

Universidad de Málaga

Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales

Dept. de Ingeniería Mecánica y Mecánica de Fluidos

Área de Mecánica de Fluidos



Tesis Doctoral

SOBRE LA INFLUENCIA DE LA VISCOSIDAD EN
LA ROTURA DE VÓRTICES EN CONDUCTOS

Joaquín Ortega Casanova

Diciembre, 2000

D. Ramón Fernández Feria, Catedrático de Mecánica de Fluidos de la Universidad de Málaga,

INFORMA:

Que D. Joaquín Ortega Casanova ha realizado bajo mi dirección la Tesis titulada “Sobre la influencia de la viscosidad en la rotura de vórtices en conductos”, reuniendo todos los requisitos necesarios para optar al grado de Doctor Ingeniero Industrial.

Málaga, 31 de Octubre de 2000.

Fdo.: Dr. Ramón Fernández Feria

Universidad de Málaga

Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales

Dept. de Ingeniería Mecánica y Mecánica de Fluidos

Área de Mecánica de Fluidos



Tesis Doctoral

**SOBRE LA INFLUENCIA DE LA VISCOSIDAD EN
LA ROTURA DE VÓRTICES EN CONDUCTOS**

presentada por

Joaquín Ortega Casanova

para optar al grado de Doctor en Ingeniería

Dirigida por

Dr. Ramón Fernández Fera

Catedrático de Mecánica de Fluidos

“Que tu trabajo sea
el fiel reflejo
de ti mismo.” J.H.S.

A Pilar y a ...

Agradecimientos

Agradecer, en primer lugar, del modo más sincero al profesor Dr. Ramón Fernández Fera, Director de esta Tesis, su confianza en mí en todo momento, sus enseñanzas y su dedicación, ayuda e interés durante el desarrollo de esta Tesis.

Al profesor Dr. Ignacio González Loscertales, por su apoyo, ánimos y tantos comentarios sobre este trabajo durante estos años.

Al Dr. Juan Carlos Arrese Aguilera quiero agradecerle su amistad durante estos años y su ayuda y ánimos en los años en que colaboramos juntos. También quiero agradecer a Enrique Sanmiguel Rojas su ayuda y todos los ánimos que me ha dado durante el tiempo que llevamos colaborando.

A todos los compañeros que han pasado por el Área de Mecánica de Fluidos durante la realización de su proyecto final de carrera, por tantos momentos como pasamos juntos: Ezequiel Saez de Tejada, Manolo Luengo, Ricardo Juarez y Enrique Sanmiguel.

Al profesor Dr. Juan M. López de la Universidad Estatal de Arizona (EE.UU.) por su interés con nuestra colaboración durante mis dos estancias en aquella universidad. Agradecer también a la familia López su trato y amabilidad con mi mujer y conmigo.

A mis hermanos Carlos y Alberto por ser como son conmigo y por su continuo apoyo.

A mis padres, por tanto como han hecho y están haciendo por mis hermanos y por mí desde siempre, y por su apoyo y ánimos en estos años.

Al Ministerio de Educación y Ciencia, al cual, durante los años 1996-1999, pertencí como becario de investigación, y a la Universidad de Málaga, a la que actualmente pertenezco como profesor asociado.

También agradecer la financiación económica a través de los Proyectos de Investigación PB96-0679 de la DGES y CRG 950368 de la OTAN.

A toda mi familia.

Por último, y no menos importante, agradecerle ∞ a mi mujer Pilar lo que todos estos años lleva pasado conmigo y con la Tesis, por tantos momentos juntos, por su constante apoyo y ánimo, y por estar siempre ahí cuando la he necesitado.

Índice general

Índice general	13
1. Introducción y objetivos	15
1.1. Preliminares	15
1.2. Teorías acerca de la rotura de vórtices	17
1.3. Objetivos del presente trabajo	20
2. Análisis preliminar de los modelos no viscosos de flujos con giro en conductos	23
2.1. Introducción	23
2.2. El problema casi cilíndrico	26
2.3. Flujo no viscoso singular en el eje.	27
2.3.1. Caso $m = 1$	29
2.3.2. Caso $1 < m < 2$	31
2.4. Regularización del flujo a la entrada	38
2.4.1. Caso $m = 1$	40
2.4.2. Caso $1 < m < 2$	45
2.5. Conclusiones	48
3. Flujo no viscoso con giro en conductos de sección variable	53
3.1. Introducción	53
3.2. Formulación del problema	54
3.3. Solución asintótica aguas abajo y valores críticos del parámetro de giro	58
3.4. Resultados numéricos	64
3.5. Conclusiones y discusión	73

4. Flujo viscoso en conductos de sección variable: código numérico y validación.	79
4.1. Introducción	79
4.2. Ecuaciones. Formulación función de corriente–circulación–vorticidad	80
4.3. Geometría del conducto y condiciones de contorno	82
4.4. Variables adimensionales	84
4.5. Cambio de coordenadas	86
4.6. Resolución numérica	91
4.6.1. Resolución de las ecuaciones de transporte para Π y Γ	92
4.6.2. Resolución de la ecuación de Poisson para ψ	93
4.7. Validación del código numérico	101
4.7.1. Decaimiento del giro en un conducto uniforme	101
4.7.2. Comparación con los resultados de Darmofal (1996) para un conducto no uniforme	103
4.7.3. Influencia de la Condición de no deslizamiento en la pared	109
5. Flujo viscoso en conductos de sección variable: resultados	115
5.1. Introducción	115
5.2. Geometría	115
5.3. Análisis de la precisión de los resultados numéricos	116
5.4. Resultados	121
5.4.1. Giro de la pared externa con la interior fija [caso (b)]	123
5.4.2. Giro de las paredes externa e interna [caso (a)]	131
5.4.3. Giro de la pared interna [caso (c)]	136
5.5. Resumen	136
6. Conclusiones	161
6.1. Contribuciones de la tesis	161
6.2. Trabajo futuro relacionado con esta tesis	163
Bibliografía	165

