$ y $j$ ($0 \leq j \leq nr$) para la dirección $z$. En todas las simulaciones axilsimétricas realizadas para distintos números de Reynolds y valores del parámetro de giro se ha empleado un número de nodos en la dirección axial de $nz$=401 y de $nr$=41 en la dirección radial, siendo estos valores fijos para todos los casos, después de haber optimizado su número tras una serie de simulaciones realizadas previamente con distintas combinaciones de los parámetros fluidos adimensionales $Re$ y $L_0$.

La función de compresión que fijará los nodos en la coordenada radial es, al igual que en la sección 2.2.2.,

$$y = \frac{s+1}{2}\,, \tag{4.17}$$

donde $s$ es la distribución de nodos de Chebyshev en el dominio $-1 \leq s \leq 1$. Sin embargo, no se empleará un método espectral de colocación para la resolución en esta dirección, tal y como se aclara en el siguiente apartado. Por otro lado, en la dirección axial se utiliza para colocar los nodos la expresión

$$\xi(z) = \frac{z_0\left(\xi_1(z)+\xi_2\right)}{A}\left\{\sinh\left[\left(\frac{\xi_{z1}+\xi_1}{\xi_1+\xi_2}-\xi_0\right)\beta_{z2}+A\right]\right\}-\xi_1\,, \tag{4.18}$$

donde los distintos parámetros se definen como

$$z_0 = \frac{\xi_{z2}+\xi_1}{\xi_1+\xi_2}\,,$$

$$\xi_0 = ln\left[\frac{1+z_0\left(e^{\beta_{z2}}-1\right)}{1+z_0\left(e^{-\beta_{z2}}-1\right)}\right]\,,$$

$$\xi_{z1}(z) = -\xi_1+\left[\frac{z}{(\xi_1+\xi_2)}-2\beta_{z1}\sin\left(\frac{\pi z}{\xi_1+\xi_2}\right)\right](\xi_1+\xi_2)\,,$$

$$\xi_1 = e_1\,,\ \xi_2 = e2\,,$$

$$A = \sinh\left(\beta_{z2}\xi_0\right)\,. \tag{4.19}$$

Esta doble composición, que viene dada por la función $\xi(z)$, permite concentrar nodos al inicio y al final del cuerpo interior, que son las regiones más críticas y, por consiguiente, donde es necesaria una mayor precisión en el cálculo numérico. El proceso de formación de esta función $\xi$ es sencillo ya que en primer lugar se concentran los nodos en la región de entrada [mediante la función $\xi_{z1}(z)$] para posteriormente concentrar los nodos resultantes al final del cuerpo interno. Los parámetros $\beta_{z1}$, $\beta_{z2}$ son los factores de concentración de nodos axial y $\xi_{z2}$ es la posición axial intermedia en la que se concentran los nodos. Estos parámetros se fijan en el código con los valores $\beta_{z1}$=0.12, $\beta_{z2}$=12 y $\xi_{z2}$=0. El valor de $\beta_{z1}$ regula la concentración en la entrada del dominio fluido (tiene como cota superior $\pi/20$), mientras que una variación del valor de $\beta_{z2}$ provoca un ascenso o descenso en la precisión de los extremos del dominio numérico (inicio del cuerpo interior, fin del cuerpo exterior). Por este motivo, se ha pretendido, por un lado, que en la región de entrada se concentren nodos suficientes para poder conocer con detalle el proceso de transición que experimenta el perfil de velocidad axial uniforme impuesto en la condición de contorno y, por otro, que al final del cuerpo interior y en la entrada del conducto de sección uniforme exista un número elevado de nodos. El mallado no uniforme o adaptativo en las variables $\xi$, $y$ se muestra gráficamente en la figura 4.6. En ella se observan las regiones en las que existe una mayor concentración de nodos debido a la necesidad de un menor error local.

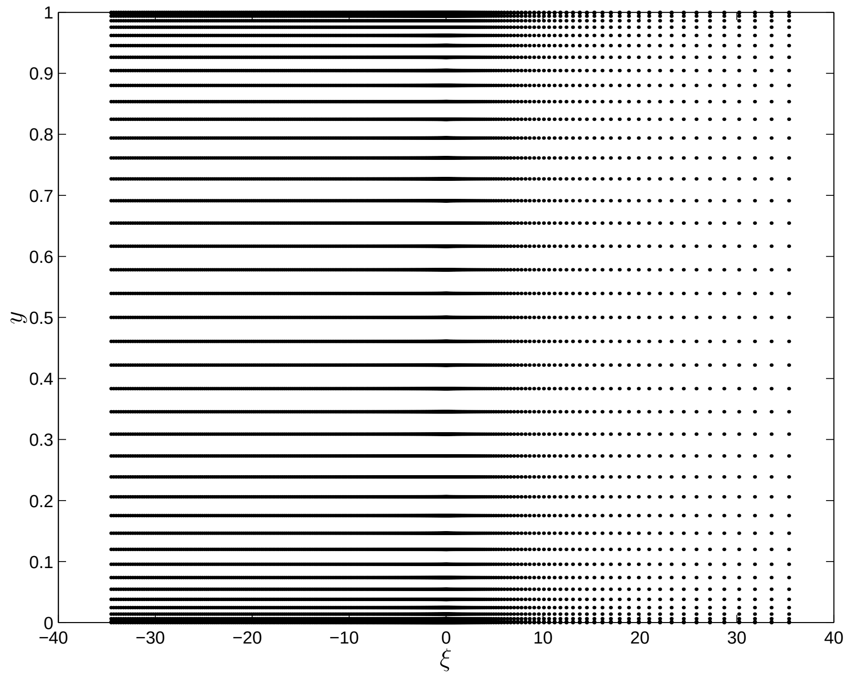



Figura 4.6: Mallado no equiespaciado en el plano ($y$, $\xi$), que concentra los nodos en las regiones más críticas (cerca de $y = 0$, $y = 1$, $\xi \approx -\xi_1$ y $\xi$=0).

Llegados a este punto, cabe pensar en la posibilidad de realizar una simulación directa en las variables físicas ($r$,$z$) con los nodos adaptados a la geometría variable sin necesidad de ninguna transformación del dominio computacional ($y$,$\xi$). Sin embargo, y aunque esta posibilidad también es viable, no es recomendable debido a que se ha empleado una geometría variable basada en la función tangente hiperbólica y, por lo tanto, con un gradiente axial muy pequeño. Estas pequeñas variaciones axiales en la geometría obligarían a emplear un elevado número de nodos, con los correspondientes problemas de capacidad y tiempo de cálculo asociados. Por este motivo se ha desechado esta alternativa y se ha procedido a la simulación numérica axilsimétrica en el dominio computacional ($y$,$\xi$).

Una vez fijada la notación, la aproximación de las derivadas adaptadas al mallado no uniforme de las distintas derivadas que aparecen en las ecuaciones evaluadas en el punto ($i$,$j$) y en el instante temporal $n$ se escriben en forma discreta. Todas las expresiones para las derivadas en diferencias finitas en un mallado no uniforme ya han sido previamente desarrolladas [ver apéndice B de la tesis doctoral de Sanmiguel Rojas (2002) para los detalles].

Para las derivadas temporales, se ha empleado una aproximación de segundo orden del tipo *predictor-corrector*. Este método es explícito y de dos etapas temporales. Con él se resuelven las ecuaciones de transporte para la circulación y la vorticidad (4.7)-(4.8). Estas ecuaciones diferenciales se escriben formalmente como

$$\Pi_{i,j}^{n+1} = \Pi_{i,j}^{n} + \Delta t G_1 \left( \Pi_{i,j}^{n}, \Gamma_{i,j}^{n}, \Psi_{i,j}^{n} \right) , \tag{4.20}$$

$$\Gamma_{i,j}^{n+1} = \Gamma_{i,j}^{n} + \Delta t G_2 \left( \Gamma_{i,j}^{n}, \Psi_{i,j}^{n} \right) , \tag{4.21}$$

definiendo $\Pi$ como

$$\Pi = \eta r \, , \tag{4.22}$$

donde el superíndice $n$ indica el instante temporal, $\Delta t$ es el intervalo temporal, y las funciones $G_1$ y $G_2$ son las aproximaciones en diferencias finitas adaptadas de todos los términos de (4.7)-(4.8), excepto los términos de las derivadas temporales. Como es sabido, los esquemas explícitos de diferencias finitas presentan problemas de inestabilidad numérica cuando $\Delta t$ supera un valor crítico, que en el presente problema depende del número de Reynolds, $Re$, y del parámetro de giro, $L_0$, del grado de concentración de los nodos en la dirección axial ($\beta_{z1}$,$\beta_{z2}$) y, por último, del número de nodos en las direcciones axial y radial, $nz$, $nr$, respectivamente. Se ha encontrado que el código es numéricamente estable si se cumple que

$$\Delta t \leq Re \times 10^{-4} \, , \tag{4.23}$$

aproximadamente. En todos los casos simulados se ha empleado el mayor $\Delta t$ que permite obtener una solución estacionaria estable. Así, para cada valor de $Re$, se ha comenzado con la simulación del flujo sin giro. Éste evoluciona numéricamente hasta llegar a un estado estacionario en el cual se alcanza una tolerancia de las tres magnitudes $\Psi$, $\Gamma$ y $\eta$, fijada en $10^{-6}$ entre dos estados temporales ($n$ y $n-1$). Para ir incrementando el parámetro de giro $L_0$, se parte de la solución con un valor de $L_0$ ya simulado.

Para la resolución de la ecuación de Poisson (4.20) se utiliza un método directo con un esquema tipo *ADI* de direcciones alternativas. La ventaja principal de este método es la reducción de la capacidad de memoria *RAM* necesaria. Básicamente, este método consiste en pasar de resolver un sistema de ecuaciones lineales de $nr \times nz$ incógnitas a resolver $nz$ sistemas de $nr$ incógnitas, con lo que el almacenamiento del sistema global disminuye de forma muy notable. Esto ha permitido que las simulaciones se puedan realizar en un tiempo razonable en un *PC Pentium IV* con 2.4 GHz y con sólo 500 Mb de memoria *RAM*.

### 4.3.4. Resultados y discusión.

Antes de pasar a presentar los resultados que reflejan las transiciones observadas en el flujo con giro y a la aparición de la **RV** en el plano ($Re$,$L_0$), es conveniente conocer el comportamiento del código numérico con relación al cumplimiento o no de las condiciones de contorno. La motivación de esto último no es otra que la de estudiar varios aspectos relacionados con las condiciones impuestas. Entre ellos caben destacar, en primer lugar, si la velocidad axial uniforme (impuesta como condición de contorno a la entrada) logra desarrollarse hacia un flujo tipo Poiseuille y, en segundo lugar, conocer si la longitud del conducto de sección constante es lo suficientemente grande como que la condición de contorno a la salida (4.12) sea válida. La validación de la condición de contorno a la entrada es de vital importancia debido a que se pretenden reflejar fielmente las condiciones del montaje experimental y, además, porque existen estudios previos en los que se destaca la influencia de las condiciones a la entrada del conducto sobre la localización del *vortex breakdown* (véase por ejemplo Darmofal, 1995).

En la figura 4.7 se visualizan los perfiles radiales de velocidad axial adimensional para $Re$=1500 y $L_0$=0.0149 en distintas posiciones axiales cercanas a la región de entrada. De ella se desprende la viscosidad fuerza al flujo uniforme de la entrada a desarrollarse como Poiseuille en una región muy pequeña cercana a la entrada (en una distancia menor a un radio, en concreto, desde $z$=-34.56 a -33.8). Por consiguiente, se concluye que la condición a la entrada no parece tener influencia alguna sobre lo que ocurre aguas abajo en el caso de la geometría lentamente variable usada aquí.

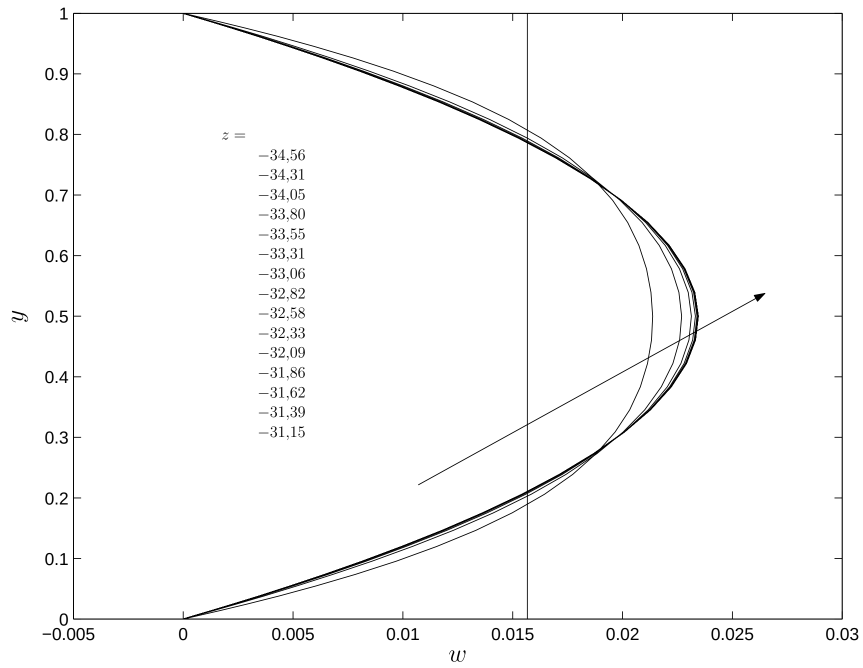



Figura 4.7: Perfil radial de la velocidad axial para distintos valores de $z$ cercanos a la entrada, para $Re$=1500 y $L_0$=0.0149.

Para ilustrar la condición de variación nula de las segundas derivadas de las variables a la salida del conducto, se representa en la figura 4.8 el resultado de la simulación numérica para un número de Reynolds, $Re$=1500 y el mayor parámetro de giro simulado, $L_0$=0.0343. En ella se observa la dependencia de la función de corriente (a) y de la circulación (b) con respecto a la coordenada axial en todo el dominio fluido (-$e_1$=-34.54, $e_2$=36) para la coordenada radial $y = \beta(z)/2$, siendo $\beta(z) = r_e(z) - r_i(z)$. Se observa claramente la relación lineal esperada a la salida. Por consiguiente, la condición se cumple satisfactoriamente en las simulaciones axilsimétricas realizadas con la longitud finita fijada para el conducto de sección uniforme.

Los resultados de la simulación numérica se resumen en la figura 4.9 para el caso del cuerpo interior con giro y el cuerpo exterior fijo. En ella se representa los dos cambios estructurales básicos observados en el flujo estacionario en función de $Re$ y $L_0$. La primera transición (línea continua) corresponde a la formación de una burbuja de recirculación: la **RV** se ha producido. En la figura 4.9 ésta se ha delimitado con el valor del parámetro

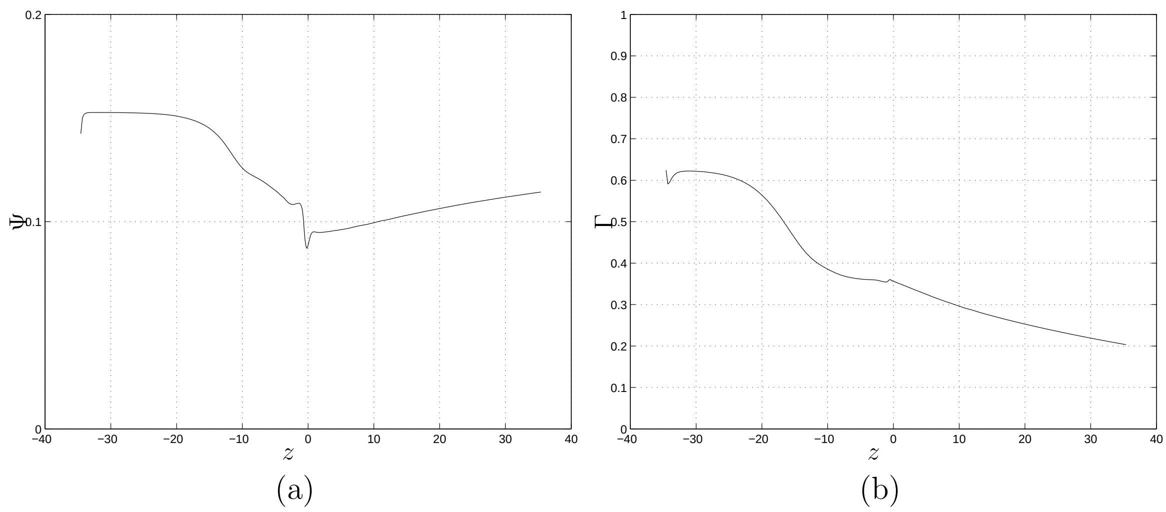



Figura 4.8: Función de corriente, Ψ, (a), y circulación, Γ, (b), en función de la coordenada axial, $z$. Los valores representados en ambos casos se corresponden a $y{=}\beta/2$, para $Re{=}1500$, $L_0{=}0.0343$, que es el mismo parámetro de giro simulado.

de giro crítico (mínimo) donde aparece dicha **RV** axilsimétrica para cada $Re$. Este estado caracterizado por una velocidad axial en el eje negativa, es decir, una valor de la función de corriente Ψ menor que cero. A continuación, incrementando el parámetro de giro, se alcanza un segundo estado caracterizado por la aparición de una segunda burbuja de recirculación aguas abajo de la primera, que nunca llega a desaparecer. Este estado se ha marcado con una línea discontinua. Ambas líneas (continua y discontinua) son el resultado de una interpolación con *splines* de las distintas simulaciones realizadas (marcadas con ◦ y ×) en las que se han observado los cambios de estado descritos (caracterizados por la aparición de un punto de remanso en el eje).

Dentro del rango de número de Reynolds de la figura 4.9 es interesante el estudio del $Re{=}1500$ debido a que será objeto de estudio tanto en el análisis de estabilidad presentado más adelante en este capítulo como en los experimentos, cuantitativos y cualitativos, que serán mostrados en el siguiente capítulo. Con el objeto de ilustrar la transición para este valor del número de Reynolds, se han representado en la figura 4.10 los isocontornos de la función de corriente, Ψ, la circulación, Γ y la vorticidad, $\eta$, para distintos valores del parámetro de giro $L_0$, desde un flujo sin giro (a) hasta un flujo con dos burbujas de recirculación (h), en una región cercana al final del cuerpo interior ($z \in [-4, 4]$). Si nos centramos en la función de corriente Ψ, en esta secuencia de figuras 4.10(a)-(h) podemos comprobar cómo, partiendo del flujo sin giro, figura 4.10(a), a medida que el parámetro de giro aumenta los isocontornos van modificándose, hasta llegar a una pequeña rotura

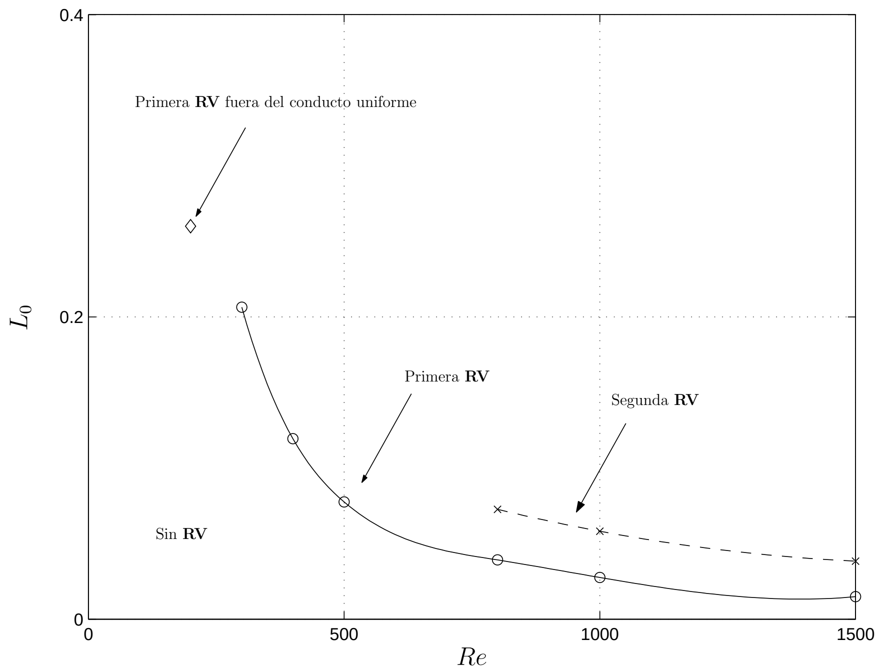



Figura 4.9: Resumen de las transiciones observadas en la simulación numérica axilsimétrica en el plano ($Re$, $L_0$).

axilsimétrica que se produce en el eje del conducto para el parámetro de giro $L_0$=0.0149, figura 4.10(d). A partir de este momento, la burbuja de recirculación aumenta de tamaño y se dirige hacia cotas inferiores. Si la intensificación del giro se incrementa, aumenta la succión en el eje y se alcanza un estado en el que la burbuja se desprende del cuerpo interior, figura 4.10(f). En último lugar, aparece una nueva burbuja de recirculación, figura 4.10(h), muy cercana al final del cuerpo interior.

Las transiciones de la figura 4.10 comentadas se pueden resumir más apropiadamente mediante la velocidad mínima en el eje (mín $w_{eje}$). Esta variable se representa en la figura 4.11 para $Re$=1500 en función del parámetro de giro $L_0$. El flujo que carece de giro posee una velocidad axial positiva, por lo que no existe **RV**. Sin embargo, a medida que aumenta $L_0$, el chorro axial va disminuyendo su velocidad axial por el efecto de la succión que produce el giro y llega un momento en el que es negativa. Para ese valor crítico de $L_0 = 0{,}0149$ se produce el primer *vortex breakdown*. A partir de este punto, aumentando la intensidad del giro, se consigue que la velocidad mínima en el eje se haga positiva de nuevo debido a que la burbuja de recirculación se dirige hacia el cuerpo interior. Para finalizar, continuando con el ascenso del parámetro de giro, la velocidad axial vuelve a decaer de forma brusca a valores negativos lo que se traduce en una nueva **RV** axilsimétrica. Todo parece indicar que la naturaleza de ambas roturas es semejante. Esto último se justifica por el 'paralelismo' existente en las acusadas pendientes previas a las roturas axiales del vórtice. Además, y según Ortega Casanova (2000), se puede demostrar que las condiciones para que se dé una **RV** brusca son, por un lado, que el flujo axial debe pasar de ser intenso cerca del eje, con una velocidad axial positiva en el eje (para $L_0$=0.012 en la primera rotura y para $L_0$=0.029 en la segunda rotura) a un flujo axial con una velocidad axial negativa en el eje.

Además de lo expuesto anteriormente se han observado otras transiciones a altos y bajos números de Reynolds. Para números de Reynolds superiores a $Re$=300 se han observado soluciones oscilatorias cuando se prosigue aumentando el parámetro de giro, es decir, el flujo se hace inestable axilsimétricamente. Para $Re$ inferiores a 300 (en concreto para $Re$=200) la primera burbuja de recirculación se ubica aguas arriba de la zona de visualización y medida. Este estado se ha ilustrado en la figura 4.12, donde se ha representado la función de corriente $\Psi$ en función de la coordenada axial $z$ para $y$=0.0015. Se observa claramente la aparición de la burbuja de recirculación ($\Psi$ menor que cero) en una zona situada en una cota axial muy alejada del final del cuerpo interior ($\xi \in [-11{,}5, -10]$).

Con la finalidad de tener una visión global de los valores de las cotas axiales ($z$) a las que se produce la primera y la segunda **RV**, se ha representado en la figura 4.13 su dependencia con el número de Reynolds (a) y el parámetro de giro $L_0$ (b). Esta figura 4.13 complementa a la figura 4.9. Para tener una idea clara de dónde se producen las transiciones en la simulación numérica se debe saber previamente que los límites correspondientes al final del cuerpo interior y al inicio del conducto de sección uniforme son $z = 0$ y $z = -0{,}63$, respectivamente. Como consecuencia de esto último se puede afirmar que no existe **RV** axilsimétrica fuera de la zona de visualización y que sólo a partir de $Re$=1000 la **RV** se produce en el eje ($z > 0$). En el rango de $Re$ y $L_0$ representado existe una dependencia lineal en la aparición de la segunda **RV**.

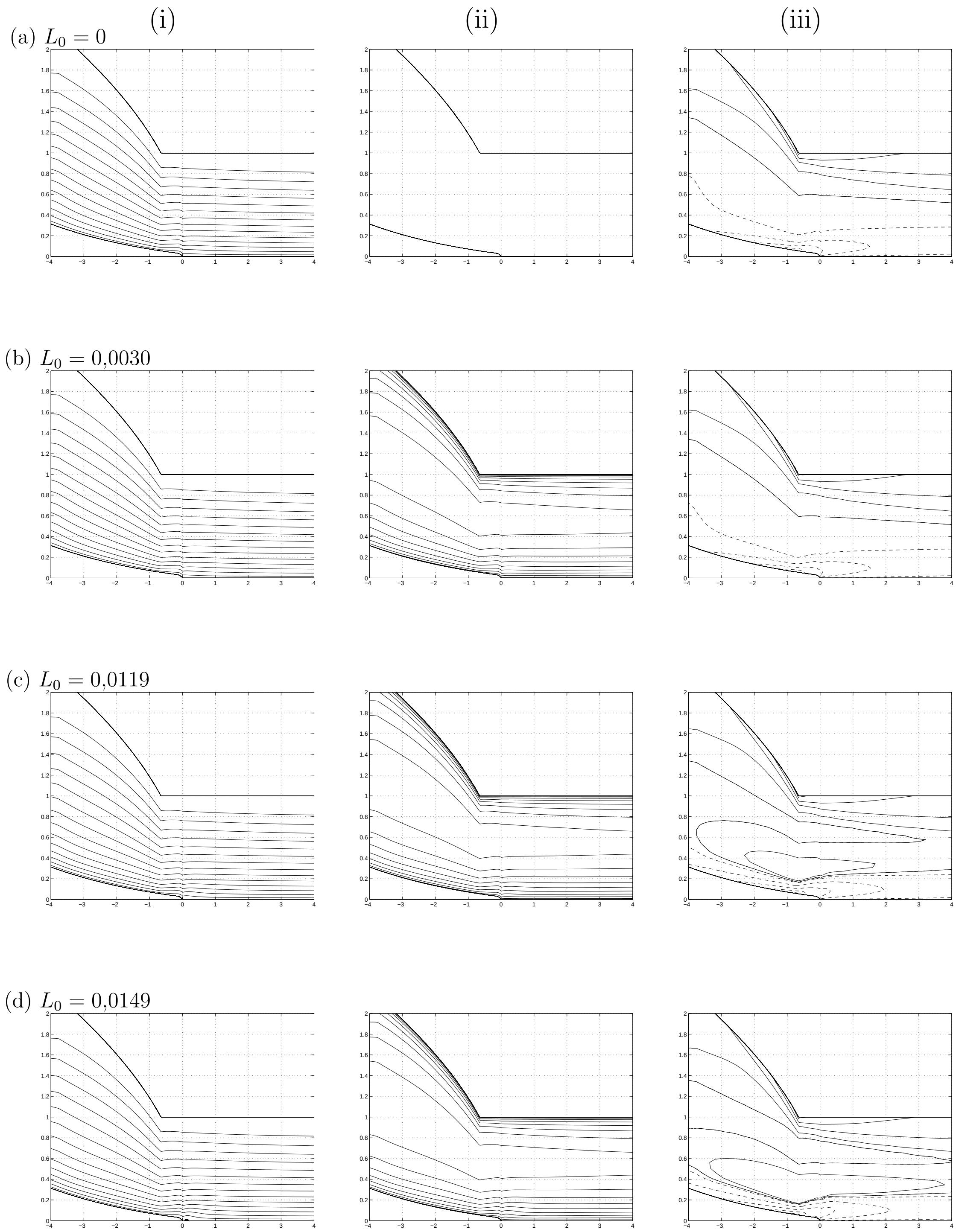



Figura 4.10. Para pie de figura ver página siguiente.

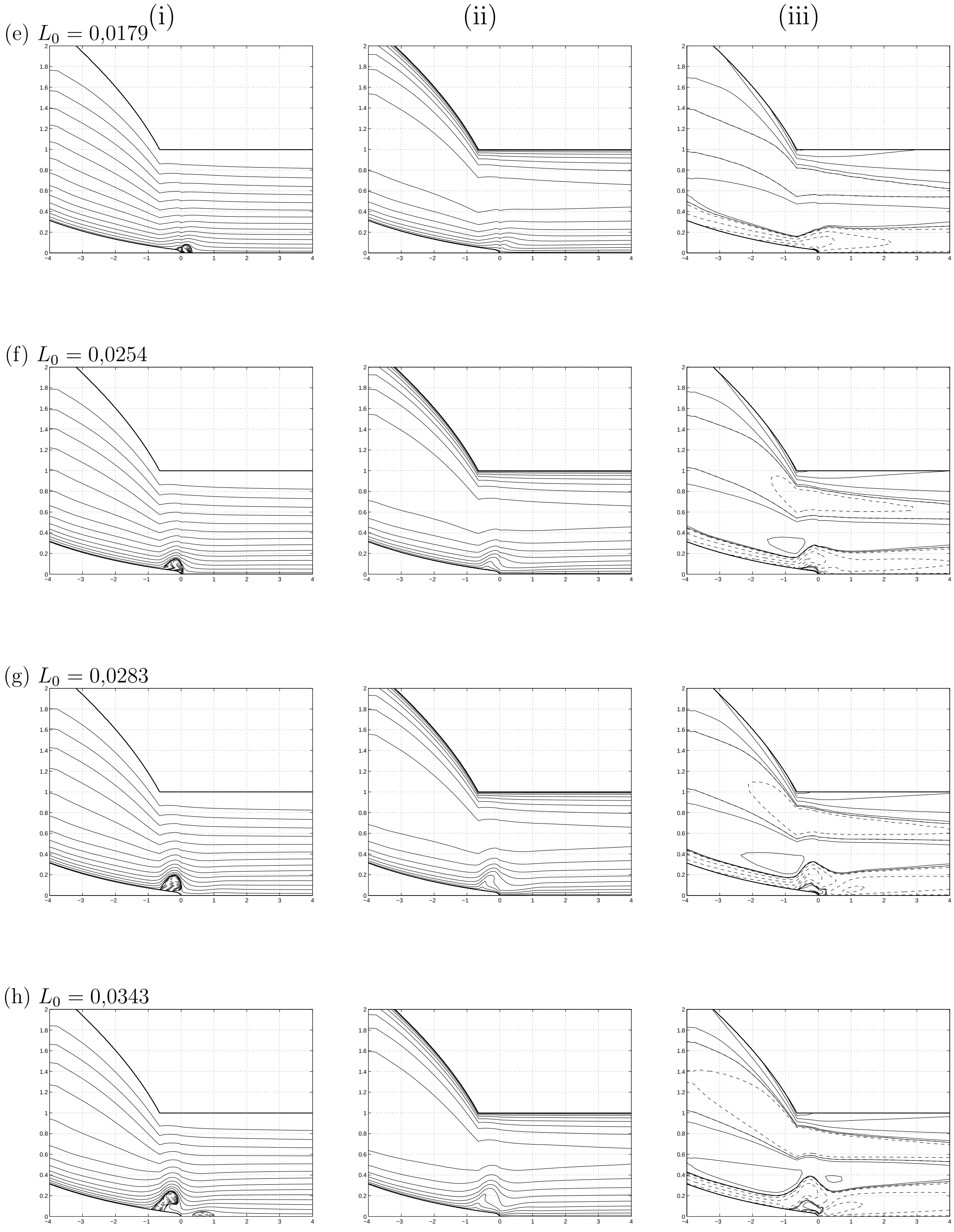



Figura 4.10: Isocontornos de las variables $\Psi$ (i), $\Gamma$ (ii) y $\eta$ (iii) para $Re$=1500 y valores de $L_0$ desde 0 a 0.0349. Los valores de los isocontornos, 10 positivos (i, ii y iii) y 10 negativos (i y iii), para las tres variables vienen dados por el contorno(k)= máx(variable)$\times(k/10)^3$ para los positivos (líneas continuas) y contorno(k)= mín(variable)$\times(i/10)^3$ para los negativos (líneas discontinuas).

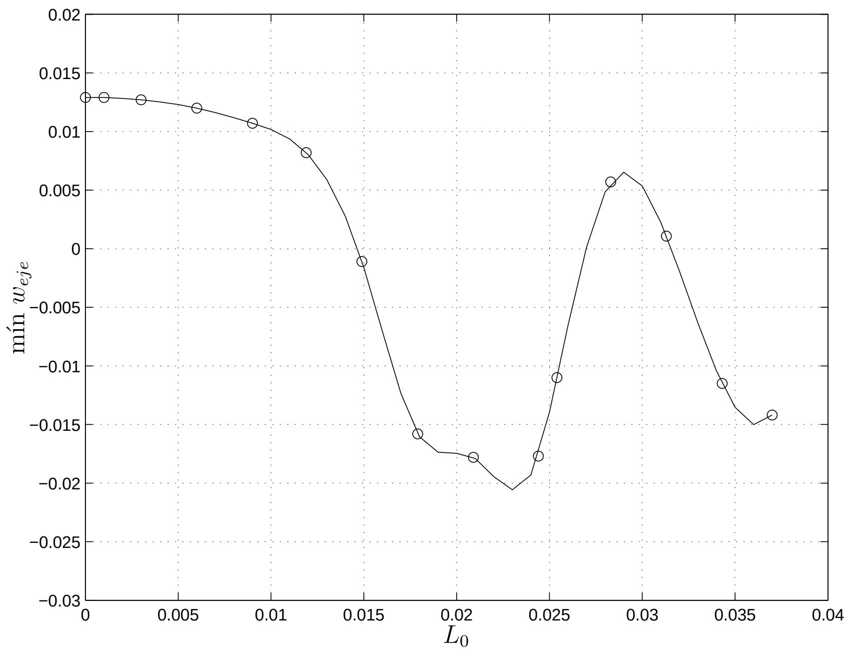



Figura 4.11: Velocidad axial adimensional mínima en el eje del conducto en función del parámetro de giro $L_0$ para $Re$=1500.

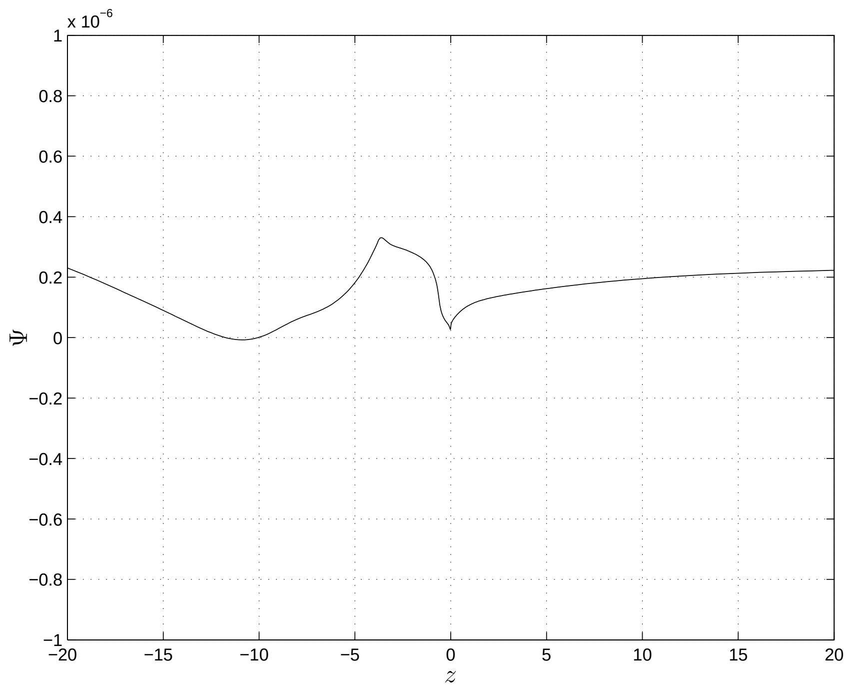



Figura 4.12: Función de corriente en función de $z$ en $y$=0.0015 para $Re$=200 y $L_0$=0.26.

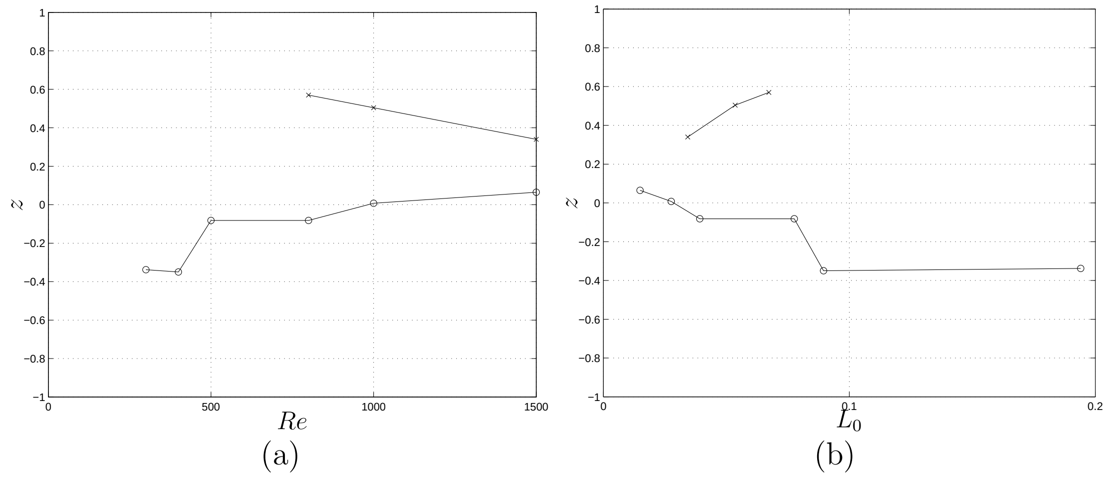



Figura 4.13: Posiciones adimensionales $z$ en las que se produce la primera (-o-) y la segunda (-×-) **RV** frente al número de Reynolds, $Re$ (a) y el parámetro de giro $L_0$ (b).