Capítulo 1

Introducción y objetivos

1.1. Preliminares

Esta tesis se dedica al estudio de flujos con giro intenso, es decir, flujos que poseen, además de la componente de la velocidad en la dirección principal del movimiento, otra componente también importante en la dirección azimutal. En este tipo de flujos ocurre el fenómeno conocido como “*rotura de vórtices*” (de ahora en adelante lo llamaremos con las iniciales **RV**) cuando la intensidad del giro relativa a la intensidad del movimiento axial supera un cierto umbral. Este fenómeno ha sido observado en flujos que aparecen en la Naturaleza y en otros de gran interés tecnológico. Entre los primeros, el más significativo se presenta en los tornados, cuya rápida aparición y repentina destrucción se cree debida a la autogeneración de movimiento giratorio y a la RV, respectivamente. Entre los ejemplos de interés tecnológico, quizás el más importante aparece en el campo de la Aeronáutica: sobre el borde exterior de alas u otras superficies sustentadoras con borde de ataque inclinado y con gran ángulo de incidencia se originan vórtices intensos que incrementan notablemente la fuerza sustentadora en las maniobras de despegue, aterrizaje y otras donde el ángulo de incidencia es grande; sin embargo, bajo ciertas condiciones estos vórtices se rompen dramáticamente, dando lugar a graves consecuencias no sólo derivadas del cambio brusco en la sustentación, sino también por la aparición repentina de momentos que tienden a desestabilizar el aparato. De esto deriva el enorme interés aparecido en círculos aerodinámicos por predecir y evitar su formación. Otros ejemplos de interés tecnológico donde aparece la RV se presentan en el campo de la Ingeniería Química, como por ejemplo en cámaras (turbinas) de combustión, en separadores ciclónicos, etc. Al contrario de lo que se pretende en los vórtices aeronáuticos, en estos la RV es un

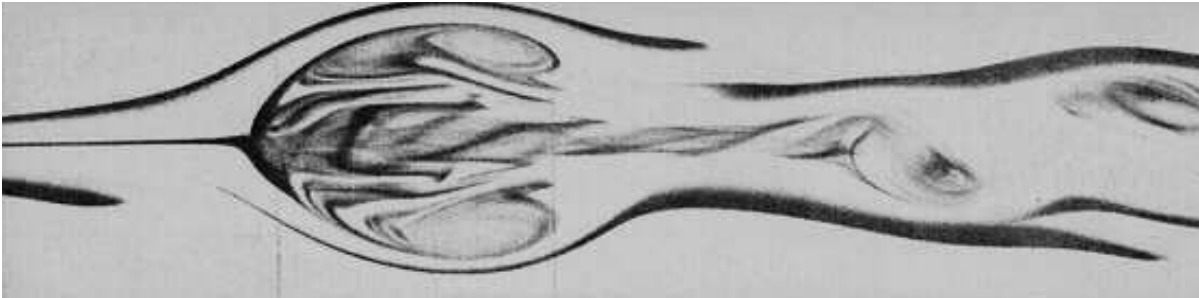


Figura 1.1: Rotura de tipo burbuja de un vórtice en un conducto. Tomada de Escudier (1988).

fenómeno deseable y por ello se trata de favorecer su formación. En resumen, el estudio de las condiciones de aparición del fenómeno de rotura de vórtices tiene gran relevancia práctica, bien para evitar su formación o para favorecerlo.

De una manera descriptiva se puede decir que la RV es un cambio abrupto de la estructura del flujo con giro intenso (que por brevedad lo llamaremos vórtice) cerca de su eje de giro. Este cambio viene caracterizado por una rápida deceleración, deformación y/o expansión del núcleo, aparición de regiones de recirculación a lo largo del eje principal del movimiento, que normalmente coincide con el de giro, indicadas éstas por puntos de remanso sobre él, y por cambios en la distribución de velocidades y presiones en los alrededores de esta región. De esta forma, el vórtice inicialmente concentrado a lo largo del eje de giro se rompe y en su lugar aparece una región de diámetro mucho mayor y de flujo mucho más lento que, generalmente, produce un flujo turbulento aguas abajo (ver figura 1.1). Este cambio drástico en la configuración del flujo ocurre bruscamente sin ninguna causa “aparente”, siendo por ello un fenómeno que ha atraído la atención tanto de teóricos como experimentalistas en el ámbito de la Mecánica de Fluidos desde su primera observación a finales de los años 50. A pesar del tiempo transcurrido y de su interés tecnológico, no existe todavía una teoría universalmente aceptada que explique satisfactoriamente este fenómeno. Se han propuesto varias teorías que lo intentan explicar y que brevemente se comentan en §1.2 junto con cada uno de sus autores, pero ninguna de ellas es completamente satisfactoria. En lo que si parece que hay acuerdo, sobre todo después del trabajo de Spall, Gatski & Grosh (1987), es en que el mecanismo de “rotura” es universal, independiente de las circunstancias externas que originan el vórtice. Es decir, el criterio de rotura expresado con el parámetro adecuado, parece que es independiente

(al menos a altos números de Reynolds) de si el vórtice se desarrolla en una cavidad o es un torbellino libre: no parece que el criterio sea esencialmente distinto para un tornado, para un flujo en un conducto o en una cámara de combustión, para un torbellino en el interior de una cámara cerrada, etc.

1.2. Teorías acerca de la rotura de vórtices

La bibliografía existente sobre la RV es muy abundante, extendiéndose por un periodo de más de 40 años. Existen excelentes artículos de revisión de la literatura sobre el tema (por ejemplo, las referencias Hall, 1972, Leibovich, 1983, Escudier, 1988, Delery, 1994, Rusak & Wang, 1996), con los que se puede obtener una idea general de casi toda la bibliografía previa. A pesar de la gran cantidad de trabajos abordando el tema de la RV, este problema aún no está totalmente resuelto. Su complejidad ha hecho que no exista un acuerdo entre los distintos investigadores especialistas en el tema sobre la naturaleza del mecanismo básico origen de la formación de la RV. Así, muchos han sido los autores que han intentado dar una teoría o definición de este complejo fenómeno. A continuación se expondrán brevemente las líneas generales de algunas de las teorías que distintos autores presentaron en su día con la intención de explicar en que consiste este fenómeno (para información más detallada ver los artículos de revisión citados anteriormente), prestando mayor atención a aquellos trabajos que están más relacionados con esta tesis.

Ludwig (1962, 1964) interpreta la RV como un fenómeno consecuencia de una inestabilidad a perturbaciones espirales. Para ello consideró la estabilidad de un flujo no viscoso girando en una estrecha separación cilíndrica. A pesar de que Ludwig da un criterio para la aparición de la inestabilidad, su teoría tiene las limitaciones de estar basada en flujos no viscosos, de no explicar el tipo de RV axilsimétrico (Jones, 1960) y de que su criterio predice inestabilidades para un gran rango de flujos casi cilíndricos, incluso para aquellos que no presentan RV (Hall, 1966). Posteriormente a los trabajos de Ludwig, se han realizado muchos otros que han intentado relacionar la RV con inestabilidades lineales de flujos con giro (ver, por ejemplo, Leibovich, 1978). Se han tenido en cuenta muchos efectos adicionales como el de la viscosidad y se han encontrado diversos tipos de inestabilidades interesantes. Sin embargo, de ellos se desprende que no hay una relación directa entre la RV y las inestabilidades (lineales) convectivas comunes en este tipo de

flujos (ver, por ejemplo, Gelfgat, Bar-Yoseph & Solan, 1996, para vórtices confinados en un cilindro y Fernández Fera, 1996, para una cierta familia de chorros con giro).