# 4.4. Estabilidad espacial del flujo en el montaje experimental.

## 4.4.1. Introducción.

Del mismo modo que se ha realizado en el capítulo 2, es posible estudiar la estabilidad lineal y espacial casi paralela y no paralela del flujo base realista con dependencia axial resultado de la simulación numérica axilsimétrica. Sin embargo, no es posible la aplicación de los mismos operadores matriciales definidos en la sección 2.2.1 debido a que la geometría estudiada era la de un conducto de sección constante, mientras que en este apartado la geometría es variable y se corresponde con el montaje experimental realizado en el laboratorio. Por consiguiente, el conducto uniforme será considerado sólo un caso particular de esta formulación más general.

En esta sección se va a presentar el estudio de la estabilidad lineal casi-paralela con la introducción de las subrutinas *ARPACK* en lugar de las tradicionales *IMSL* utilizadas en el segundo capítulo. No obstante, éstas últimas se emplearán exclusivamente para calcular la condición inicial que requiere el método iterativo en el que se basan las subrutinas *ARPACK*, tal y como se detallará más adelante. Asimismo se presenta otra nueva herramienta para el análisis de la estabilidad no paralela ya que, según se analizará, la técnica *PSE* no es efectiva para esta geometría variable debido a los altos errores numéricos derivados del excesivo incremento axial necesario para que este método sea estable. La nueva formulación se caracteriza por la no dependencia de un método implícito para su resolución debido a que el cálculo de autovalores se realiza de forma local y por la ausencia de una condición de normalización. Además, esta nueva formulación para el estudio de la estabilidad espacial no paralela es independiente del lugar donde se calcula la condición inicial (aguas abajo o aguas arriba).

### 4.4.2. Formulación del problema. Ecuaciones.

El flujo básico que va a ser considerado en esta sección es el flujo del montaje experimental resultado de la simulación numérica axilsimétrica para un número de Reynolds igual a 1500 y distintos valores del parámetro de giro, cuando el cuerpo interior gira y el exterior permanece fijo. En coordenadas polares ($r$,$\theta$,$z$) el campo de velocidad axilsimétrico tiene una dependencia que se puede expresar formalmente como

$$\mathbf{V} \equiv [U(x,y), V(x,y), W(x,y)] \tag{4.24}$$

donde $y$ es la distancia radial adimensional definida en (4.16), $x = \frac{z}{z_0}$ es la distancia axial no dimensional, y $z_0$ es la longitud total del dominio fluido ($z_0 = |e_2| + |e_1|$=$72R_0$).

El flujo perturbado tiene la misma estructura formal que el descrito en el segundo capítulo, según las ecuaciones (2.46)-(2.47), siendo en este caso la variable radial $y$ la definida en (4.16). $\mathbf{s}$ continua siendo el vector no dimensional de las pequeñas perturbaciones que puede ser descompuesto en la forma estándar (2.10), en el que la primera parte es la amplitud compleja, o vector autofunción definida por (2.14) y la segunda parte exponencial que caracteriza la naturaleza ondulatoria de las perturbaciones (2.12-2.13). Si se sustituye el flujo perturbado en las ecuaciones de Navier-Stokes y se desprecian los términos de segundo orden en las perturbaciones (estabilidad lineal) y los términos que contienen derivadas axiales de segundo orden (aproximación parabólica), se obtiene formalmente la misma ecuación diferencial (2.48), esto es,

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} + \Delta\mathbf{M} \cdot \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial x} = \mathbf{0}\,, \tag{4.25}$$

donde $\Delta \equiv \frac{\beta}{R_0}$ y $\beta = r_e(z) - r_i(z)$. En este caso, debido a la dependencia axial de la geometría del conducto $[r_i = r_i(z), r_e = r_e(z)]$, las matrices $\mathbf{L}$ y $\mathbf{M}$ se definen como

$$\mathbf{L} \equiv \mathbf{L_1} + a\mathbf{L_2} + \frac{1}{Re(z)}\mathbf{L_3} + a^2\frac{1}{Re(z)}\mathbf{L_4} + \Delta\mathbf{L_5} + \frac{\Delta^2}{Re(z)}\mathbf{L_6}\,, \tag{4.26}$$

$$\mathbf{L_1} = \begin{pmatrix} 1 + (y+\sigma_2)\frac{\partial}{\partial y} & in & 0 & 0 \\ i\left[nLg - \omega\sigma_1(y+\sigma_2)\right] & -2Lg & 0 & (y+\sigma_2)\frac{\partial}{\partial y} \\ L\left[(y+\sigma_2)\frac{\partial g}{\partial y} + g\right] & i\left[nLg - \omega(y+\sigma_2)\sigma_1\right] & 0 & in \\ (y+\sigma_2)\frac{\partial h}{\partial y} & 0 & i\left[nLg - \omega(y+\sigma_2)\sigma_1\right] & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.27}$$

$$\mathbf{L_2} = \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (y+\sigma_2) & 0 \\ (y+\sigma_2)h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (y+\sigma_2)h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (y+\sigma_2)h & (y+\sigma_2) \end{pmatrix}, \tag{4.28}$$

$$\mathbf{L_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -D_y + \frac{n^2+1}{(y+\sigma_2)} & \frac{2in}{(y+\sigma_2)} & 0 & 0 \\ -\frac{2in}{(y+\sigma_2)} & -D_y + \frac{n^2+1}{(y+\sigma_2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -D_y + \frac{n^2}{(y+\sigma_2)} & 0 \end{pmatrix}, \quad D_y \equiv (y+\sigma_2)\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y}\,, \tag{4.29}$$

$$\mathbf{L_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(y+\sigma_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(y+\sigma_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(y+\sigma_2) & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.30}$$

$$\mathbf{L_5} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ (y+\sigma_2)\left[\frac{\partial f}{\partial y} + f\frac{\partial}{\partial y}\right] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f\left(1 + y\frac{\partial}{\partial y}\right) & Ly\frac{\partial g}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & y\left(\frac{\partial h}{\partial x} + f\frac{\partial}{\partial y}\right) & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.31}$$

$$\mathbf{L_6} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_y & 0 \end{pmatrix}, \quad P_y \equiv (y+\sigma_2)\left\{\left[-\frac{\partial\gamma_2}{\partial x} - y\frac{\partial\gamma_1}{\partial x} + 2\gamma_1\left(\gamma_2 + \gamma_1 y\right)\right]\frac{\partial}{\partial y}\left(\gamma_2 + \gamma_1 y\right)^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right\}. \tag{4.32}$$

A diferencia del caso de un conducto uniforme, ahora se introduce una nueva matriz $L_6$ y se definen las nuevas funciones axiales:

$$Re_z(x) = \frac{W_0\beta(z)}{\nu}\,,$$

$$\sigma_1(x) \equiv \frac{\beta(z)}{R_0}\,,$$

$$\sigma_2(x) \equiv \frac{r_i(z)}{R_0}\,,$$

$$\gamma_1 \equiv \frac{1}{\sigma_1}\frac{\partial\sigma_1}{\partial x}\,,$$

$$\gamma_2 \equiv \frac{1}{\beta}\frac{\partial r_i(z)}{\partial x}\,. \tag{4.33}$$

La representación de algunas de estas variables para la geometría del experimento se muestra en la figura 4.14, para el caso de $Re$=1500. En la figura 4.14(a) se observa que el número de Reynolds local ($Re_z$) puede superar en alguna coordenada axial el valor de 2800, pero decae asintóticamente hasta el valor nominal de 1500 [como se esperaba de la definición (4.33)]. Debido a que en el desarrollo del flujo perturbado aparecen términos del orden $\frac{\partial\gamma_1}{\partial x} \times \Delta^2$ se ha mostrado esta función en la figura 4.14(d). Se observa que el producto puede ser considerable a pesar de que $\Delta^2$ es muy pequeño, de ahí que se justifique la retención de estos términos en las ecuaciones del análisis de estabilidad.

En el caso particular de un conducto de sección uniforme, las nuevas variables relacionadas con la geometría con variación axial (4.33) quedan

$$r_e(z) = R_0\,,\; r_i(z) = 0\,,\; \beta = R_0.$$

$$Re_z = \frac{W_0 R_0}{\nu}\,,$$

$$\sigma_1 \equiv 1\,,$$

$$\sigma_2 \equiv 0\,,$$

$$\gamma_1 \equiv 0\,,$$

$$\gamma_2 \equiv 0\,. \tag{4.34}$$

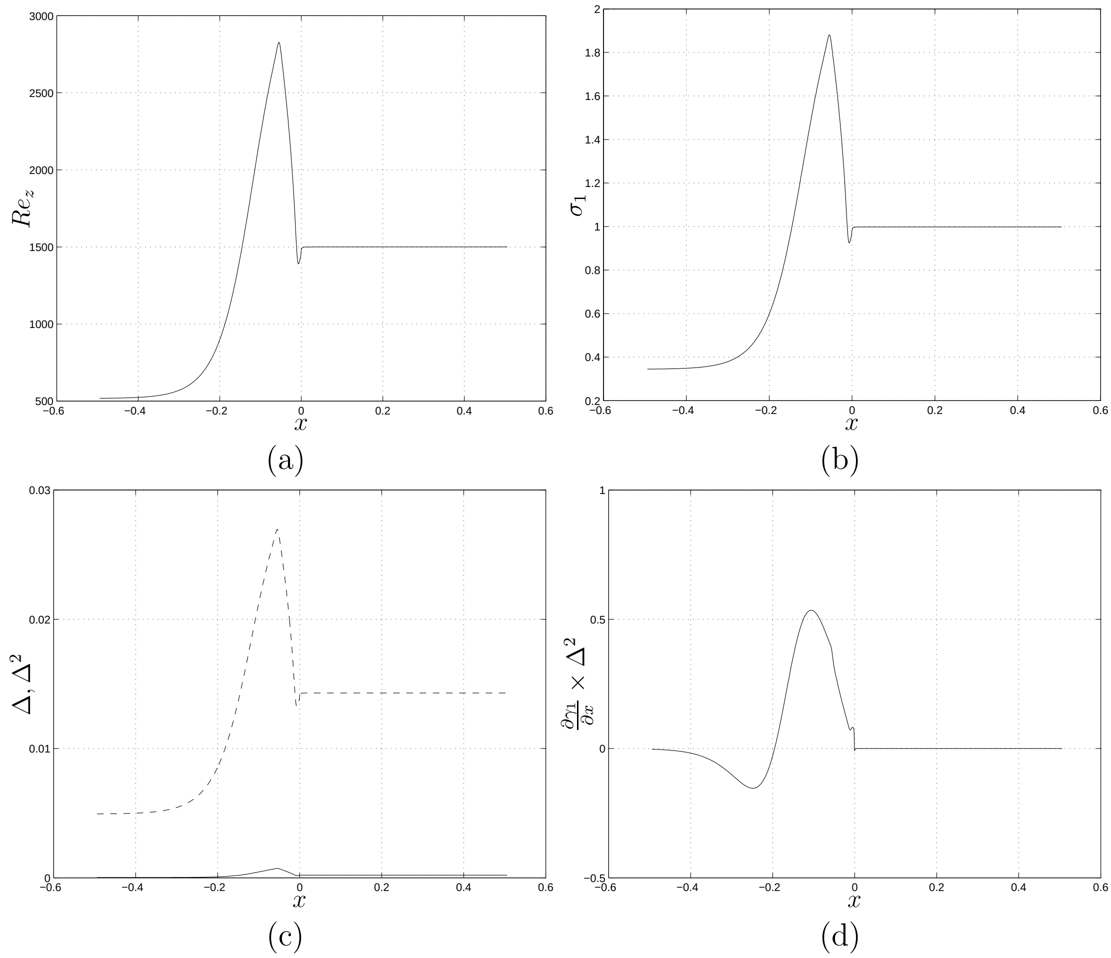



Figura 4.14: Representación de las variables $Re_z$, (a), $\sigma_1$, (b), $\Delta$ y $\Delta^2$, (c), y $\frac{\partial \gamma_1}{\partial x} \times \Delta^2$, (d), en función de la coordenada axial $x$.

Estas expresiones serán útiles para realizar la comparación de los resultados que se obtendrán con los de la estabilidad espacial de un conducto de sección uniforme, obtenidos en el capítulo 2.

Las condiciones de contorno para resolver (4.25) son las mismas expresiones (2.21)-(2.24) o (2.53)-(2.56) empleadas en el capítulo 2. La única excepción es que cuando existe cuerpo interior ($x \in [-0{,}494, 0]$) la condición de contorno de no deslizamiento se aplica también en $y$=1.

### 4.4.3. Estabilidad espacial casi paralela.

Primeramente se presentan los resultados obtenidos mediante la aproximación casi paralela, es decir mediante la ecuación

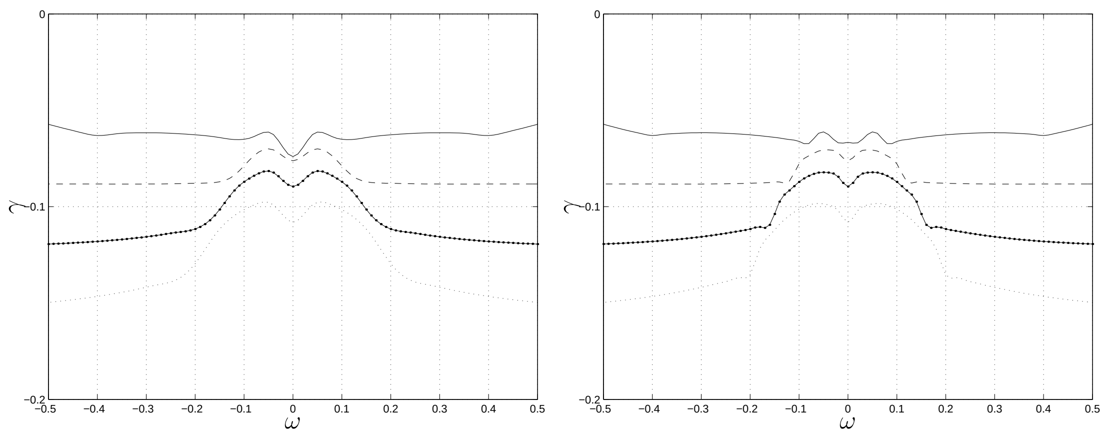
$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{0}\,, \tag{4.35}$$

que constituye un problema de autovalores no lineal, similar al descrito en el apartado 2.2.2 para el flujo con dependencia axial en un conducto de sección uniforme. Para resolver (4.35), además de las subrutinas *IMSL*, existe la posibilidad de emplear las subrutinas *ARPACK*. Éstas se caracterizan por tener una mayor velocidad de resolución del problema de autovalores, ya que no calculan todo el espectro, sino un número limitado de autovalores. No obstante, tienen la dificultad de que necesitan una primera estimación del autovalor deseado. En lugar de imponer como condición inicial el número complejo nulo para el cálculo del autovalor más inestable (las subrutinas *ARPACK* calcularían el valor más cercano a $\gamma$=0), es mejor emplear para el cálculo de dicha condición inicial las subrutinas *IMSL*. De esta forma se suministra una condición inicial que es fiable para poder iterar con el método de Arnoldi, que es el que utiliza el paquete de subrutinas *ARPACK* (ver, por ejemplo, Lehoucq *et al.*, 1997 y Sonrensen, 1995).

Para comprobar la precisión de las subrutinas *ARPACK*, en la figura 4.15 se presentan los resultados de la velocidad de crecimiento de las perturbaciones o *growth rate* para el caso de $Re$=1500, con $n$=-1, -2, -3, -4, sin giro del cuerpo interior ($L_0 = 0$) en la sección $z$=1 y para un estrecho margen de frecuencias de las perturbaciones. Se han obtenido mediante las subrutinas *IMSL* (a) y *ARPACK* (b). De estas gráficas se deduce que los resultados obtenidos mediante ambas técnicas son prácticamente idénticos, para todos los modos de inestabilidad mostrados, excepto en aquellas zonas cercanas a la frecuencia $\omega$=0.

### 4.4.4. El método *PSE*.

Con objeto de poder estudiar la estabilidad espacial no paralela del flujo con dependencia axial en la geometría del montaje experimental, se ha aplicado primeramente



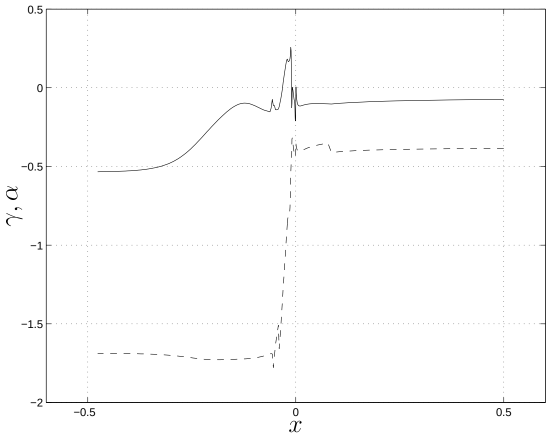
(a) (b)

Figura 4.15: Factores de crecimiento $\gamma$ en función de la frecuencia $\omega$ para los modos $n$=-1 (-), $n$=-2 (–), $n$=-3 (· -), $n$=-4 (·), obtenidos mediante las subrutinas *IMSL* (a) y *ARPACK* (b) para la sección $z$=1. El caso de estudio es $Re$=1500 y $L_0 = 0$.

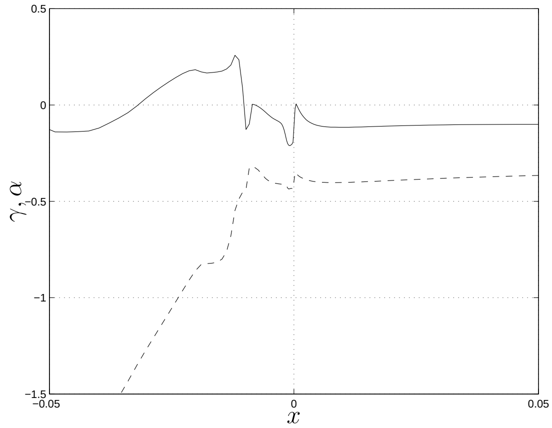
la formulación *PSE* al flujo base resultado de la simulación axilsimétrica sólo en la región de visualización y medida ($x > 0$).

Para comprobar la validez de los operadores matriciales (4.27)-(4.32), se ha considerado el caso de $Re$=500 [$Re_z(e_2)$], $L_0$=0, $n$=-1 y $\omega$=-0.25, para así poder equiparar los valores de $\gamma(x)$ y $\alpha(x)$ con los del capítulo 2. Previamente, se ha realizado el estudio casi paralelo de la sección anterior para conocer la distribución de los autovalores locales a lo largo de todo el dominio fluido. Los resultados se reflejan en la figura 4.16. Para obtener esta dependencia axial de la velocidad de crecimiento de las perturbaciones $\gamma(x)$ y la longitud de onda azimutal $\alpha(x)$ se ha comenzado a iterar desde el final del conducto con el método de Arnoldi a la que se le ha facilitado una condición inicial mediante las subrutinas *IMSL*. El flujo es estable aguas abajo, según se deduce de los valores de $\gamma(x)$ que, junto con el valor de $\alpha(x)$, coincide con los valores teóricos de un flujo de Hagen-Poiseuille para $Re$=500, $L_0$=0 al final del conducto.

Una vez que se ha conseguido obtener la evolución de $\gamma(x)$ con el estudio de la estabilidad espacial casi paralela, se van a contrastar estos resultados con aquellos en los que se tiene en cuenta la dependencia axial gracias a la formulación *PSE*. Los resultados de $\gamma(x)$ y $\alpha(x)$ se muestran en la figura 4.17. Se parte en los dos casos considerados de una solución inicial en $x_0 = 0{,}04$, con un paso de $\delta x$=0.008 (a), y de $x_0 = 0{,}03$, con un paso de $\delta x$ =0.011 (b). En la figura 4.17 se muestran las evoluciones de los tres autovalores más inestables en $x_0$. En ambos casos el segundo autovalor menos estable a la entrada es el que




(a)

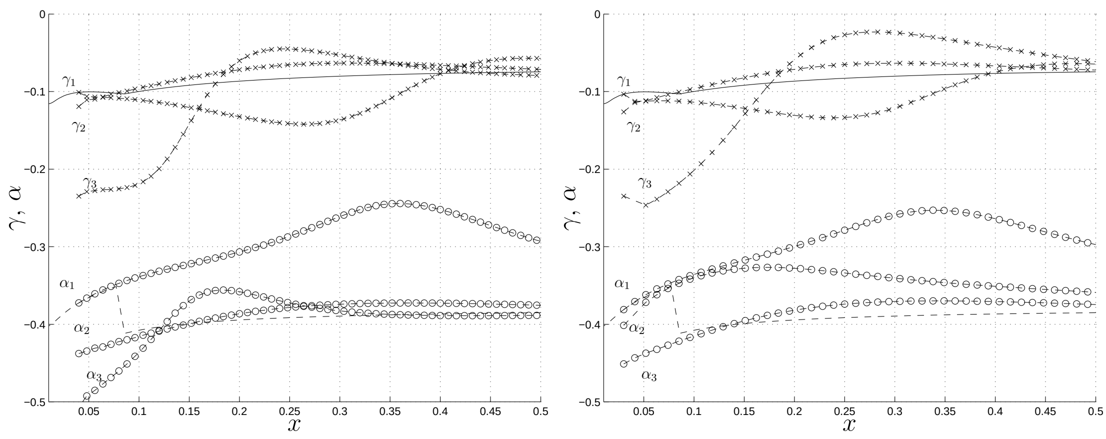



(b)

Figura 4.16: Velocidad de crecimiento de las perturbaciones $\gamma$ (-) y longitud de onda azimutal $\alpha$ (- -) en función de la coordenada axial $x$ en la geometría variable correspondiente al montaje experimental (a), para el caso de $Re$=500, $L_0$=0, $n$=-1 y $\omega$=-0.25. Se muestra además una zona ampliada cercana al final del cuerpo interior (b).

se convierte en el autovalor más inestable a aguas abajo. Según se muestra en la figura, a medida que se disminuye $x_0$ es necesario incrementar el paso $\delta x$ para que el método *PSE* sea estable. Esta característica deriva en dos inconvenientes. El primero de ellos es que a medida que nos acercamos a la zona de interés, $x_0 \approx 0{,}01$, el método es menos exacto al requerir un incremento espacial mayor y, en segundo lugar, que sería necesario un conducto de mayor longitud para que las derivadas espaciales a la salida fuesen nulas y la tendencia de $\gamma(x)$ y $\alpha(x)$ fuese asintótica al valor que se conoce de anteriores análisis de estabilidad espacial. Estos dos inconvenientes justifican que el método *PSE* no es el adecuado para la geometría propuesta.

La falta de efectividad del método *PSE* en el presente flujo se debe a que está basado en la integración numérica de la ecuación (4.25) avanzando en la dirección axial, lo cual requiere que los gradientes axiales sean pequeños en todos los puntos del flujo. Esto ocurría en los ejemplos considerados en el capítulo 2, pero no en el presente flujo, ya que los gradientes axiales son localmente fuertes cerca de $x$=0 (ver figura 4.14), por lo que el método *PSE* encuentra un escollo insalvable si se quiere atravesar, o arrancar desde, esa región. Sin embargo, no está descartada la posibilidad de un análisis no paralelo de la estabilidad espacial, es decir, de obtener resultados que tengan en cuenta el término $\partial\mathbf{S}/\partial x$ en la ecuación (4.25), siempre que uno se restrinja a la región de interés (zona de medida) en la que los gradientes axiales son suaves. Para ello no hay más que considerar




(a) (b)

Figura 4.17: Velocidad de crecimiento de las perturbaciones $\gamma$ de la estabilidad espacial casi paralela (-) y no paralela (-∗-) y longitud de onda azimutal $\alpha$ de la estabilidad espacial casi paralela (- -) y no paralela (-○-) en función de la coordenada axial $x$ en el conducto de sección uniforme correspondiente al montaje experimental para $x_0$=0.04 y $\delta x$=0.008 (a) y para $x_0$=0.03 y $\delta x$=0.011 (b). El caso de estudio se corresponde a $Re$=500, $L_0$=0, $n$=-1 y $\omega$=-0.25

los gradientes axiales $\partial \mathbf{S}/\partial x$ de la ecuación (4.25) de una manera local (ver, por ejemplo, Fernández Feria, 2000). Esto es lo que se hará en la próxima sección para el presente flujo. El precio pagado es un coste computacional mucho mayor que el método *PSE* que, como se vio en el capítulo 2, era computacionalmente más rápido y eficiente.

## 4.4.5. Formulación no paralela alternativa al método *PSE*.

La nueva formulación presentada aquí se caracteriza por tener en cuenta la variación axial de las perturbaciones, de forma local, evitando así que tener que avanzar axialmente de forma numérica con un incremento $\delta x$.

Para su desarrollo analítico se parte de un sistema de ecuaciones en el que la primera expresión será (4.25) y la segunda igualdad viene dada por su derivada con respecto a la variable axial. Formalmente se puede escribir como

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} + \Delta \mathbf{M} \cdot \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial x} = \mathbf{0}\,,$$

$$\Delta \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x} \cdot \mathbf{S} + \left( \Delta \mathbf{L} + \Delta \frac{\partial \Delta}{\partial x} \right) \mathbf{M} \cdot \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial x} = \mathbf{0} \tag{4.36}$$

donde la matriz $\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x}$ se define como la derivada axial de la matriz (4.26) y

$$\frac{\partial \Delta}{\partial x} \equiv \frac{1}{z_0} \frac{\partial \beta}{\partial x} \,. \tag{4.37}$$

Considerando el vector $\partial \mathbf{S}/\partial x$ como parte de la autofunción, la ecuación (4.36), junto con las condiciones de contorno, constituye un problema no lineal de autovalores para las autofunciones $[\mathbf{S}, \partial \mathbf{S}/\partial x]^T$. Numéricamente, la dimensión del problema se cuadriplica.

En el sistema de ecuaciones (4.36) se han vuelto a despreciar los términos de segundo orden en las derivadas y los cuadráticos en $\Delta$, tal y como se hizo en la formulación *PSE*. Este sistema se resuelve de forma idéntica a la resolución de la estabilidad lineal sin dependencia axial casi-paralela del capítulo 2, con la única salvedad de que se emplean las subrutinas *ARPACK* y de que la dimensión de las matrices para la utilización del método de la matriz compañera se cuadriplica [1]. Una vez que se ha obtenido el autovalor $a(x)$ , hay que extraer la información sobre el factor de crecimiento físico de las perturbaciones teniendo en cuenta que parte de su variación axial es debida a la geometría del conducto, y no a inestabilidades hidrodinámicas. Considerando, por ejemplo, las perturbaciones de la velocidad axial, uno define un factor de crecimiento *'físico'* de las perturbaciones, $\gamma_W$ , y un número de onda axial, $\alpha_W$, como la parte real e imaginaria, respectivamente, de

$$a_W = \frac{\beta}{W_0 \hat{w}} \frac{\partial (W_0 \hat{w})}{\partial z} \,, \tag{4.38}$$

es decir,

$$\begin{aligned} \gamma_W &= \gamma + \Delta \Re \left[ \frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{(\gamma_2 + y\gamma_1)}{H} \frac{\partial H}{\partial y} \right] \,, \\ \alpha_W &= \alpha + \Delta \Im \left[ \frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{(\gamma_2 + y\gamma_1)}{H} \frac{\partial H}{\partial y} \right] \,. \end{aligned} \tag{4.39}$$

Téngase en cuenta que $\partial H/\partial x$ se obtiene como parte de la autofunción. Para medir el factor de crecimiento global de las perturbaciones en cada sección del conducto, se define un factor de crecimiento normalizado mediante la integral

$$\gamma^I = \frac{\int_0^1 \gamma_W |H| dy}{\int_0^1 |H| dy} \,. \tag{4.40}$$

[1]Utilizando las subrutinas *IMSL*, este problema sería muy costoso por el alto consumo de tiempo de *CPU*.

Se ha estudiado el caso de un conducto de sección uniforme con giro. Los resultados se muestran en la figura 4.18. En ella se representan las evoluciones del autovalor más inestable aguas abajo, $\gamma(x)$ y $\alpha(x)$, para el caso $Re$=500, $L_0$=0.5, $n$=-1 y $\omega$=-0.1, en un conducto de sección constante (similar a la figura 2.16) . Según se deduce de la figura 4.18, el factor de crecimiento de las perturbaciones $\gamma(x)$ con esta nueva formulación para el estudio de la estabilidad con dependencia axial es la misma que la de la formulación *PSE*. Se ha representado tanto $\gamma(x)$ como $\gamma^I$, que en este ejemplo tienen valores muy próximos. De esta forma, se comprueba la efectividad de esta nueva formulación.

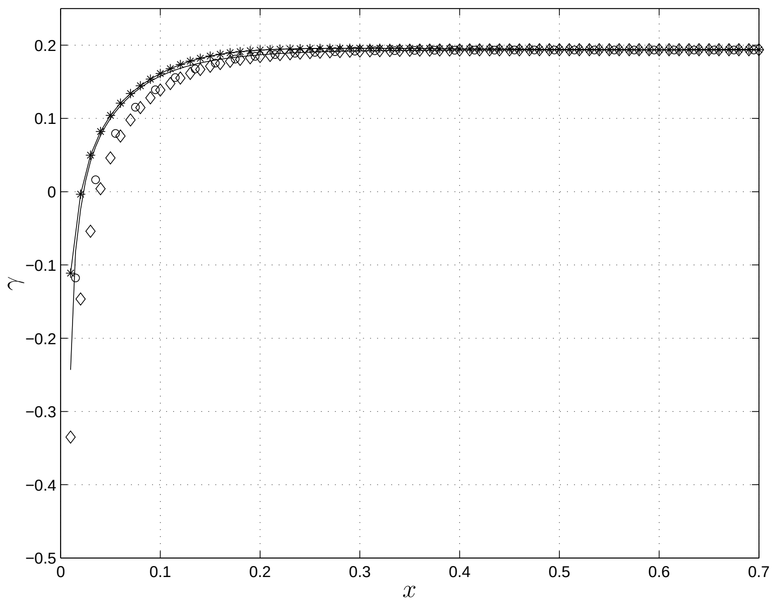



Figura 4.18: Velocidad de crecimiento de las perturbaciones $\gamma$ en función de la coordenada axial $x$ resultado de la estabilidad casi paralela ($\circ$), método *PSE* (-) y la presente formulación tanto para $\gamma(x)$ como para $\gamma^I$ ($\diamond$), para el caso de un conducto de sección uniforme con $Re$=500, $L_0$=0.5, $\omega$=-0.1 y $n$=-1.

Una vez comprobado el buen comportamiento del método introducido en esta sección relacionado con el estudio de la estabilidad espacial para el flujo con dependencia axial, éste se aplicará en el siguiente capítulo para analizar las posibles correcciones a los resultados de la estabilidad espacial casi paralela.

### 4.4.6. Conclusiones de la simulación numérica y la estabilidad espacial.

Con objeto de realizar una simulación axilsimétrica del flujo en la geometría variable del montaje experimental se ha presentado en una primera parte del capítulo la geometría propuesta, las condiciones de contorno, los métodos numéricos aplicados y el mallado no equiespaciado con los que se han resuelto numéricamente las ecuaciones de Navier-Stokes. Tras la modificación que ha sufrido el cuerpo interior en el proceso de fabricación con respecto a la trayectoria teórica original, debido a la imposibilidad física de mecanizar el tramo final, se ha tratado de reproducir fielmente, mediante la introducción de una composición de funciones, la geometría del cuerpo interior real que existe en el laboratorio.

En las simulaciones efectuadas se ha impuesto una condición de contorno a la entrada de perfil de velocidad axial uniforme. Con este perfil se simula perfectamente la condición de entrada en el montaje experimental. En la región de salida se ha impuesto una variación nula del campo de velocidad, que se ha comprobado que es perfectamente válida en el caso más desfavorable simulado ($Re$=1500, $L_0$=0.0343). Esto último justifica que la longitud del conducto de sección uniforme del montaje experimental es lo suficientemente grande para que no existan recirculaciones o flujos aguas arriba que afecten al campo fluido en la región de salida.

Los resultados de la simulación axilsimétrica para el caso en el que gira el cuerpo interior y el cuerpo exterior permanece fijo se resumen en la figura 4.9. En ella se muestra cuáles han sido las transiciones observadas, que son básicamente dos: la aparición de una primera **RV** axial a un parámetro de giro relativamente bajo y de otra segunda burbuja de recirculación cuando se sobrepasa un segundo umbral de $L_0$. Este segundo *vortex breakdown* aparece siempre en presencia del primero. La primera **RV** se produce en el flujo siempre y cuando el número de Reynolds, $Re$, sea superior a 1000 y, en el caso de la segunda **RV**, existe una relación lineal entre la coordenada axial donde se sitúa la **RV** y $Re$, dentro del rango de $Re$ simulado. Asimismo, se ha encontrado que para $Re$=200 la rotura se produce muy aguas arriba de la región del conducto de sección uniforme.

Se han presentado los nuevos operadores matriciales para el estudio de la estabilidad espacial para un flujo con dependencia axial en una geometría variable. Por consiguiente, el caso de un conducto de sección constante será sólo un caso particular de esta formulación genérica. Se ha introducido con éxito el método de Arnoldi (paquete de subrutinas *ARPACK*) para la resolución del problema de autovalores no lineal que se debe resolver para estudiar la estabilidad espacial, encontrándose un resultado equivalente al obtenido por las subrutinas *IMSL*. Las subrutinas *ARPACK* tienen una velocidad de cómputo 10 veces superior con respecto a las *IMSL*, pero requieren una estimación inicial. Para salvar este pequeño inconveniente, se ha optado por facilitársela mediante las subrutinas *IMSL* en alguna coordenada axial.

El estudio de la estabilidad espacial mediante la técnica *PSE* del flujo base con dependencia axial, correspondiente al resultado de la simulación numérica en la geometría variable del montaje experimental, ha resultado ser poco eficaz debido a que la condición inicial no puede estar lo suficientemente cercana a $x$=0.

El estudio de la estabilidad espacial para un flujo con variación axial se ha implementado por otra vía diferente al *PSE*. Esta nueva formulación calcula los autovalores de forma local pero teniendo en cuenta la variación axial de las perturbaciones. Se ha comprobado de forma satisfactoria este nuevo método para un ejemplo ya analizado en el capítulo 2 (conducto de sección uniforme). Este método se empleará en el siguiente capítulo para comparar los resultados de la estabilidad no paralela con los obtenidos mediante la aproximación casi paralela en la geometría del montaje experimental.

# Capítulo 5

# Resultados experimentales y análisis de estabilidad espacial.

Este capítulo se centra en la comparación de los resultados numéricos de la simulación axilsimétrica del flujo en la geometría variable correspondiente al montaje experimental, y de la estabilidad espacial correspondiente, con las medidas experimentales obtenidas en el laboratorio, para un número de Reynolds igual a 1500 y distintos valores del parámetro de giro.

## 5.1. Resultados experimentales.

Se han realizado numerosas medidas experimentales en el aparato descrito en el capítulo 3. Los datos de la anemometría láser se han obtenido en las secciones $z$=0.5 y $z$=1.0 en la zona de medida del conducto de sección constante. En un experimento típico, el número de Reynolds $Re$ es fijo e igual a 1500, el parámetro de giro $L_0$ varia entre un mínimo 0 y un máximo de 0.0343,[1] respectivamente, el ángulo $\delta$ (figura 3.5) es, o bien 90°, o bien 0°, y la variable $r$ se recorre entre $-R_0$ y $R_0$ usando el posicionador controlado por el software del equipo de *LDA*. Recuérdese que el diámetro interno del conducto *FEP* es de $2R_0$=55 mm. Las variables más críticas en la obtención de los datos experimentales son la temperatura (estable en 35±0,2°C), el caudal (estable en 172±1 l/h) y la velocidad de giro $\Omega$ (con un error de ±0.001 rad/s), como ya se ha discutido en el capítulo 3. Para poder comparar los resultados de la simulación numérica axilsimétrica

[1] Recuérdese que el parámetro de giro está basado en el radio, la velocidad de rotación y la velocidad axial máxima del conducto, a pesar de que éste no gira. Un parámetro de giro basado en el radio y la velocidad de rotación del cuerpo central y en la velocidad característica del flujo a la entrada sería del orden de 60 veces mayor.

con los datos experimentales existen dos opciones. O bien se adimensionalizan los datos obtenidos por la anemometría láser con la velocidad máxima $W_0$, o bien se convierten los datos de la simulación numérica en variables dimensionales. De estas dos posibilidades, parecía más conveniente elegir la última, ya que se ha estimado oportuno no realizar ninguna conversión sobre los datos reales obtenidos.

### 5.1.1. Resultados en la sección $z$=0.5.

En esta sección se van a presentar los perfiles radiales correspondientes a la velocidad axial $W$ y a la velocidad azimutal $V$ para el plano $z$=0.5, que es equivalente a una distancia de 13.75 mm desde el final del cuerpo interior (31.75 mm desde el inicio de la zona de visualización y medida). Esta es la mínima cota axial para la cual se pueden obtener medidas experimentales debido a la distancia focal entre la óptica de enfoque y recepción y el experimento.

En la figura 5.1 se muestran los resultados de las velocidades axial $W$ (i) y azimutal $V$ (ii) para tres valores del parámetro de giro, $L_0$=0 (a), $L_0$=0.003 (b) y $L_0$=0.0119 (c). Los valores de la velocidad axial $W$ se han obtenido en dos barridos radiales perpendiculares que pasan por el centro (correspondientes a $\delta = 0°$ y $\delta = 90°$ en el esquema de la figura 3.5). Se puede además conseguir medir la velocidad azimutal $V$ en $\delta = 90°$ con sólo posicionar de forma correcta la óptica de enfoque y recepción. La medición de la velocidad radial $U$ no es posible debido a que se valor es muy bajo para la precisión del láser (del orden de 1 mm/s para el mayor $L_0$). Se observa que, en ausencia de giro [figura 5.1(a)-(i)], $L_0$=0, existe entre los resultados experimentales y los numéricos una gran similitud. La velocidad azimutal teórica para este caso es nula, lo cual concuerda también muy bien con los resultados experimentales pues los valores medios medidos están por debajo de la precisión del sistema *LDA* [figura (a)-(ii)]. El análisis de la estabilidad espacial con la formulación casi-paralela y no paralela para $L_0$=0 se resumirá en la sección 5.2.