Hall (1967), teniendo en cuenta que en los vórtices concentrados la componente axial de la velocidad es mucho más importantes que la radial, utilizó ecuaciones parabólicas para describirlos y encontró que justo antes de la rotura dejaban de tener solución. Así, podía predecir la aparición de la RV como una pérdida de validez de las ecuaciones casi cilíndricas que describen aproximadamente los chorros con giro intenso, de forma análoga a como las ecuaciones parabólicas de capa límite dejan de tener validez y solución justo antes de la separación de la corriente. Situaciones similares fueron descritas, entre otros, por Burggraf & Foster (1977) para chorros que según ellos sirven para modelar tornados y, de forma casi analítica, por Fernández Fera, Fernández de la Mora & Barrero (1995) para una familia de chorros con giro con estructura autosemejante. Este tipo de descripciones, sin embargo, no explican el mecanismo de la RV, ni pueden predecir lo que ocurre después de la rotura, donde el flujo deja de ser gobernado por ecuaciones parabólicas. En particular, no pueden describir la estructura del flujo después de la rotura, que está sin duda influenciada por lo que ocurre aguas abajo. No obstante, predicen de una forma precisa que la aparición del fenómeno de rotura se produce cuando la intensidad relativa del giro supera un cierto valor crítico, y ponen de manifiesto el papel importante que la viscosidad juega en la RV.

Otro conjunto de trabajos, comenzado por Squire (1960) y, sobre todo, por Benjamin (1962), describen la RV desde un punto de vista no viscoso como una transición entre un flujo supercrítico y otro subcrítico; es decir, entre un flujo que sólo puede sustentar perturbaciones propagándose corriente abajo y otro que también puede sustentar perturbaciones que se propagan aguas arriba, de forma análoga a la transición que se presenta en un flujo compresible ideal a través de una onda de choque o en un flujo en un canal mediante un resalto hidráulico. La teoría fue refinada posteriormente por diversos autores, de forma significativa por Landahl & Widnall (1971) y Escudier & Keller (1983). Esta descripción de la RV como una transición entre los dos flujos *conjugados* pone de manifiesto un aspecto muy importante del fenómeno. Sin embargo, aparte de que se aplica a flujos no viscosos, tampoco explica el mecanismo subyacente de la RV.

Dada la complejidad del fenómeno de rotura en flujos de interés práctico, se ha recurrido con asiduidad a modelos y situaciones simples que lo presentan. En particular, se ha recurrido con frecuencia al flujo no viscoso con giro en un conducto, que viene descrito

por ecuaciones relativamente simples (ver capítulo 2). Este es, por ejemplo, el modelo que usan la mayoría de los trabajos que describen la RV como una transición entre los dos flujos conjugados citados anteriormente. Batchelor (1967) encontró que, bajo ciertas condiciones, las ecuaciones casi cilíndricas que modelan el flujo no viscoso en un conducto dejan de tener solución por encima de un cierto nivel de giro en el flujo de entrada. Antes de que se llegara a este nivel crítico de giro, el flujo presentaba un punto de remanso en el eje, existiendo dos soluciones distintas entre ambas situaciones (Stuart, 1987). Simulaciones numéricas posteriores para este tipo de flujos no viscosos (por ejemplo, Buntine & Saffman, 1995) corroboraron las predicciones de la teoría casi cilíndrica, encontrando una estructura típica de rotura de vórtice por encima del giro crítico. Esta teoría basada en las ecuaciones de Euler para la rotura de vórtices en conductos fue completada por Wang & Russak (1997), que encontraron la existencia de tres soluciones de las ecuaciones dependiendo de los valores del parámetro de giro L (este parámetro se definirá más adelante). La tercera solución es intermedia entre las otras dos y corresponde a la solución de onda estacionaria previamente encontrada por Leibovich & Kribus (1990) para este tipo de flujos no viscosos. Wang & Russak también analizaron la estabilidad de estas soluciones en un conducto de longitud finita para diferentes tipos de flujos con giro a la entrada (Wang & Rusak, 1996*a,b*), describiendo así una serie de transiciones que cualitativamente concuerdan con lo observado para la RV en conductos.

La existencia de multiplicidad de soluciones no sólo se obtuvo para las ecuaciones no viscosas, sino que también se encontraron en las ecuaciones *viscosas* que gobiernan el flujo con giro en un conducto. Esta multiplicidad fue previamente descrita en el importante trabajo de Beran & Culik (1992), que resolvieron numéricamente las ecuaciones de Navier Stokes axilsimétricas en un conducto. Los resultados fueron posteriormente corroborados y ampliados por López (1994) y Darmofal (1996), este último comparando con resultado experimentales, muy abundantes para el flujo con giro en conductos desde los años 60. Beran & Culik encontraron que la solución de las ecuaciones de Navier Stokes correspondiente a un vórtice concentrado en el eje dejaba de existir por encima de un cierto valor crítico del parámetro de giro L_f , que previamente era predicho por la aproximación casi cilíndrica de las ecuaciones de Navier Stokes, la cual también dejaba de tener solución por encima de L_f . Por encima de ese valor del giro, la única solución posible de las ecuaciones de Navier Stokes describe un flujo con una región de recirculación en

las proximidades del eje, estructura típica de la RV que, por supuesto, la aproximación casi cilíndrica no *ve*. Esta solución con recirculación también es válida por debajo de L_f hasta otro valor del parámetro de giro $L_r < L_f$. En el intervalo entre L_r y L_f existe una tercera solución, describiendo así una situación análoga, pero por supuesto, más realista, a la encontrada analíticamente por Wang & Russak (1997) con las ecuaciones no viscosas.

Por último hay que citar los trabajos más recientes que relacionan la aparición del fenómeno de rotura de vórtices con inestabilidades *absolutas* de los flujos con giro. Aunque todavía no existen resultados que relacionen de forma clara estas inestabilidades con las transiciones entre las distintas soluciones de las ecuaciones de Navier Stokes en situaciones realistas (por ejemplo, el flujo con giro en un conducto comentado anteriormente), sí han aparecido algunos trabajos para determinados modelos de chorros con giro que demuestran que los chorros con giro concentrado en el eje, aunque pueden ser convectivamente inestables, son estables desde el punto de vista absoluto y, por el contrario, los chorros con recirculación axial (después de la RV) son absolutamente inestables (ver, por ejemplo, Delbende *et al.*, 1998, Fernández Fera, 1999). De esta manera se *vislumbra* un mecanismo físico para la teoría no viscosa de Benjamin (1962) que describe la RV como una transición entre dos flujos conjugados, uno supercrítico (estable o convectivamente inestable) y otro subcrítico (absolutamente inestable).