En la figura 5.1(b) se presentan los resultados para el menor giro que se puede reproducir con fiabilidad en el laboratorio y que se corresponde a una velocidad angular $\Omega$=0.004 rad/s ($L_0$=0.003). En este caso se puede observar como la velocidad axial sigue manteniendo una estructura básicamente axilsimétrica, ya que las mediciones debido en $\delta = 0°$ y en $\delta = 90°$ coinciden. En la zona situada en torno al eje siguen apareciendo discrepancias con respecto a la velocidad axial axilsimétrica. Sin embargo, en la velocidad azimutal hay un detalle importante: la velocidad en el eje es ligeramente distinta a cero, lo cual caracteriza la existencia de una inestabilidad con un modo azimutal $|n|$=-1. Este aspecto se discutirá posteriormente en el análisis de estabilidad espacial.

En la figura 5.1(c) se representan los valores de velocidad axial y azimutal para un parámetro de giro $L_0 = 0{,}0119$, que se corresponde a un valor algo menor al de la aparición de la **RV** axilsimétrica (ver figura 4.9). La comparación entre los perfiles radiales experimentales de velocidad azimutal para $\delta = 0°$ y $\delta = 90°$ vuelven de nuevo a justificar el carácter axilsimétrico del flujo, excepto muy cerca del eje, donde la discrepancia con la simulación axilsimétrica indica la presencia de algún tipo de inestabilidad no axilsimétrica. El valor nulo de la velocidad azimutal en el eje del conducto indica que el modo de la perturbación más inestable no corresponde con $|n|$=-1.

Si bien los resultados experimentales en $z$=1.0 serán considerados en la siguiente sección, en la figura 5.2 se han comparado los resultados experimentales en $z$=0.5 y $z$=1.0 para $L_0$=0.0149, correspondiente a la transición del flujo en la simulación numérica axilsimétrica que se relaciona con la **RV**. En ella se observa como la velocidad axial (a) sigue manteniendo la tendencia axilsimétrica, menos la deformación ya comentada que sufre el flujo cerca del eje que se justificará con el estudio de la estabilidad espacial. Para estas secciones $z$=0.5 (a)-(b) y $z$=1.0 (c)-(d) el flujo teórico axilsimétrico tiene un perfil de velocidad axial próxima a cero, que caracteriza la presencia de la **RV** aguas arriba. Sin embargo, los datos experimentales no siguen esta tendencia, tal y como ya se intuía en la figura 5.1(c)-(i) para $z$=0.5. Este hecho implica la imposibilidad de poder visualizar una **RV** axilsimétrica, tal y como se muestra en la fotografía digital de la figura 5.3. En ella se observa la existencia de ondas espirales asociadas a la inestabilidad convectiva, tanto en el eje del conducto como en las zonas cercanas a las paredes, que coincide precisamente con las regiones en las que existen las mayores discrepancias en la figura 5.2. Asimismo, la inestabilidad se pone de manifiesto al comparar la velocidad azimutal teórica y experimental [figuras 5.2(b) y (d)]. Se puede observar como existe una mayor deformación del campo de velocidad azimutal experimental a medida que aumentamos la coordenada axial. Esta será otra característica común a los perfiles radiales de velocidad azimutal representados en lo que sigue.

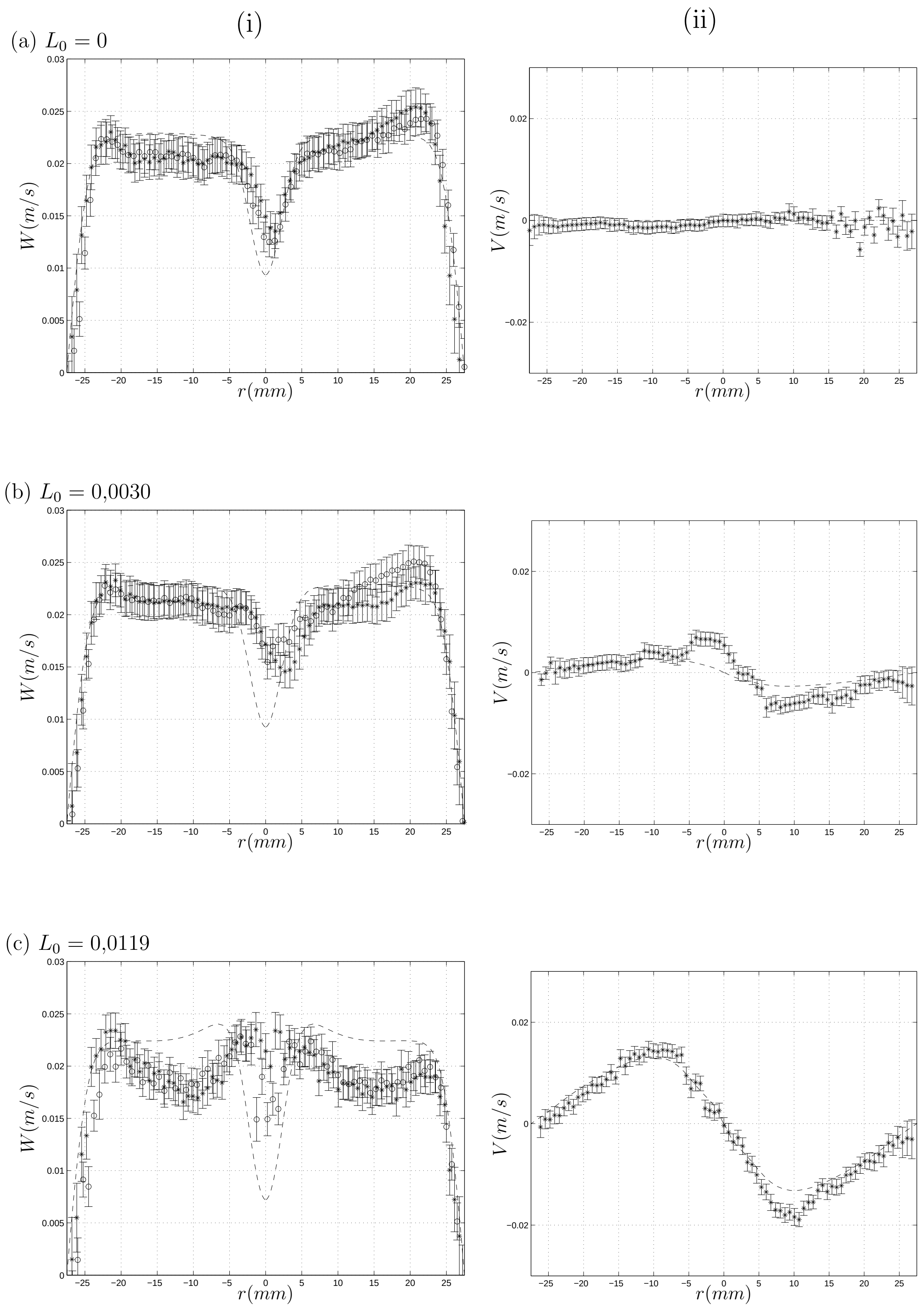



Figura 5.1: Resultados para $Re$=1500 y $L_0$=0 (a), $L_0$=0.003 (b) y $L_0 = 0{,}0119$ (c): (i) valores experimentales de la velocidad axial para $\delta = 90°$ (-∗-) y $\delta = 0°$ (-○-) y obtenidos numéricamente con la simulación axilsimétrica (- -); (ii) valores experimentales de la velocidad azimutal, $\delta = 90°$, (-∗-) y numéricos (- -).

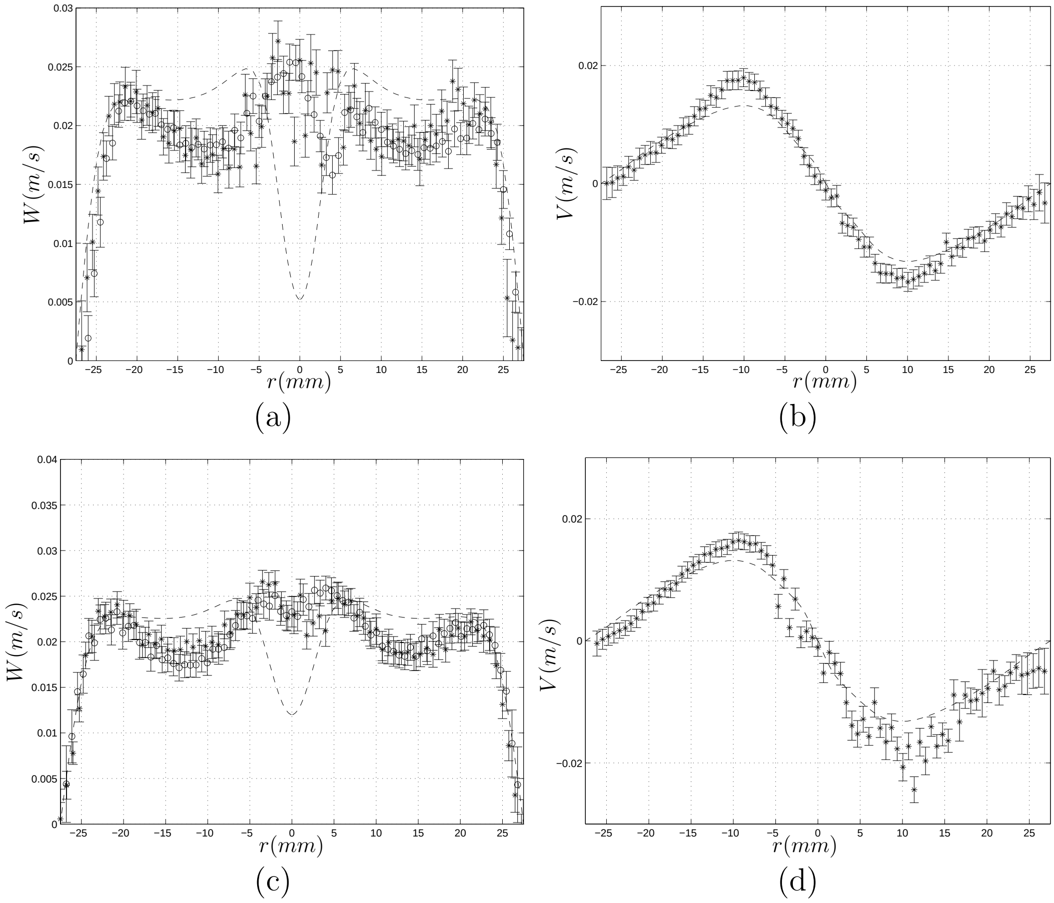



Figura 5.2: (a) y (c): Valores experimentales para $L_0 = 0{,}0149$ de la velocidad axial para $\delta = 90°$ (-∗-) y $\delta = 0°$ (-∘-) junto con el resultado de la simulación numérica axilsimétrica (- -). (b) y (d): Valores experimentales de la velocidad azimutal ,$\delta = 90°$, (-∗-) y numéricos (- -). (a)-(b) corresponden a $z$=0.5, mientras que (c) y (d) corresponden a $z$=1.0.

En la figura 5.4 se han representado los resultados experimentales para la velocidad axial $W$, la azimutal $V$, y la que resulta de la simulación numérica axilsimétrica, para los parámetros de giro $L_0$=0.0179 (a), $L_0$=0.0283 (b) y $L_0$=0.0343 (c). En la figura 5.5(a) se observa cómo para $L_0$=0.0179 se repite la misma estructura vista en las figuras 5.1 y 5.2, en el que el flujo es axilsimétrico excepto cerca del eje del conducto. Si el parámetro de giro aumenta hasta $L$=0.0283, se encuentran experimentalmente, por primera vez [figura 5.5(b)] velocidades axiales negativas. Sin embargo, este parámetro de giro es ligeramente

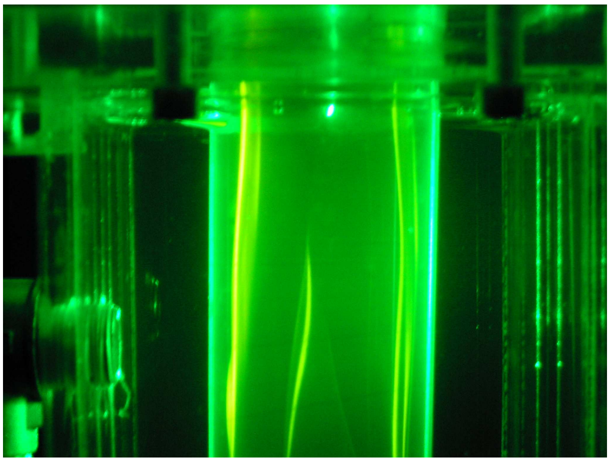


Figura 5.3: Fotografía digital para $Re$=1500 y $L_0$=0.0149.

inferior al correspondiente a la transición de la segunda burbuja de recirculación en la simulación numérica axilsimétrica. Para el valor $L_0 = 0{,}0343$, correspondiente a esta segunda transición de la simulación axilsimétrica se observa como en la coordenada $z$=0.5 [figura 5.5(c)] no sólo se hace negativa la velocidad axial en el eje, sino que además se rompe la simetría en regiones más alejadas al eje del conducto como demuestra la no coincidencia de los valores medidos en $\delta = 0°$ y en $\delta = 90°$. Esto muestra claramente la existencia de un flujo no axilsimétrico en la mayor parte de la sección.

### 5.1.2. Resultados en la sección $z$=1.0.

Además de los resultados en la sección $z$=0.5, se han obtenido medidas de la velocidad axial $W$ y azimutal $V$ para $Re$=1500 y distintos valores del parámetro de giro $L_0$ en $z$=1.0. En la figura 5.5 se representan los resultados de $V$ y $W$ para los parámetros de giro $L_0$=0 (a), $L_0$=0.003 (b), $L_0$=0.0119 (c). Si comparamos estos valores con los obtenidos en la figura 5.1, se puede deducir que el flujo en ausencia de giro [figura 5.5(a)] deja de parecerse al resultado de la simulación numérica axilsimétrica, lo que indica que el flujo es inestable aún cuando la velocidad de rotación del cuerpo interior sea nula (ver sección 5.3). A medida que se aumenta el giro [figuras 5.5(b) y (c)] la tridimensionalidad del flujo se hace cada vez más patente.

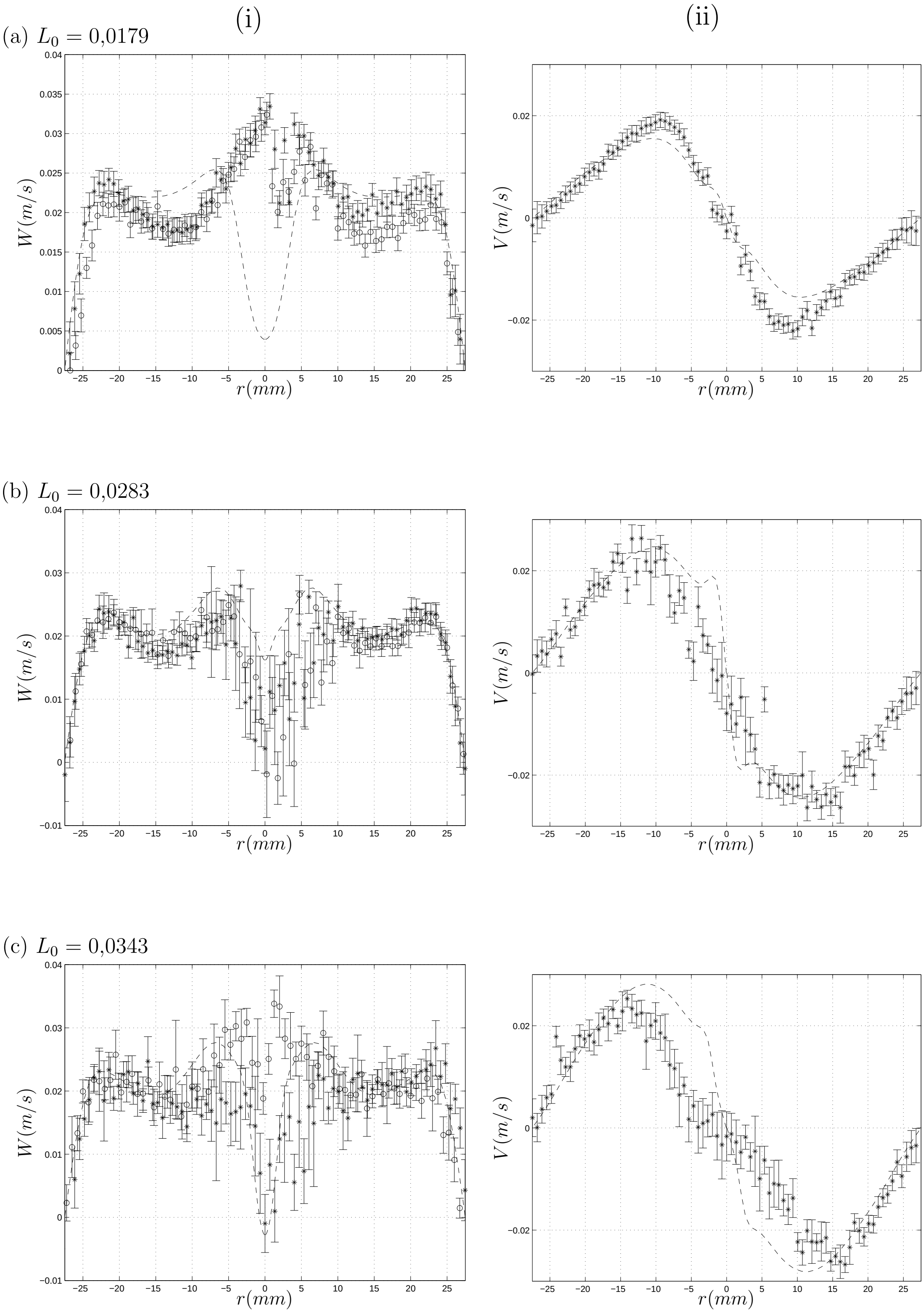



Figura 5.4: (i): valores medidos de la velocidad axial para $\delta = 90°$ (-$*$-) y $\delta = 0°$ (-$\circ$-) y el resultado de la simulación numérica axilsimétrica (- -); (ii): valores experimentales de la velocidad azimutal, $\delta = 90°$ (-$*$-) y numérico (- -). Se han representado el caso $Re$=1500 para los parámetros de giro $L_0$=0.0179 (a), $L_0$=0.0283 (b) y $L_0$=0.0343 (c).