1.3. Objetivos del presente trabajo

En esta tesis se va a abordar un problema específico del fenómeno de la rotura de vórtices como es el del papel jugado por la viscosidad. Se va a utilizar como base el flujo con giro en conductos, que ha sido con diferencia el más usado para describir y entender la RV debido a la simplicidad tanto en la formulación del problema como en la implementación experimental.

Se ha comentado anteriormente que las ecuaciones no viscosas describen razonablemente bien la RV en conductos. Las ecuaciones de Euler, con determinadas condiciones de contorno, proporcionan una multiplicidad de soluciones que concuerdan cualitativamente con las soluciones de las ecuaciones de Navier Stokes para este problema. Esto es en cierto modo sorprendente debido a que, por un lado, los trabajos de Hall (1967) y otros posteriores demuestran que la viscosidad tiene relevancia en el fenómeno

de rotura de vórtices y, por otro lado, a que las ecuaciones no viscosas suelen dar soluciones singulares en el eje de giro. Es por ello que en esta tesis se va a abordar el flujo con giro en un conducto desde ambos puntos de vista, el puramente no viscoso y el viscoso, en situaciones en las que se pueda discernir inequívocamente el papel jugado por la viscosidad en la RV (en un conducto). En el capítulo 2 (Fernández Fera & Ortega Casanova, 1999) se estudia de una manera analítica, comparando brevemente con resultados numéricos, la evolución no viscosa a lo largo de un conducto de dos familias distintas de vórtices cilíndricos a la entrada del mismo: una en la que el campo de velocidades es singular en el eje, y la segunda que coincide con la anterior excepto en una pequeña región cerca del eje donde se ha regularizado la familia singular anterior. Del estudio de la evolución de estas dos familias se deduce que no aparece el fenómeno de la RV en este modelo no viscoso a no ser que el núcleo del vórtice sea regularizado por algún mecanismo, como es el proporcionado por la viscosidad, ocurriendo fenómenos totalmente distintos según se fije un perfil regular o singular a la entrada del conducto.

Para ahondar en esta cuestión, se analiza a continuación el flujo en una geometría en la que las condiciones del flujo a la entrada del conducto no son impuestas arbitrariamente, como es habitual en los análisis tanto viscosos como no viscosos previos, sino que están definidas de una forma precisa por el flujo aguas arriba. En el capítulo 3 (Ortega Casanova & Fernández Fera, 1999) se resuelve el problema no viscoso (asintótica y numéricamente) y en los capítulos 4 y 5 (Ortega Casanova & Fernández Fera, 2000) el viscoso (numéricamente) en la geometría comentada. En este último capítulo también se comparan los resultados numéricos no viscosos y viscosos entre sí. Para abordar la resolución numérica de las ecuaciones de Navier Stokes en un conducto, considerando que es conocida su geometría, en el capítulo 4 se desarrolla un código numérico para resolver el flujo en su interior usando la formulación función de corriente–circulación–vorticidad. Dada su complejidad, este código numérico constituye una de las principales contribuciones de esta tesis y se ha validado previamente (capítulo 4) comparando los resultados con otros existentes en geometrías más sencillas que la aquí usada.

Para acabar, en el capítulo 6 se presenta una síntesis de las conclusiones a las que se ha llegado durante el desarrollo de esta tesis, junto con la discusión de algunas nuevas líneas de investigación que abre el trabajo presentado aquí.

Capítulo 2

Análisis preliminar de los modelos no viscosos de flujos con giro en conductos

2.1. Introducción

Como se ha comentado en el capítulo introductorio, el fenómeno de la rotura de vórtices, particularmente en conductos, ha sido usualmente descrito y explicado con ecuaciones y argumentos no viscosos (ver, por ejemplo, Benjamin, 1962, Batchelor, 1967, Keller *et al.*, 1985, Saffman, 1992, Buntine & Saffman, 1995, Wang & Russak, 1997). La mayoría de estos trabajos considera la evolución no viscosa axilsimétrica de un particular flujo con giro a la entrada a lo largo de un conducto con una geometría determinada. Este modo de resolución tiene la ventaja de su simplicidad, debido a que el flujo con giro axilsimétrico está gobernado por una única ecuación en derivadas parciales cuya estructura depende del flujo que se considere a la entrada (ecuación de Bragg–Hawthorne, también llamada de Squire–Long, ver sección siguiente). Los perfiles de velocidad más usados para simular el flujo de entrada han sido una velocidad axial uniforme combinada con una rotación como sólido rígido (velocidad azimutal lineal con la distancia al eje r), o con un vórtice de Rankine, donde la rotación como sólido rígido está confinada en un núcleo delgado rodeado por un vórtice potencial (velocidad azimutal inversamente proporcional a r). Perfiles más realistas para la velocidad a la entrada, perfiles de tipo Gaussiano, por ejemplo, han sido considerados por Buntine & Saffman (1995). Dependiendo de la geometría del conducto y del tipo de flujo considerado a la entrada, los antes citados autores encuentran que, cuando la intensidad relativa del giro está por encima de un

umbral, normalmente expresado en términos de un parámetro de giro o del número de Squire, o de su inverso, el número de Rossby, el flujo no viscoso aguas abajo presenta varias características que se asocian normalmente al fenómeno de la rotura de vórtices, o, simplemente, las ecuaciones no tienen solución para el flujo aguas abajo. Una versión simplificada del problema, primero considerada por Batchelor (1967), y que es la usada en este capítulo, consiste en buscar soluciones *cilíndricas* de las ecuaciones para un radio determinado (conocido) del conducto aguas abajo, cuando se conoce el perfil de velocidad cilíndrico a la entrada. Aunque esta formulación no proporciona el campo de velocidad que conecta los flujos de entrada y de salida, tiene la importante ventaja de su simplicidad, permitiendo en la mayoría de los casos obtener soluciones analíticas. Cuando no se consigue encontrar una solución cilíndrica aguas abajo, es decir, cuando el flujo aguas abajo no puede ser descrito mediante el tipo de perfil de velocidad cilíndrico que se está buscando, se supone que se ha producido la rotura del flujo de entrada. La desventaja de este método es que no se puede saber exactamente lo que le ha sucedido realmente al flujo cuando varía el radio del conducto desde su valor de entrada hasta su valor de salida; pero es suficiente para el propósito principal de este capítulo, que es saber si algunas familias de vórtices colocados a la entrada son, o no son, capaces de romperse aguas abajo. No obstante, a fin de verificar los resultados cilíndricos, y corroborar la presencia de la rotura del vórtice inicialmente colocado a la entrada cuando no existe solución cilíndrica, también se proporcionan algunos resultados numéricos de la ecuación no cilíndrica de Bragg–Hawthorne (B–H) para algunos casos representativos.