En último lugar se han representado en la figura 5.6 los resultados de las medidas en $z$=1.0 correspondientes a los valores del parámetro de giro más altos que han sido objeto de estudio en el presente capítulo: $L_0$=0.0179 (a), $L_0$=0.0283 (b) y $L_0$=0.0343 (c). Todos los comentarios realizados para el caso $z$=0.5 son extrapolables a $z$=1.0. De estos tres casos, el que más interés tiene vuelve a ser de nuevo el mayor, $L_0$=0.0343. En la simulación numérica axilsimétrica [ver figura 4.9(h)], $z$=1.0 se encuentra justamente después de la segunda **RV** y es por este motivo por el que el campo de velocidad axial cercano al eje es nulo. Sin embargo, los datos experimentales sólo descubren que, al contrario que en $z$=0.5, donde existían valores de velocidad axial negativa, todas las velocidades son mayores que cero. Asimismo, la existencia de inestabilidades convectivas que se han desarrollado en el conducto dotan a la estructura del flujo de un carácter tridimensional, que vuelve a ponerse de manifiesto de forma muy notable en la discrepancia de los perfiles axiales en $\delta = 0°$ y $\delta = 90°$. Para complementar los datos experimentales para el caso del mayor parámetro de giro, $L_0$=0.0343, se visualizan en la figura 5.7 distintos instantes de las líneas de corriente, en las que se pone de manifiesto la tridimensionalidad del flujo.

## 5.2. Análisis de la estabilidad espacial del flujo en el montaje experimental. Discusión de los resultados.

### 5.2.1. Introducción.

En esta sección se tratará de clarificar mediante el análisis de la estabilidad espacial del flujo porqué se han encontrado discrepancias entre los resultados de la simulación numérica axilsimétrica y los resultados experimentales. Para el estudio de la estabilidad espacial se consideran los casos de los tres valores del parámetro de giro más bajos para los que se han obtenido datos experimentales en la sección anterior ($L_0$=0, 0.003 y 0.0119). De los resultados experimentales cabe esperar la existencia de una inestabilidad convectiva no axilsimétrica en el flujo para $L_0 \neq 0$. Para realizar el análisis se ha estudiado la estabilidad espacial no paralela del flujo empleando la técnica descrita en la sección 4.4.5.

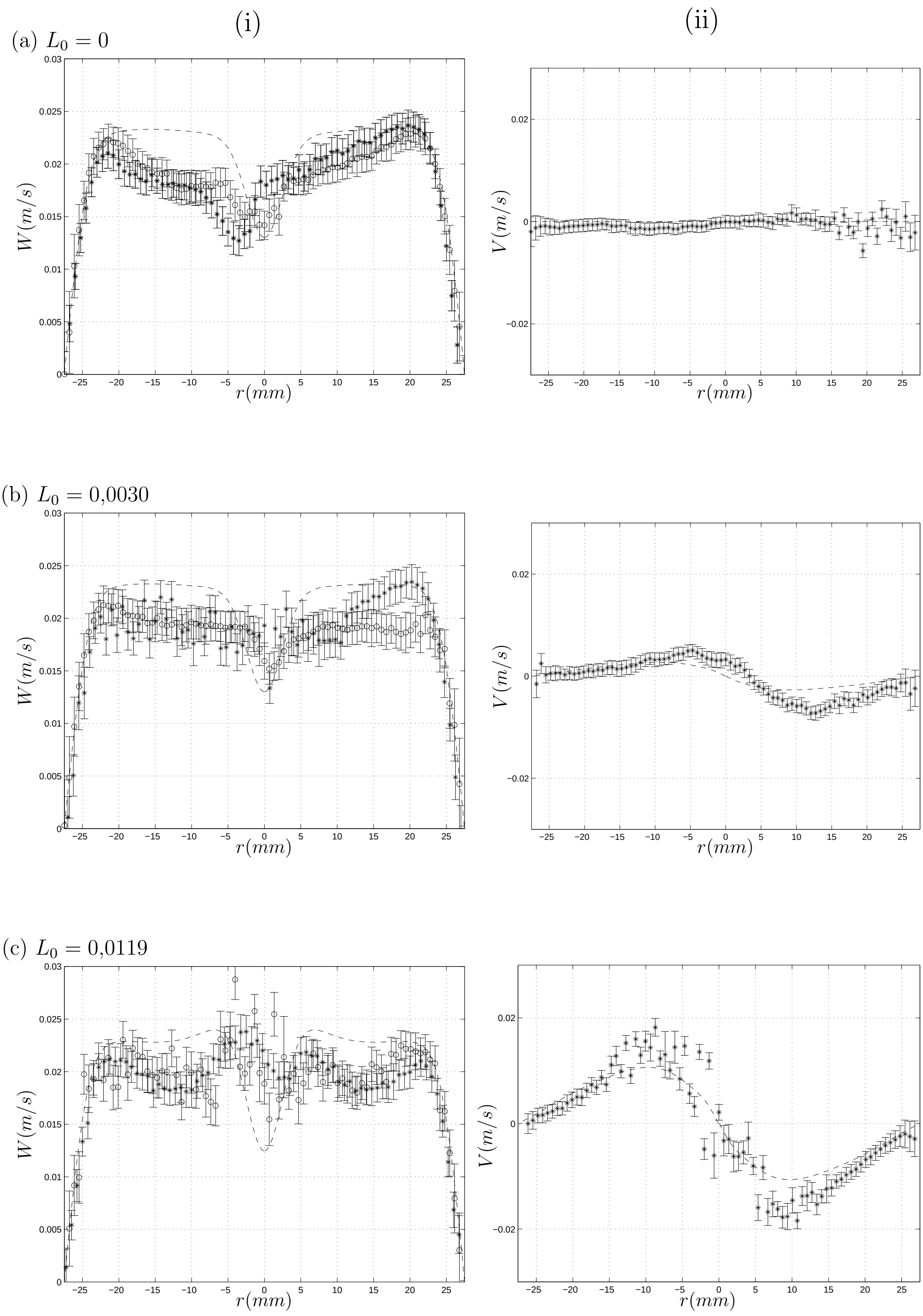



Figura 5.5: Resultados para tres valores del parámetro de giro, $L_0$=0 (a), $L_0$=0.003 (b) y $L_0$=0.0119 (c), para $z$=1.0: (i) velocidad axial experimental para $\delta = 90°$ (-∗-) y $\delta = 0°$ (-○-) y resultados numéricos axilsimétricos (- -); (ii) valores de la velocidad azimutal experimentales para $\delta = 90°$ (-∗-) y numéricos (- -).

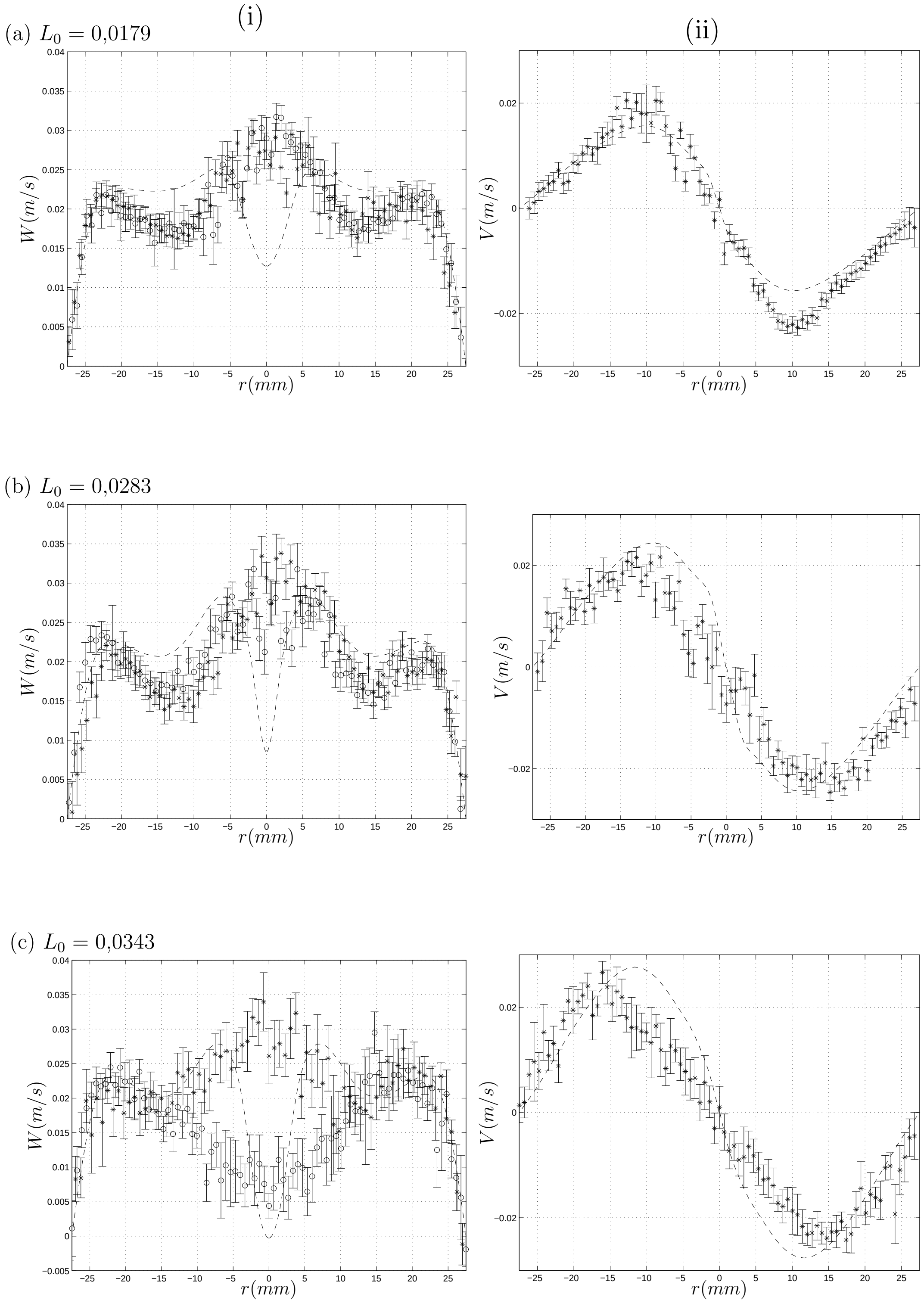
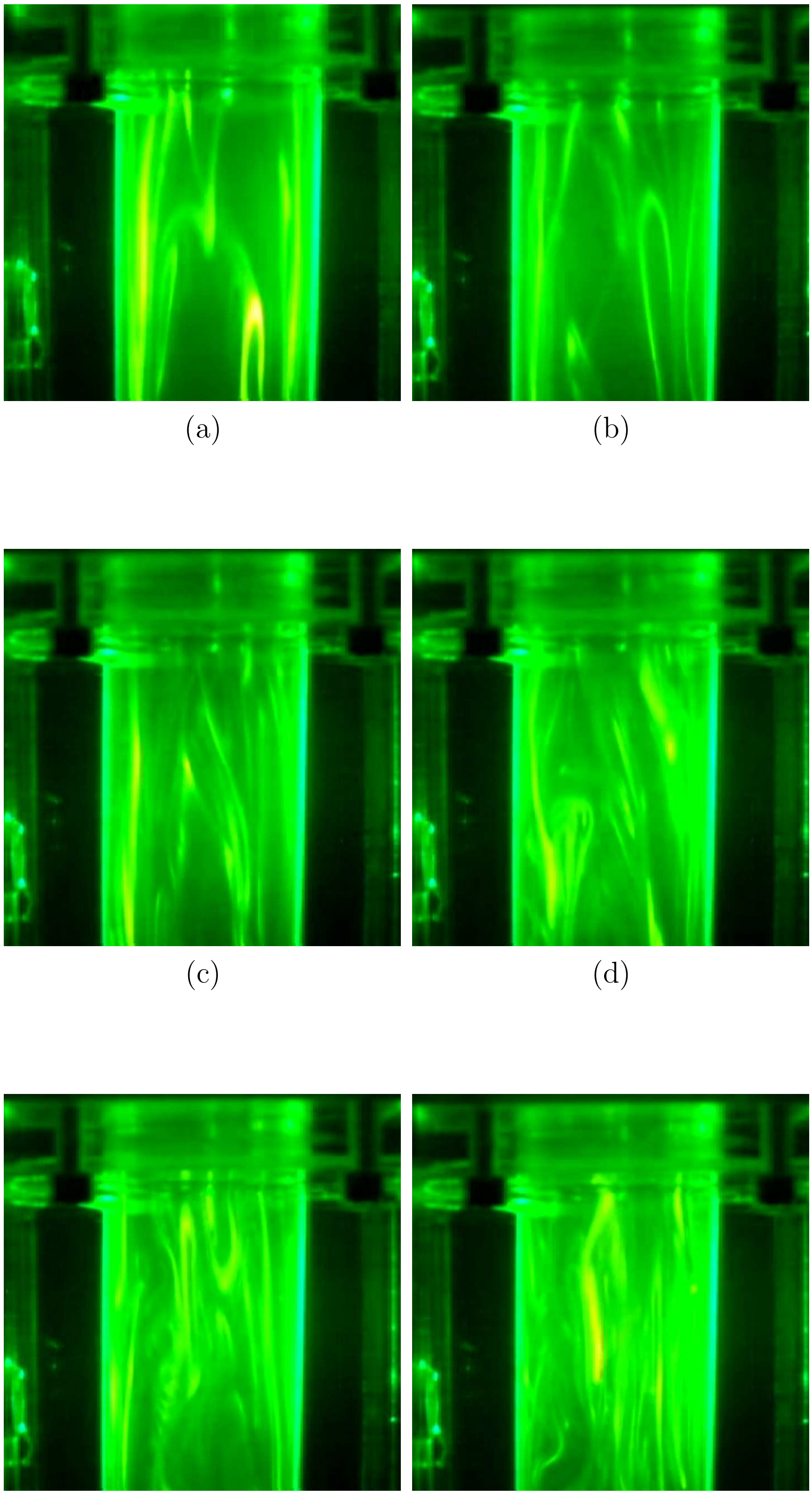



Figura 5.6: (i): valores experimentales en $z$=1.0 de la velocidad axial para $\delta = 90°$ (-∗-) y $\delta = 0°$ (-○-) y el resultado de la simulación numérica axilsimétrica (- -); (ii) valores medidos de la velocidad azimutal, $\delta = 90°$ (-∗-) y numérico (- -). Se han representado el caso $Re$=1500 para los parámetros de giro $L_0$=0.0179 (a), $L_0$=0.0283 (b) y $L_0$=0.0343 (c).



(a) (b)

(c) (d)

(e) (f)

Figura 5.7: Fotografías digitales para $Re$=1500 y $L_0$=0.0343 para distintos instantes con un intervalo de diferencia de 8 segundos entre fotografías.

El flujo en la región de entrada del montaje experimental se asemeja localmente al existente entre dos cilindros coaxiales infinitos que giran y en el que se introduce un flujo axial de Poiseuille. La estabilidad de este flujo ya ha sido estudiada por diversos autores (ver, por ejemplo, Meseguer y Marqués, 2002). Aunque las relaciones de radios no coinciden (en el trabajo de Meseguer y Marques es de 0.5, mientras que en el presente es de 0.95), los resultados de estabilidad de estos autores para el número de Reynolds y los valores del parámetro de giro que se consideran aquí vaticinan que el flujo es estable a la entrada, como así se confirma en los resultados (no mostrados) que se han obtenido en el presente trabajo. De hecho, se encuentra que los flujos son estables en toda la región de entrada entre los cuerpos interior y exterior, al menos hasta que los gradientes axiales son tan importantes que la aproximación de despreciar la segunda derivada axial deja de ser válida. Por este motivo sólo se presentarán a continuación los resultados en la región de medida ($z > 0$).

### 5.2.2. Análisis de la estabilidad espacial para $L_0 = 0$.

Empezando con la aproximación casi paralela [ecuación (4.35)] en la figura 5.8 se representan los valores máximos del factor de crecimiento de las perturbaciones (a) y los correspondientes números de onda axial (b), frente a la coordenada axial $z$ para el caso $Re$=1500, $L_0$=0, con $n$ desde -1 a -6 (la frecuencia correspondiente es $\omega$=-0.06). Son varios los aspectos que se deben destacar en la misma. En primer lugar, se observa que el flujo es estable ante cualquier perturbación no axilsimétrica. A medida que aumenta el número de onda azimutal $n$ de la perturbación, el factor de crecimiento es cada vez menor. Esto indica que los modos más relevantes son $n$=-1, -2 y -3, por lo que el resto no se tendrá en cuenta en posteriores análisis. Otro factor a tener en cuenta es el hecho de que las velocidades de fase de las perturbaciones, $c = \omega/\alpha$, son positivas y crecientes con $z$ hasta el modo $n$=-3.

Para los mismos casos anteriores se ha considerado la variación axial de las perturbaciones (análisis no paralelo) mediante la formulación de la sección 4.3.5. Los resultados de la parte real del autovalor ($\gamma$) y del factor de crecimiento físico de las perturbaciones basado en la velocidad axial del flujo ($\gamma^I$) se representan en las figuras

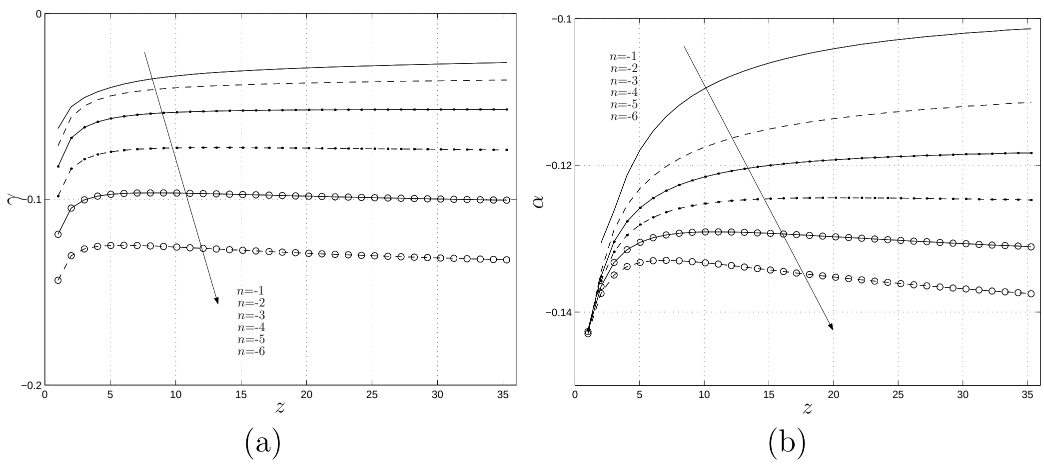
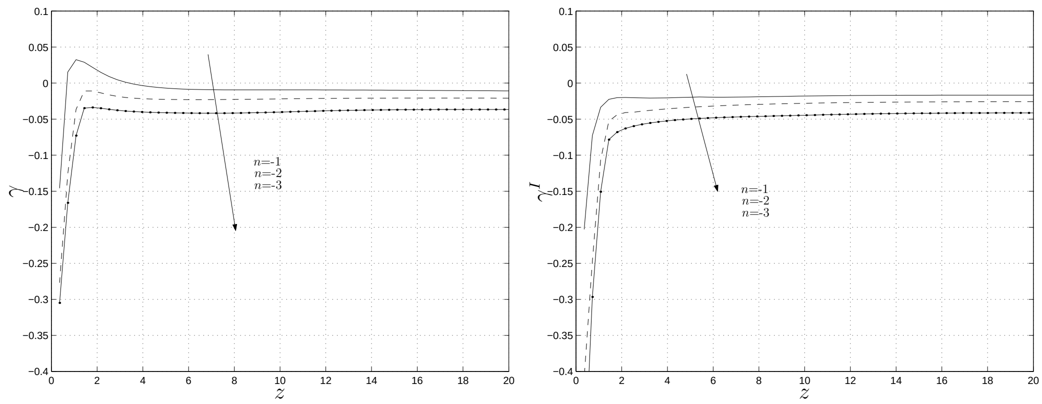



Figura 5.8: Velocidad de crecimiento máximo (a) y longitud de onda axial (b) en función de $z$ para $Re$=1500, $L_0$=0, $n$=-1 (-), $n$=-2 (- -), $n$=-3 (.-), $n$=-4 (.- -), $n$=-5 (∘-) y $n$=-6 (∘- -) y $\omega$=-0.06.