Una característica común de todas las simulaciones previas de flujos no viscosos en conductos es que los campos de velocidad considerados a la entrada son regulares en el eje. Sin embargo, las ecuaciones de Euler normalmente proporcionan soluciones singulares en el eje de simetría para flujos giratorios, como puede ser el vórtice potencial, o la clase más general de soluciones con semejanza cónica de las ecuaciones de Euler, proporcionales a una potencia negativa de r cerca del eje (como se detalla en Fernández Feria, Fernández de la Mora & Barrero, 1995, Fernández Feria, Fernández de la Mora, Pérez Saborid & Barrero, 1999). En general, esta situación ocurre cuando una línea de corriente no viscosa sobre la que la circulación no es nula procedente del generador de vórtices (por ejemplo, desde la superficie del generador) alcanza el eje de simetría: la conservación no viscosa de la circulación a lo largo de la línea de corriente proporciona una velocidad azimutal

infinita en el eje. Estos comportamientos singulares son, por supuesto, regularizados por la viscosidad en una región axial delgada, que constituye el a veces llamado núcleo del vórtice (por ejemplo, el vórtice de Long, 1961, regularizando un vórtice potencial, o el que regulariza la clase más general de vórtices no viscosos con semejanza cónica, Fernández Fera, Fernández de la Mora & Barrero, 1995).

En la mayoría de los trabajos sobre el tema, el vórtice usado a la entrada del conducto fue arbitrariamente regularizado en el eje mediante un núcleo donde, como ya se mencionó, el flujo tiene una velocidad axial constante y gira como sólido rígido, que es una aproximación vasta a la conducta real viscosa del flujo en la región próxima al eje. Uno puede preguntarse sobre lo correcto de usar estos perfiles regularizados para la velocidad a la entrada en una formulación puramente no viscosa. Matemáticamente hablando, esto es formalmente correcto, porque cualquier *flujo cilíndrico*, es decir, cualquier flujo en el que la velocidad radial es cero, y las velocidades axial y azimutal dependen sólo de r , es una solución de las ecuaciones de Euler (ver Batchelor, 1967). Así, todos los flujos cilíndricos considerados anteriormente, como el ya mencionado vórtice de Rankine o el perfil de velocidad Gaussiano (que se parece más al perfil de velocidad real viscoso), son compatibles con las ecuaciones no viscosas que gobiernan el flujo dentro del conducto, cuando el radio de entrada es constante durante una cierta longitud. Incluso si uno usa un perfil viscoso de velocidad para el flujo a la entrada, como por ejemplo, aquel dado por un flujo no viscoso singular y regularizado en el eje mediante una región viscosa, éste es compatible con las ecuaciones no viscosas siempre que sea cilíndrico. Determinado esto, la otra pregunta que uno puede hacerse es si el fenómeno de la rotura de vórtices en conductos predicho y descrito con las ecuaciones no viscosas está relacionado con la regularización del perfil de velocidad de entrada, y por lo tanto necesita la acción indirecta de la viscosidad. Contestar a esta pregunta es uno de los objetivos de esta tesis. Simulaciones numéricas viscosas para flujos con giro dentro de un conducto (Beran & Culik, 1992, López, 1994, y Darmofal, 1996) parecen indicar que la viscosidad juega un papel importante. El trabajo presentado en este capítulo propone un ejercicio simple: comparar la evolución no viscosa en un conducto de dos familias cilíndricas para los perfiles de velocidad a la entrada, una singular en el eje, y la otra regularizada de la manera usual de suponer una velocidad axial constante y una rotación como sólido rígido dentro de un núcleo delgado próximo al eje. Como se mencionó anteriormente se usará la aproximación cilíndrica y se mostrará que,

para la familia singular, siempre se encuentra una solución cilíndrica aguas abajo para los casos más interesantes, con lo que no se observa la rotura de vórtices. Por otra parte, para los perfiles de velocidad regularizados, se reproducen resultados previos: la rotura ocurre para conductos divergentes por encima de un valor crítico del parámetro de giro característico del flujo a la entrada.

2.2. El problema casi cilíndrico

Sea el flujo axilsimétrico y estacionario de un fluido no viscoso con campo de velocidad (u, v, w) en las coordenadas cilíndricas polares (r, θ, z) . La función de corriente para el movimiento meridional ψ ,

$$u = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad (2.1)$$

satisface la ecuación de Bragg–Hawthorne (Bragg & Hawthorne, 1950) (también llamada ecuación de Squire–Long):

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = r^2 \frac{dH}{d\psi} - \Gamma \frac{d\Gamma}{d\psi}, \quad (2.2)$$

donde $H(\psi)$ y $\Gamma(\psi)$ son la función de Bernoulli y la circulación, respectivamente:

$$H = \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2), \quad \Gamma = rv. \quad (2.3)$$

Se considerará el flujo no viscoso en un conducto convergente o divergente, suponiendo que aguas arriba y aguas abajo el flujo es *cilíndrico*; es decir, $u = u_z = \psi_{zz} = 0$, con el subíndice indicando diferenciación respecto a la variable correspondiente. En estas regiones cilíndricas, la ecuación (2.2) se escribe

$$\psi_{rr} - \frac{1}{r} \psi_r = r^2 H_\psi - \Gamma \Gamma_\psi, \quad (2.4)$$

donde $0 \leq r \leq r_1$ a la entrada y $0 \leq r \leq r_2$ a la salida. Dado un flujo cilíndrico a la entrada, que define las funciones $H(\psi)$ y $\Gamma(\psi)$, se seguirá a Batchelor (1967) para resolver la ecuación (2.4) y obtener el flujo cilíndrico aguas abajo, siempre que exista. Batchelor resolvió esto para los siguiente dos casos: un flujo que aguas arriba posee una velocidad axial uniforme y gira como sólido rígido, y el mismo flujo pero considerado como un vórtice aislado inmerso dentro de un vórtice potencial. La variedad de flujos usados a la entrada fue extendida por Buntine & Saffman (1995), quienes también