5.9(a) y (b), respectivamente. La condición inicial para arrancar las subrutinas numéricas que permiten obtener los autovalores de los tres modos considerados ($n$=-1, -2 y -3) ha sido el valor que resulta de la formulación casi paralela anterior al final del conducto ($z$=-$e_1$), para a continuación ir decrementando la posición axial. Los valores del autovalor ($\gamma$) mostrados en la figura 5.9 (a) concluirían que el flujo es inestable convectivamente al comienzo del conducto uniforme ($z \approx$0.5) para perturbaciones no axilsimétricas con $n$=-1. Sin embargo, al aplicar el criterio integral, la conclusión es que el flujo es estable en todo el dominio, al permanecer todos los valores del factor de crecimiento de las perturbaciones por debajo de cero. Con este sencillo ejemplo se ha pretendido demostrar la importancia de hallar correctamente el factor de crecimiento en un análisis de estabilidad espacial no paralelo, pues el autovalor puede dar lugar a conclusiones erróneas. Se observa, además, que $\gamma^I$) está más próximo al factor de crecimiento del análisis casi paralelo [figura 5.8(a)] que a la parte real del autovalor de la figura 5.9(a). Por este motivo, de ahora en adelante sólo se representarán los valores correspondientes a $\gamma^I$.

Experimentalmente se comprueba que el flujo es estable para $Re$=1500 en ausencia de giro ($L_0 = 0$), como se observa en la secuencia de fotos que se visualizan en la figura 5.10. En ella se observa como no existen deformaciones (por ejemplo, en forma de ondas espirales), ya que las líneas de corriente son paralelas al eje del conducto. Las fotos se han



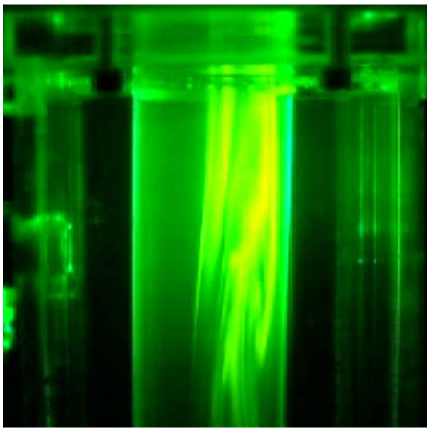
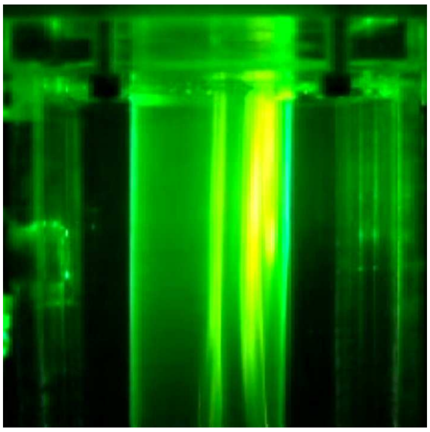

(a) (b)

Figura 5.9: Máxima parte del autovalor (a) y factor de crecimiento físico (integral) de las perturbaciones basado en la velocidad axial del flujo (b) para $Re$=1500, $L_0$=0, $\omega$=-0.06, $n$=-1 (-), $n$=-2 (- -) y $n$=-3 (.-).

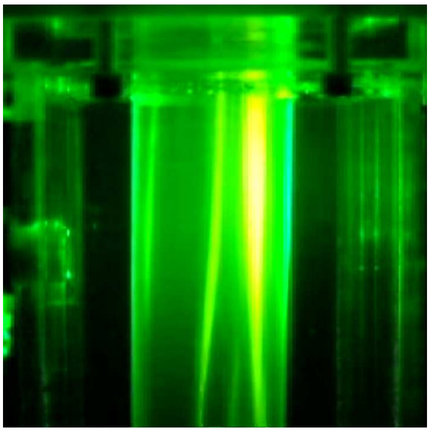
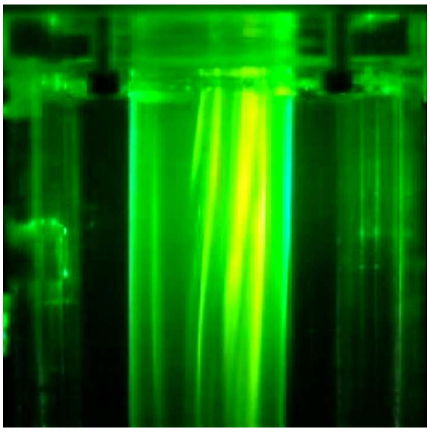
tomado con un intervalo temporal creciente de 8 segundos de diferencia, desde la figura 5.10(a) hasta la figura 5.10(f).

### 5.2.3. Análisis de la estabilidad espacial para $L_0 = 0{,}003$.

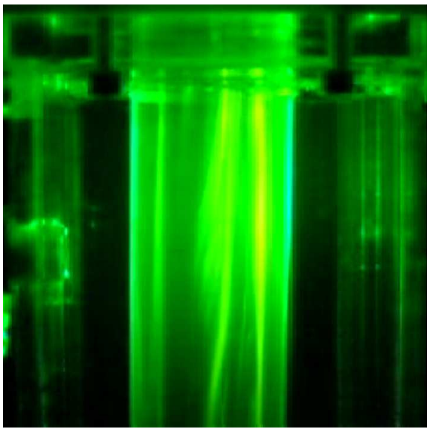
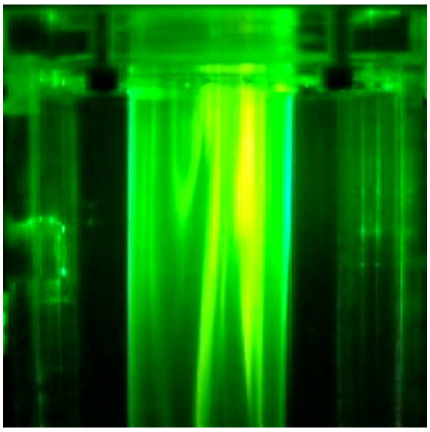
Los resultados de la estabilidad espacial casi paralela para el caso $Re$=1500 y $L_0$=0.003 se muestran en la figura 5.13. En ella se representan el máximo del factor de crecimiento de las perturbaciones (a) y la longitud de onda axial correspondiente (b) para los tres modos más inestables. Tras el estudio de un amplio rango de frecuencias, se ha determinado que aquéllas donde los factores de crecimiento son máximos a lo largo de todo el conducto son prácticamente constantes e iguales a 0.15, 0.2 y 0.25, para los números de onda $n$=-1, $n$=-2 y $n$=-3, respectivamente. A pesar de que el modo $n$=-1 era el más cercano a límite de la inestabilidad convectiva para el caso en el que el cuerpo central no giraba, para este caso, en el que se introduce un pequeño giro, existe un cambio en la tendencia del modo que primero se hace inestable en el conducto uniforme, pasando a ser $n$=-2. Este hecho es significativo ya que, según los resultados experimentales de la velocidad azimutal [figuras 5.1 y 5.5 (ii)], se deduce que la transición de modos inestables $n$=-1 a $|n|$ >1 al incrementar el valor del parámetro de giro está entre $L_0$=0.003 y 0.0119 pero parece que el modo observado es $n$=-1 [ver figura 5.1(b)-(ii)].

(a) (b)

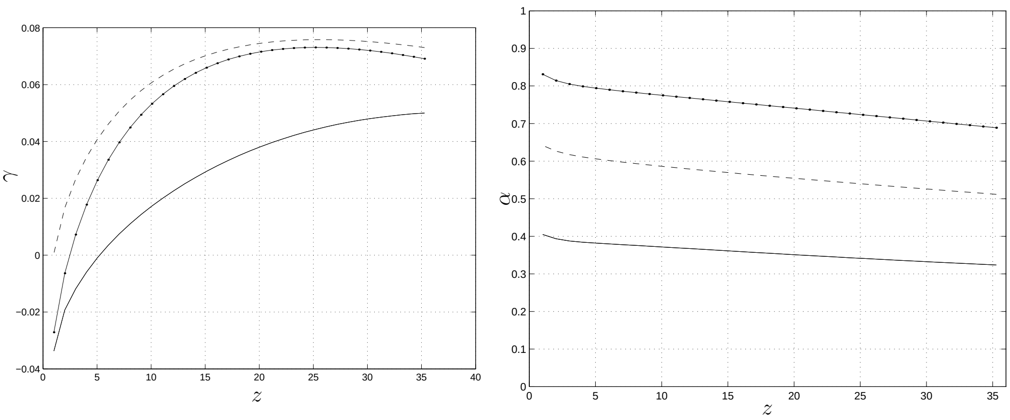
(c) (d)

(e) (f)

Figura 5.10: Fotografías digitales para $Re$=1500 y $L_0$=0.0 para distintos instantes con un intervalo de 8 segundos de diferencia entre fotografías.

Esta discrepancia entre los resultados experimentales y el estudio teórico de la estabilidad para el caso $Re$=1500 y $L_0$=0.003 puede estar relacionada con varios factores. Por un lado existe la posibilidad de que el láser no esté midiendo con suficiente exactitud en la región cercana al eje del conducto debido a que las bajas velocidades existentes requieren una mayor precisión en la medida y, por consiguiente el modo medido sea realmente $n$=-2. Por otro lado, puede ser que el valor del parámetro de giro del experimento sea ligeramente inferior a 0.003 y $n$=-1 sea el modo más inestable para ese valor de $L_0$ (recuérdese que, según la figura 5.9, el modo $n$=-1 es el menos estable para $L_0$=0).




(a) (b)

Figura 5.11: Velocidad de crecimiento máximo (a) y longitud de onda axial correspondiente (b) para $Re$=1500, $L_0$=0.003, $n$=-1 (-), $n$=-2 (- -), $n$=-3 (.-) con $\omega$ ≈0.15, 0.2 y 0.25, respectivamente.

Los resultados de la estabilidad espacial no paralela se representan en la figura 5.12. En ella se observa como los valores del factor de crecimiento integral son también mayores a cero y, por tanto, el flujo es inestable convectivamente para los tres modos considerados ($n$=-1, -2 y -3). En este caso el análisis espacial no paralelo confirma los resultados de la formulación casi paralela ya que sigue siendo el modo $n$=-2 el más inestable en el conducto de sección constante. Se representan en la figura 5.13 el módulo de las autofunciones del caso $Re$=1500, $L_0$=0.0119, $n$=-2, $\omega$=0.2 que resultan del análisis no paralelo para las secciones $z$=0.5 (a) y $z$=1.0 (b). En ellas se pone de manifiesto la existencia de una perturbación cerca del eje del conducto en la velocidad axial ($H$) en $z$=0.5. Como novedad a esto último, al incrementar la coordenada axial se observa la aparición de un nuevo máximo relativo cercano a la pared del conducto que estaría relacionado con las discrepancias observadas a nivel experimental en esta región cercana a la pared del conducto [véase en las figuras 5.1 y 5.5 (b)-(i)]. Además, es significativo el hecho de que la velocidad azimutal se deforme justamente en las regiones donde el módulo de la autofunción ($G$), correspondiente a dicha velocidad azimutal, es máxima y que, a medida que avanzamos en la coordenada axial, aparecen dos comportamientos que vienen a confirmar la exactitud del análisis de estabilidad espacial. Por un lado, el módulo de $G$ crece, lo cual concuerda con la mayor distorsión observada experimentalmente en la velocidad azimutal y, por otro, aparecen discrepancias no sólo en el eje, sino también en las regiones cercanas a la pared del conducto.

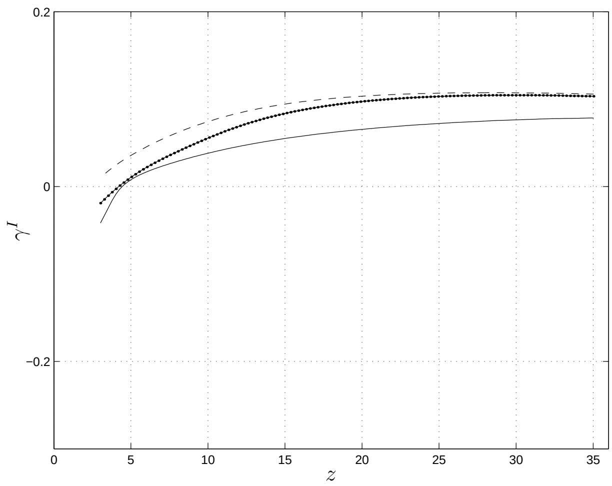
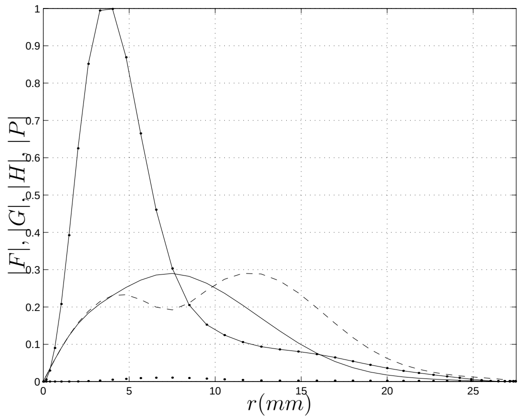



Figura 5.12: Velocidad de crecimiento máximo para $Re$=1500, $L_0$=0.003, $n$=-1 (-), $n$=-2 (- -) y $n$=-3 (.-) con $\omega$=0.15, 0.2 y 0.25 respectivamente.

### 5.2.4. Análisis de la estabilidad espacial para $L_0 = 0{,}0119$.

Los factores de crecimiento y las longitudes de onda del análisis casi paralelo del caso $Re$=1500 y $L_0$=0.0119 se representan en la figura 5.14. En este caso la experimentación vaticina un modo inestable con $|n| > 1$, caracterizado por una velocidad azimutal nula en el eje [ver figuras 5.1 ó 5.5 (c)-(ii)]. Este comportamiento se corresponde con el análisis de estabilidad espacial, tal y como se muestra en la figura 5.14(a), donde el modo $n$=-2 es el más inestable en las secciones de interés, y del primero que se hace inestable. Los resultados de los valores del factor de crecimiento correspondientes a la estabilidad espacial no paralela se muestran en la figura 5.15. En este caso se vuelve a confirmar el comportamiento cualitativo de la estabilidad casi paralela. Estos valores tan altos de la



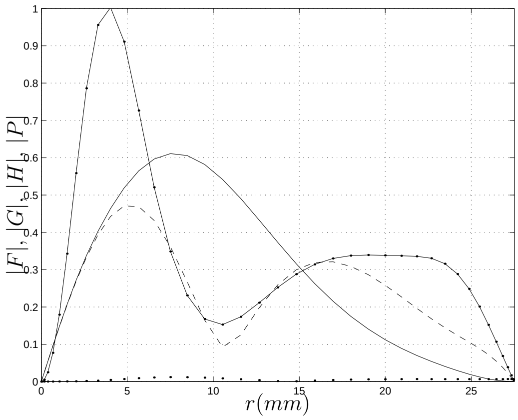




Figura 5.13: Amplitud de las autofunciones $|F|$ (-), $|G|$ (- -), $|H|$ (. -), $|P|$ (.) para $Re$=1500, $L_0$=0.003, $n$=-2, $\omega$=0.2 en $z$=0.5 (a) y $z$=1.0 (b). Todos los valores están normalizados con el máximo de $|H|$.

velocidad de crecimiento de las perturbaciones confirman el carácter altamente inestable del flujo que se genera en el montaje experimental. El módulo de las autofunciones para las secciones $z$=0.5 y $z$=1.0 se ha representado en la figura 5.16. En ella se observan dos detalles significativos relacionados con los módulos $G$ y $H$ de la perturbación. El primero de ellos es que en el módulo de la autofunción $G$ aparecen de nuevo dos máximos relativos en aquellas regiones donde los resultados experimentales y los de la simulación numérica axilsimétrica discrepan de una forma más acusada [figuras 5.1 y 5.5 (c)-(ii)] y, el segundo, es que el módulo de $H$ pasa de tener dos máximos relativos, cerca del eje y cerca de la pared, también en ambas secciones. Este último aspecto puede otra vez relacionarse, al igual que en la figura 5.13 (b) para el caso $L_0$=0.003, con la falta de simetría que hay en estas regiones en ambas secciones [figuras 5.1 y 5.5 (c)-(i)].

## 5.3. Conclusiones.

Los resultados experimentales muestran discrepancias apreciables con la simulación numérica axilsimétrica para valores no nulos del parámetro de giro. Para $L_0 = 0$, la discrepancia es muy leve y confinada en una región muy próxima al eje. Para valores

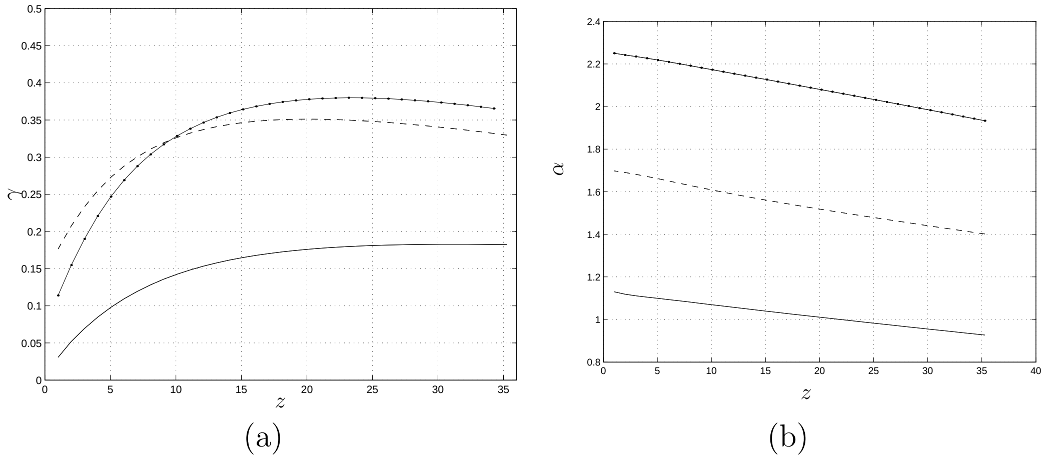



Figura 5.14: Velocidad de crecimiento máximo (a) y longitud de onda axial (b) para $Re$=1500, $L_0$=0.0119, $n$=-1 (-), $n$=-2 (- -) y $n$=-3 (.-) con $\omega$=0.38, 0.46 y 0.58, respectivamente.