consideraron los perfiles de velocidad a la entrada de tipo Gaussiano (a veces llamados q-vórtices). En la próxima sección se considerará una familia de flujos a la entrada con campos de velocidad proporcionales a una potencia negativa de la distancia al eje, $(v, w) \sim r^{m-2}$, $1 \leq m < 2$, que corresponde a las soluciones exactas cerca del eje de las ecuaciones de Euler (Fernández Fera, Fernández de la Mora, Pérez Saborid & Barrero, 1999). Estos flujos no viscosos son singulares en el eje, y se mostrará en §2.3 que no dan lugar a una rotura del vórtice para ningún valor del parámetro de giro (para el caso $m = 1$). Una segunda familia de flujos a la entrada, ahora regular en el eje, se considerará en §2.4. Ésta coincide con la primera excepto en un núcleo de radio r_c , donde el flujo tiene velocidad axial constante y gira como sólido rígido. Así, el flujo a la entrada es similar al segundo tipo considerado por Batchelor, pero con una velocidad axial externa más parecida a un chorro, con un perfil de velocidad axial proporcional a una potencia negativa de r en vez de ser un perfil uniforme en todos lados. Se mostrará que la rotura de vórtices ocurre en el caso del perfil regularizado por encima de un valor máximo del parámetro de giro, también observado por Batchelor (1967). Sin embargo, el considerar el decaimiento radial de la velocidad axial fuera del núcleo del vórtice proporciona valores del parámetro de giro máximo más en consonancia con los valores de giro críticos observados experimentalmente en la rotura de vórtices en conductos.

2.3. Flujo no viscoso singular en el eje.

Sea el siguiente flujo no viscoso aguas arriba ($0 \leq r \leq r_1$, donde r_1 es el radio de entrada del conducto):

$$\psi = \frac{W_o}{m} r^m, \quad w = W_o r^{m-2}, \quad u = 0, \quad (2.5)$$

$$v = L W_o r^{m-2}, \quad \frac{p}{\rho} = \frac{(L W_o)^2}{2(m-2)} r^{2(m-2)} + \frac{p_o}{\rho}; \quad (1 \leq m \leq 2), \quad (2.6)$$

donde L es el mencionado parámetro de giro y está definido como la relación entre la velocidad azimutal y la axial características a la entrada del conducto,

$$L = \frac{v}{w}.$$

Las funciones Γ y H vienen dadas por:

$$\Gamma = K \psi^{(m-1)/m}, \quad K \equiv L(m^{m-1} W_o)^{1/m}, \quad (2.7)$$

$$H = K_1 \psi^{2(m-2)/m}, \quad K_1 \equiv \frac{1}{2} \left(1 - \frac{m-1}{2-m} L^2 \right) W_o^{4/m} m^{2(m-2)/m}. \quad (2.8)$$

Sustituyendo en (2.4), se obtiene

$$\psi_{\eta\eta} = \frac{2(m-2)}{m} K_1 \psi^{1-4/m} - \frac{m-1}{2m} \frac{K^2}{\eta} \psi^{1-2/m}, \quad (2.9)$$

donde

$$\eta = \frac{r^2}{2}, \quad (2.10)$$

y $\psi_{\eta\eta} = \partial^2 \psi / \partial \eta^2$. Esta ecuación debe resolverse con las condiciones de contorno que consideran al eje y la pared del conducto como líneas de corriente:

$$\psi(\eta = 0) = 0, \quad \psi(\eta = r_2^2/2) = (W_o/m)r_1^m, \quad (2.11)$$

donde r_2 es el radio del conducto a la salida. En términos de una función de corriente adimensional $g(\eta)$, la función de corriente ψ se escribe

$$\psi \equiv \frac{W_o L^m}{m} (\eta g)^{m/2}, \quad (2.12)$$

y definiendo

$$G \equiv \eta \frac{dg}{d\eta}, \quad (2.13)$$

la ecuación (2.9) se convierte en la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dG}{dg} = \frac{D - (m-1)g + \frac{2-m}{2}(g^2 + G^2) + (1-m)gG}{gG}, \quad (2.14)$$

donde el parámetro adimensional D viene dado por

$$D = -\frac{4m^2(2-m)K_1}{K^4} = \frac{2}{L^2} \left(m-1 - \frac{2-m}{L^2} \right). \quad (2.15)$$

Con estas nuevas variables, las velocidades axial y azimutal se escriben

$$w = \frac{W_o L^m}{2} (\eta g)^{(m-2)/2} (G + g), \quad (2.16)$$

$$v = \frac{W_o L^m}{\sqrt{2}} \eta^{(m-2)/2} g^{(m-1)/2}. \quad (2.17)$$

Un análisis completo del plano de fase de (2.14) se puede encontrar en Fernández Feria & Ortega Casanova (1999) y se remite allí al lector para más detalles. El eje corresponde al

punto singular ($G = 0, g = 2/L^2$), mientras que la pared del conducto, según (2.11)–(2.12), corresponde a $g = 2/(LR)^2$, donde

$$R = \frac{r_2}{r_1}. \quad (2.18)$$

Por lo tanto, hay tres parámetros adimensionales que gobiernan el presente problema: m y L que definen el flujo a la entrada, y la relación de expansión R . Consideraremos separadamente primero el caso $m = 1$ porque existe una solución analítica simple.

2.3.1. Caso $m = 1$.

Para $m = 1$, las ecuaciones (2.14)–(2.15) son lineales en G^2 :

$$\frac{dG}{dg} = \frac{D + \frac{g^2}{2} + \frac{G^2}{2}}{gG}, \quad D = -\frac{2}{L^4} \quad (m = 1). \quad (2.19)$$

La solución que satisface la primera condición de contorno de (2.11) para el eje parte del punto singular ($G = 0, g = 2/L^2$), que es un punto de silla, con una pendiente positiva (ver Fernández Fera & Ortega Casanova, 1999):

$$G = g - \frac{2}{L^2}. \quad (2.20)$$

Sustituyendo en (2.13) y usando la segunda condición de contorno de (2.11), uno obtiene

$$g = \frac{2}{L^2} \left[1 + \frac{1 - R^2}{R^2} \frac{2\eta}{r_2^2} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.21)$$

Haciendo uso de las variables originales, la solución aguas abajo es (para $0 \leq r \leq r_2$):

$$\psi = W_o r \left[1 + \frac{1 - R^2}{R^2} \left(\frac{r}{r_2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (m = 1), \quad (2.22)$$

que proporciona, de acuerdo con (2.1) y (2.7),

$$w = \frac{W_o}{r} \frac{1 + 2 \frac{1 - R^2}{R^2} \left(\frac{r}{r_2} \right)^2}{\left[1 + \frac{1 - R^2}{R^2} \left(\frac{r}{r_2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}, \quad v = \frac{LW_o}{r}. \quad (2.23)$$

El perfil de velocidad azimutal que se obtiene permanece invariable a lo largo del conducto, pero esto es únicamente cierto para este caso particular de $m = 1$, para el que la circulación Γ es constante en todos lados.

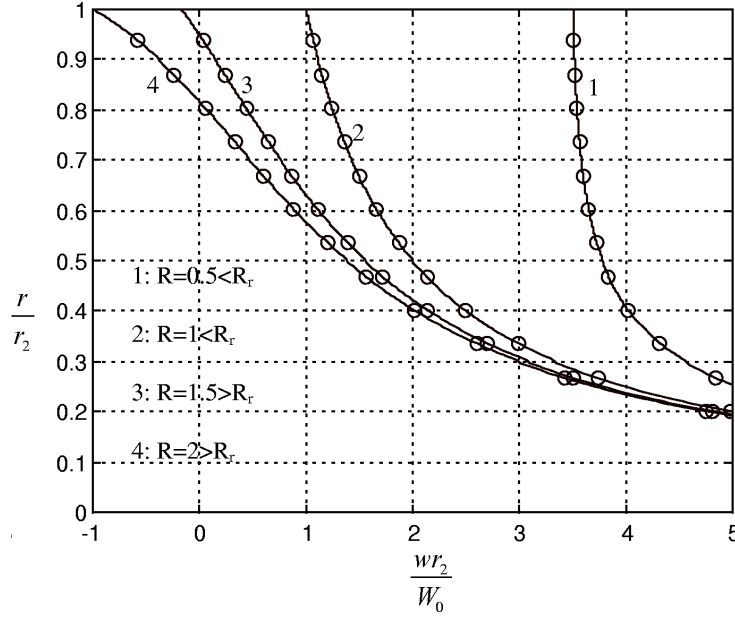


Figura 2.1: Perfiles de velocidad axial aguas abajo para flujos singulares a la entrada con $m = 1$, para varios valores de $R = r_2/r_1$. Cuando $R > \sqrt{2} = R_r$ la velocidad axial en la pared llega a ser negativa. Los círculos corresponden a resultados numéricos de la ecuación de B-H (2.2) no cilíndrica con (2.7)–(2.8), para $m = 1$, en $x = 10r_2$.

La característica más importante, desde un punto de vista físico, de la solución anterior es que el flujo cercano al eje aguas abajo conserva su singularidad de la forma $(w, v) \sim 1/r$, independientemente del valor del parámetro de giro L , con lo que la rotura no viscosa del vórtice no ocurre para ningún valor de L . En la pared ($r = r_2$), la velocidad axial aumenta para un conducto convergente, $R < 1$, y disminuye para uno divergente, $R > 1$. En este último caso, la velocidad axial llega a ser cero en la pared cuando $R = \sqrt{2}$, y negativa cuando $R > \sqrt{2}$ (ver figura 2.1), es decir, aparece una zona de flujo inverso cerca de la pared del conducto cuando su radio r_2 es más grande que $\sqrt{2}r_1$. Obviamente, cuando esto ocurre la solución anteriormente obtenida (2.22)–(2.23) no es la única posible, porque diferentes funciones $H(\psi)$ y $\Gamma(\psi)$ podrían especificarse en la ecuación B-H para el flujo inverso que viene desde la salida del conducto. En otras palabras, para $R > \sqrt{2}$, existe una región $r^* < r < r_2$ donde la función de corriente aguas abajo toma valores más grandes que W_o y, por lo tanto, fuera del intervalo $[0, W_o]$ en el que las funciones $H(\psi)$ y $\Gamma(\psi)$ han sido definidas aguas arriba. La solución no es, por tanto, única y depende de la forma de estas funciones para que el flujo inverso quede determinado. La solución particular dada para $R > \sqrt{2}$ corresponde a una extensión de las mismas funciones $H(\psi)$ y $\Gamma(\psi)$ del flujo

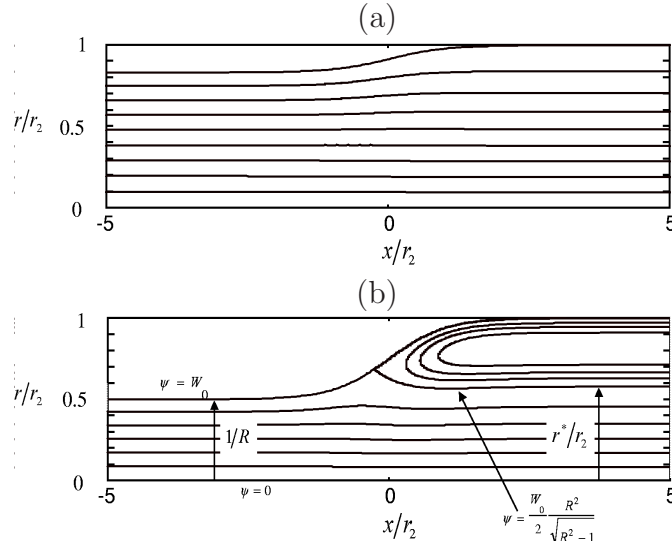


Figura 2.2: Líneas de corriente obtenidas numéricamente resolviendo (2.2) con (2.7)–(2.8) para $m = 1$ cuando $R = 1,2$ (a), y $R = 2$ (b).

entrante, ecuaciones (2.7)–(2.8), para $\psi > W_o$.

Para verificar las diferentes soluciones cilíndricas de la ecuación B–H dadas en ésta y en las secciones siguientes, se ha resuelto también la ecuación no cilíndrica de B–H (2.2) numéricamente. La variación del radio del conducto usado en la resolución numérica es:

$$\frac{r_e(x)}{r_2} = \frac{1}{2} \left[1 + \tanh \frac{x}{r_2} + \frac{1}{R} \left(1 - \tanh \frac{x}{r_2} \right) \right], \quad (2.24)$$

donde R es la relación de expansión del conducto dada en (2.18). A la entrada del conducto (que se toma en $x/r_2 = -10$), la función de la corriente viene dada por (2.5) para este caso de un flujo singular en el eje. A la salida del conducto ($x/r_2 = 10$), se impone $\partial^2 \psi / \partial x^2 = 0$. La condición de contorno en el eje es $\psi = 0$, mientras que en la pared del conducto $r = r_e(x)$, ψ viene dada por su valor aguas arriba en $r = r_1$. Para llevar a cabo la integración numérica de (2.2), el dominio de integración es primero transformado en un rectángulo mediante un cambio de coordenadas, y se usan diferencias finitas en una malla de 200 puntos equidistantes a lo largo de la dirección axial y 300 puntos en la radial para discretizar la ecuación (2.2) en el ahora dominio rectangular. La ecuación no lineal resultante se resuelve iterativamente, usando el flujo de entrada como solución inicial del proceso iterativo. Las figuras 2.1 y 2.2 muestran los resultados. En ellas se observa que los perfiles de velocidad axial a la salida en $x = 10r_2$ (los círculos en la figura 2.1) son indistinguibles de los perfiles de velocidad axial cilíndricos dados por (2.23). La figura 2.2