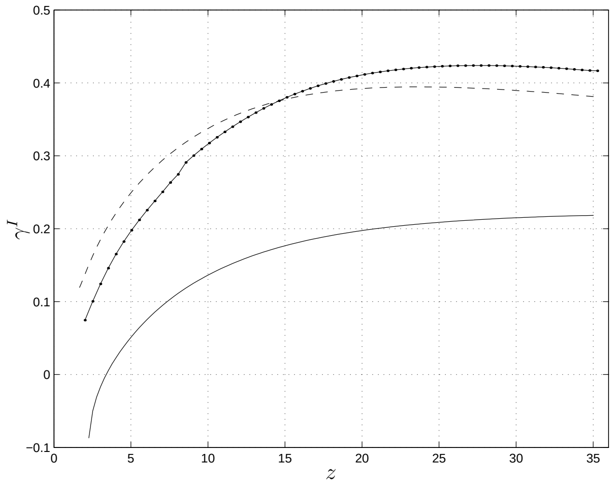
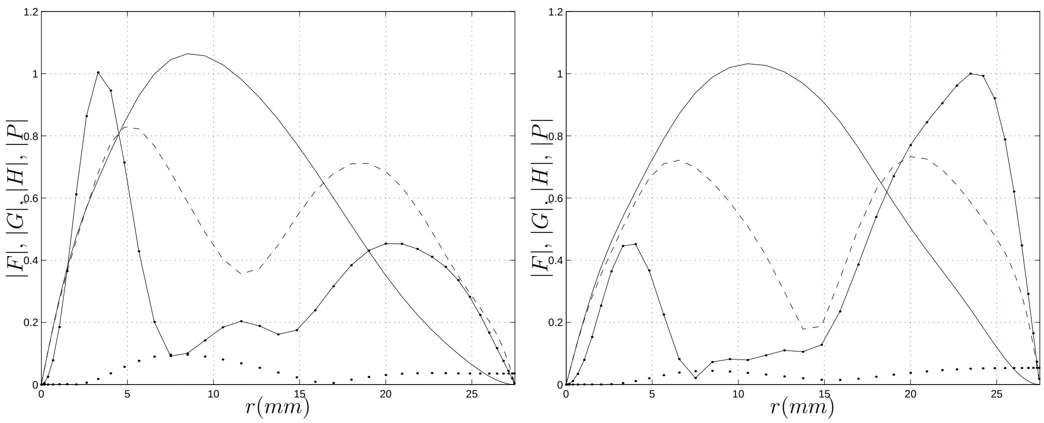



Figura 5.15: Velocidad de crecimiento máximo para $Re$=1500, $L_0$=0.003, $n$=-1 (-), $n$=-2 (- -) y $n$=-3 (.-), con $\omega$=0.38, 0.46 y 0.54, respectivamente.

del parámetro de giro relativamente grandes, el flujo experimental es claramente no axilsimétrico.

Mediante el análisis de estabilidad lineal se han explicado estas discrepancias. Para tal propósito, se ha estudiado la estabilidad espacial del flujo a lo largo del conducto para tres valores del parámetro de giro, $L_0$=0, $L_0$=0.003 y $L_0$=0.0119, que corresponden a un flujo en ausencia de giro, al menor giro reproducible en el laboratorio y al parámetro de giro previo a la existencia de una **RV** axilsimétrica, respectivamente, todo ello para un número de Reynolds $Re$=1500. Para $L_0 \neq 0$ se comprueba la existencia de perturbaciones no axilsimétricas inestables, cuyas autofunciones concuerdan con las regiones donde las




(a) (b)

Figura 5.16: Amplitud de las autofunciones $|F|$ (-), $|G|$ (- -), $|H|$ (. -), $|P|$ (.) para $Re$=1500, $L_0$=0.0119, $n$=-2, $\omega$=0.46 en $z$=0.5 (a) y $z$=1.0 (b). Todos los valores están normalizados con el máximo $|H|$.

discrepancias entre el flujo simulado axilsimétricamente y las mediciones experimentales son mayores.

# Capítulo 6

# Conclusiones.

## 6.1. Contribuciones de la tesis.

Esta tesis se ha dedicado al estudio teórico y experimental de varios aspectos relacionados con la estructura y la estabilidad de flujos con giro en conductos de sección constante o variable.

Se ha proporcionado una técnica sencilla de aplicación del criterio de Briggs y Bers para la caracterización de la aparición de la inestabilidad absoluta en el flujo de Hagen-Poiseuille con una rotación como sólido rígido. En este flujo, a pesar de tener velocidad axial siempre positiva, se ha encontrado que la transición de inestabilidad convectiva a absoluta se puede producir para un valor del parámetro de giro relativamente pequeño.

Este análisis se ha generalizado para tener en cuenta la variación axial del flujo. Primero se ha abordado la estabilidad de un flujo para el que existen datos experimentales publicados (Imao *et al.*, 1992). Mediante la formulación *PSE*, que tiene en cuenta la *'historia'* de las perturbaciones a medida que el flujo se desarrolla, se ha comprobado que los resultados obtenidos con este método están en buena concordancia con los resultados experimentales, caracterizando correctamente la coordenada en la que aparece la inestabilidad, la longitud de onda, la frecuencia y el número de onda azimutal. Se encuentra, además, que el flujo de Hagen-Poiseuille con una rotación como sólido rígido se hace inestable antes de que llegue a desarrollarse.

Se ha diseñado un experimento para generar un flujo con giro que permite realizar mediciones cuantitativas y cualitativas del flujo, además de ser fácil de simular (axilsimétricamente). La información cualitativa se ha obtenido gracias a la inyección de una sal de sodio fluorescente que destaca la estructura del flujo en la zona de visualización y medida y que es iluminada con un plano láser. El material con el que está fabricado el conducto (polietileno fluorado) ha facilitado la medición cuantitativa mediante anemometría láser de los perfiles de velocidad axial y azimutal en las diferentes secciones del conducto.

La simulación numérica axilsimétrica del flujo del montaje experimental muestra dos tipos diferentes de transiciones estructurales en función del número de Reynolds y del parámetro de giro, caracterizadas por la existencia de una o dos burbujas de recirculación cerca del eje. Esta simulación axilsimétrica ha sido la base del análisis de la estabilidad espacial. Para ello se ha presentado un método general para el análisis de la estabilidad espacial no paralelo de un flujo con variación axial en un conducto de geometría lentamente variable en la dirección axial.

La comparación de los resultados de la simulación numérica axilsimétrica con los resultados experimentales ha dejado claro que el flujo con giro generado en el montaje experimental no es axilsimétrico y, según se desprende del estudio de estabilidad espacial, altamente inestable cuando se introduce una pequeña componente azimutal. Los resultados de la estabilidad espacial del flujo, resultado de la simulación numérica axilsimétrica, proporcionan unas autofunciones que vaticinan que los modos de inestabilidad que aparecen en el flujo se sitúan en el eje del conducto y cercanos a la pared del mismo. Son precisamente en estas zonas donde se han encontrado una mayor discrepancia entre los resultados numéricos y los experimentales. Los cambios estructurales encontrados en la simulación numérica axilsimétrica asociados a la rotura de vórtice axial no se han encontrado experimentalmente debido a la existencia de estas inestabilidades frente a perturbaciones no axilsimétricas. Se han observado, sin embargo, velocidades axiales negativas cuando la intensificación del giro era lo suficientemente alta.

## 6.2. Trabajos futuros directamente relacionados con la tesis.

Tras la realización de este trabajo quedan abiertas todavía muchas incógnitas en la comprensión del complicado comportamiento que poseen los flujos con giro en conductos, ya sean de sección constante o variable y más aún en el fenómeno de la rotura de vórtices. Estas futuras líneas deben basarse en los tres pilares básicos del presente estudio, es decir, la simulación numérica, el análisis de la estabilidad y la experimentación.

Existen antecedentes y experiencia numérica suficientes para afrontar la simulación de un código tridimensional del montaje experimental existente en el laboratorio. Para su realización existen dos posibles vías, o bien la programación de un código específico tal y como se ha hecho en el caso axilsimétrico, o bien la utilización de un código comercial de elementos finitos. Ya sea de una u otra manera, toda la información experimental recopilada en esta tesis sobre los perfiles de velocidad axial y azimutal puede ser utilizada para realizar la comparación con los resultados de la simulación numérica no axilsimétrica.

Se han desarrollado en el presente estudio herramientas para el estudio de la estabilidad espacial con y sin variación axial. Queda, sin embargo, la alternativa de un estudio de la estabilidad global (lineal) del flujo, que solventaría la dificultad encontrada en las regiones donde la variación axial no es pequeña.

Se ha diseñado el montaje experimental para dotarlo de una gran versatilidad. Este hecho puede ser aprovechado con varias alternativas. Así, se ha dispuesto de otro motor de corriente alterna que controla la velocidad de giro del depósito exterior y, de esta forma, estudiar un mayor número de casos, con velocidades relativas de giro entre el cuerpo interno y el depósito, tanto positivas como negativas, según el sentido de giro entre ambos. Se contempla además la posibilidad de añadir cualquier otro dispositivo o mecanismo perturbador al montaje experimental, tales como bombas de impulsión, en las cuales se gradúe la amplitud y la frecuencia de los pulsos, para producir inestabilidades forzadas en un flujo con o sin giro. Por otro lado, la zona de visualización y medida puede ser en cualquier momento rediseñada y está preparada para albergar cualquier cambio que se estime oportuno. Sería interesante, por ejemplo, hacer un estudio acerca de la existencia o no de histéresis en los flujos con giro generados. Por último, queda abierta la obtención del campo de velocidad cuantitativo con otro tipo de dispositivo para adquirir datos como, por ejemplo, la anemometría láser *LDA* 3-D, o la velocimetría de partículas *PIV* (del inglés, *Particle Image Velocimetry*), que aportarían mucha más información del campo de velocidad del flujo.

# Bibliografía


Akylas, T.R., & Demurger, J.P. 1984. The effect of rigid rotation on the finite-amplitude stability of pipe flow at high Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, **148**, 193–205.

Anderson, P., Henningson, D.S., & Hanifi, A. 1998. On a stabilization procedure for the parabolic stability equations. *J. Engin. Math.*, **33**, 311–332.

Batchelor, G.K., & Gill, A.E. 1962. Analysis of the stability of axisymmetric jets. *J. Fluid Mech.*, **14**, 529–551.

Benjamin, T. 1962. Theory of the vortex breakdown. *J. Fluid Mech.*, **14**, 593–629.

Bertolotti, F.P., Herbert, Th., & Spalart, P.R. 1992. Linear and nonlinear stability of the Blasius boundary layer. *J. Fluid Mech.*, **242**, 441–474.

Bridges, T.J., & Morris, P.J. 1984. Differential eigenvalue problems in which the parameter appears nonlinearly. *J. Comput. Phys.*, **55**, 437–460.

Canutto, C., Hussaini, M.Y., Quarteroni, A., & Zang, T.A. 1987. Spectral Methods in Fluid Dynamics. *Springer-Verlag*, **1**, 1–551.

Cotton, F.W., & Salwen, H. 1981. Linear stability of rotating Hagen-Poiseuille flow. *J. Fluid Mech.*, **108**, 101–125.

Darmofal, N.R. 1995. Experimental and numerical comparison for axisymmetric vortex breakdown in pipes. *Computers and Fluids*, **24**, 331–351.

del Pino C., Ortega Casanova, J., & Fernández Feria, R. 2003. Nonparallel stability of the flow in an axially rotating pipe. *Fluid Dynamics Research*, **32**, 261–281.

Delbende, I., Chomaz, J.-M., & Huerre, P. 1998. Absolute/convective instabilities in the Batchelor vortex: a numerical study of the linear impulse response. *J. Fluid Mech.*, **355**, 229–254.

Delery, J.M. 1997. Aspects of vortex breakdown. *Prog. Aerospace Sci*, **30**, 1–59.

Escudier, M.P. 1988. Vortex breakdown: observations and explanations. *Prog. Aero. Sci*, **25**, 189–229.

Fernández Feria, R. 1996. Viscous and inviscid instabilities of non-parallel self-similar asisymmetric vortex cores. *J. Fluid Mech.*, **323**, 339–365.

Fernández Feria, R. 1999. Nonparallel linear stability analysis of Long's vortex. *Phys. Fluids*, **11**, 1114–1126.

Fernández Feria, R. 2000. Axisymmetric instabilities of Bödewadt flow. *Phys. Fluids*, **12**, 1730–1739.

Fernández Feria, R., & del Pino, C. 2002. The onset of absolute instability of rotating Hagen-Poiseuille flow: A spatial stability analysis. *Phys. Fluids*, **14**, 3087–3097.

Garg, V.K., & Rouleau, W.T. 1972. Linear spatial stability of pipe Poiseuille flow. *J. Fluid Mech.*, **54**, 113–127.

Gelfgat A., Bar-Yoseph P. y A. Solan. 1996. Stability of confined swirling flow with and without vortex breakdown. *J. Fluid Mech.*, **311**, 1–36.

Hall, M. 1972. Vortex breakdown. *Annual Review of Fluid Mechanics*, **4**, 195–218.

Herbert, Th. 1997. Parabolized stability equations. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **29**, 245–283.

Huerre, P., & Monkewitz, P.A. 1990. Local and global instabilities in spatially developing flows. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **22**, 473–537.

Huerre, P., & Rossi, M. 1998. Hydrodynamic instabilities in open flows. *In:* Godreche, C., & Manneville, P. (eds), *Hydrodynamics and nonlinear instabilities.* Cambridge University Press.

Imao, S., Zhang, Q., & Yamada, Y. 1989. The laminar flow in the developing region of a rotating pipe. *JSME Int. J. Ser. II*, **32**, 317–323.

Imao, S., Itoh, M., Yamada, Y., & Zhang, Q. 1992. The characteristics of spriral waves in an axially rotating pipe. *Exp. Fluids*, **12**, 277–285.

Khorrami, M.R. 1991. A chebyshev spectral collocation method using a staggered grid for the stability of cylindrical flows. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, **12**, 825–833.

Khorrami, M.R., Malik, M.R., & Ash, R.L. 1989. Application of spectral collocation techniques to the stability of swirling flows. *J. Comput. Phys.*, **81**, 206–229.

Kochevsky, A.N. 2001. Numerical investigation of swirling flow in annular diffusers with a rotating hub installed at the exit of hydraulic machines. *ASME J. Fluids Eng.*, **123**, 484–489.

Leibovich, S. 1978. The structure of vortex breakdown. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **10**, 221–346.

Lim, D.W., & Redekopp, L.G. 1998. Absolute instability conditions for variable density, swirling jet flows. *Eur. J. Mech. B/Fluids*, **17**, 165–185.

Loiseleux, T., & Chomaz, J.M. 2003. Breaking of rotational symmetry in a swirling jet experiment. *Phys. Fluids*, **15**, 511–523.

Loiseleux, T., Chomaz, J.-M., & Huerre, P. 1998. The effect of swirl on jets and wakes: Linear instability of the Rankine vortex with axial flow. *Phys. Fluids*, **10**, 1120–1134.

Loiseleux, T., Delbende, I., & Huerre, P. 2000. Absolute and convective instabilities of a swirling jet/wake shear layer. *Phys. Fluids*, **12**, 375–380.

Lopez, J.M., & Weidman, P.D. 1996. Stability of stationary endwall boundary layers during spin-down. *J. Fluid Mech.*, **326**, 373–398.

Mackrodt, P.A. 1976. Stability of Hagen-Poiseuille flow with superimposed rigid rotation. *J. Fluid Mech.*, **73**, 153–164.

Maslowe, S.A. 1974. Instability of rigidly rotating flows to non-axisymmetric disturbances. *J. Fluid Mech.*, **64**, 307–317.

Maslowe, S.A., & Stewartson, K. 1982. On the linear inviscid stability of rotating Poiseuille flow. *Phys. Fluids*, **25**, 1517–1523.

Mattner, T.W., P.N., Joubert, & M.S., Chong. 2002. Vortical flow. Part 1. Flow through a constant-diameter pipe. *J. Fluid Mech.*, **463**, 259–291.

Meseguer, A., & Marques, F. 2002. On the competition between centrifugal and shear instability in spiral Poiseuille flow. *J. Fluid Mech.*, **455**, 129–148.

Numerics, Inc. 1994. IMSL Math/Library FORTRAN. *Subroutines for mathematical applications*, **Volume 1 and 2**, 1–1193.

Olendraru, C., & Sellier, A. 2002. Viscous effects in the absolute-convective instability of the Batchelor vortex. *J. Fluid Mech.*, **459**, 371–396.

Olendraru, C., Sellier, A., Rossi, M., & Huerre, P. 1999. Inviscid instability of the Batchelor vortex: Absolute-convective transition and spatial branches. *Phys. Fluids*, **11**, 1805–1820.

Ortega Casanova, J. 2000. *Sobre la influencia de la viscosidad en la rotura de vórtices en conductos*. Tesis Doctoral, Universidad de Málaga.

Pedley, T.J. 1968. On the instability of rapidly rotating shear flows to non-axisymmetric disturbances. *J. Fluid Mech.*, **31**, 603–607.

Pedley, T.J. 1969. On the instability of viscous flow in a rapidly rotating pipe. *J. Fluid Mech.*, **35**, 97–115.

Ruith, M.R., P., Chen, Meiburg, E., & T., Maxworthy. 2003. Three-dimensional vortex breakdown in swirling jets and wakes: direct numerical simulation. *J. Fluid Mech.*, **486**, 331–378.

Salwen, H., & Grosch, C.E. 1972. The stability of Poiseuille flow in a pipe of circular cross-section. *J. Fluid Mech.*, **54**, 93–112.

Sanmiguel Rojas, E. 2002. *Sobre el fenómeno de la autorrotación*. Tesis Doctoral, Universidad de Málaga.

Sarpkaya, T. 1971. On stationary and travelling vortex breakdown. *J. Fluid Mech.*, **45**, 545–559.

Sarpkaya, T. 1974. Effect of the adverse pressure gradient on vortex breakdown. *AIAA Journal*, **12**, 602–607.

Toplosky, N., & Akylas, T.R. 1987. Nonlinear spiral waves in rotating pipe flow. *J. Fluid Mech.*, **148**, 39–54.

Wang, S., & Rusak, Z. 1996a. On the stability of an axisymmetric rotating flow in a pipe. *Phys. Fluids*, **8**, 1007–1016.

Wang, S., & Rusak, Z. 1996b. On the stability of non-columnar swirling flows. *Phys. Fluids*, **8**, 1017–1023.

Wang, S., & Rusak, Z. 1997. The dynamics of swirling flows in a pipe and transition to axisymmetric vortex breakdown. *J. Fluid Mech.*, **340**, 177–223.

Yin, X.-Y., Sun, D.-J., Wei, M.-J., & Wu, J.-Z. 2000. Absolute and convective character of slender viscous vortices. *Phys. Fluids*, **12**, 1062–1072.