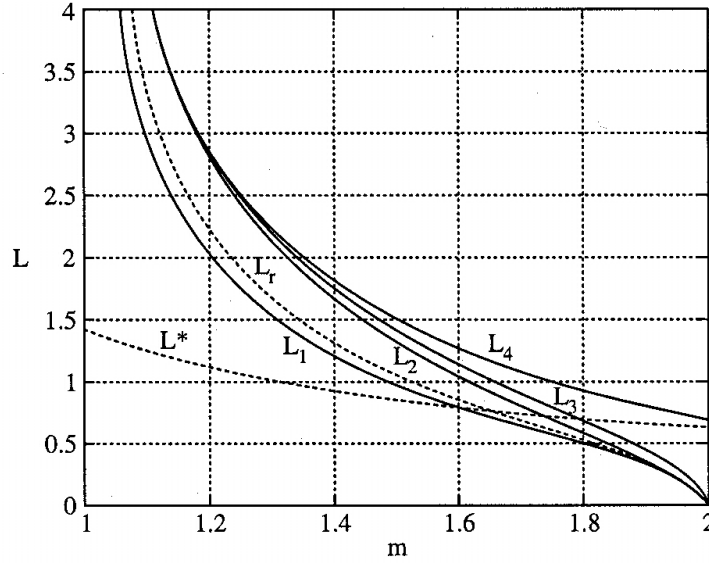


Figura 2.3: Diferentes valores distinguidos del parámetro de giro en función de m . L^* es el parámetro crítico de giro encontrado en Fernández Feria *et al.* (1995), por encima del cual no existen soluciones de las ecuaciones viscosas cerca del eje.

muestra las líneas de corriente obtenidas numéricamente para dos conductos divergentes, uno con una relación de expansión menor que $\sqrt{2}$, figura 2.2(a), y otro con $R > \sqrt{2}$, figura 2.2(b). En este último caso, una región de flujo inverso aparece cerca de la pared, donde el radio r^* aguas abajo que separa esta región de flujo inverso de la de flujo axial saliente del conducto viene dado con gran exactitud por el valor de r que maximiza w en (2.23).

2.3.2. Caso $1 < m < 2$

Para $m \neq 1$ se encuentra que el problema es más rico en resultados que el del caso de $m = 1$, existiendo diferentes tipos de soluciones en diferentes regiones del espacio paramétrico (m, L, R) . Se va a seguir el detallado análisis del plano de fase dado en Fernández Feria & Ortega Casanova (1999) para describir los aspectos principales de estas soluciones.

Siguiendo este análisis se encuentra que, para cada m , existe un valor límite del parámetro de giro $L_3(m)$,

$$L_3(m) = \sqrt{\frac{2(2-m)}{m-1}}, \quad (2.25)$$

por encima del cual el problema en un conducto divergente no tiene solución. Para el modelo actual de flujo no viscoso, este valor límite se parece a un parámetro crítico de

giro para la rotura del vórtice de entrada, pero con la particularidad de que para un conducto convergente o recto existe siempre una solución (se debe notar también que L_3 tiende a infinito para $m = 1$, por lo que, como se ha visto en §2.3.1, no hay parámetro de giro límite en el caso $m = 1$). Este valor máximo para la existencia de soluciones casi cilíndricas está dibujado en la figura 2.3 conjuntamente con otros valores distinguidos del parámetro de giro, $L_i(m)$, $i = 1, 2, r, 4$, cuyos significados matemáticos precisos se dan en Fernández Feria & Ortega Casanova (1999), y que serán descritos físicamente a continuación.

Cuando $L \leq L_1(m)$,

$$L_1(m) = \sqrt{\frac{2-m}{m-1}}, \quad (2.26)$$

la situación es muy parecida a la de $m = 1$. Existe un valor de $R = R_r(L, m)$ (ver las figuras 2.4 y 2.5) para el que la velocidad axial se hace nula en la pared del conducto y por encima del cual se forma cerca de ésta una región de flujo inverso (ver la figura 2.6 para varios perfiles de velocidad con $m = 1, 2$ y diferentes valores de R). Según (2.16), R_r corresponde a $G(g) = -g$, que para $L \leq L_1$ tiene una única raíz $g = g_r = 2/(LR_r)^2$. Se puede ver en las figuras 2.4 y 2.5 que R_r aumenta con m y L (recordar que para $m = 1$, $R_r = \sqrt{2}$, independientemente de L). Así, la introducción de giro a la entrada retrasa el comienzo de la zona de flujo inverso cerca de la pared: $R_r(L, m) \geq R_r(0, m)$ (R_r para $L = 0$ se describe como una función de m en la figura 2.7). Para $L_1(m) < L < L_r(m)$, donde $L_r(m)$ es el valor máximo de $R_r(L)$ para cada m (ver figura 2.4), obtenido numéricamente y dibujado en la figura 2.3, existen varios valores distintos de R separando diferentes regímenes de flujo (ver figuras 2.4–2.5). Primero, además de $R_r(m, L)$, existe un valor $R'_r(m, L) > R_r$, por encima del cual la velocidad axial en la pared llega a ser nuevamente positiva, y la corriente aguas abajo presenta tres celdas (R'_r es otra raíz de $G(g) = -g$, ver figura A2c en Fernández Feria & Ortega Casanova, 1999). Es decir, para un valor determinado de L en el intervalo actual $L_1 < L < L_r$, cuando R aumenta por encima de R_r , el flujo aguas abajo pasa de una velocidad axial positiva en todos lados, a un flujo de dos celdas con una velocidad negativa cerca de la pared y, cuando $R > R'_r$, se forma una tercera celda cerca de la pared con velocidad axial positiva (ver la figura 2.6). Sin embargo, R no puede aumentar mucho más porque, como vemos en las figuras 2.4 y 2.5, existe un valor máximo $R_m(m, L)$, ligeramente más grande que R'_r , más allá del cual no se encuentra ninguna solución al presente problema. Debe notarse que también existe un valor $R'_m(m, L) < R_m$

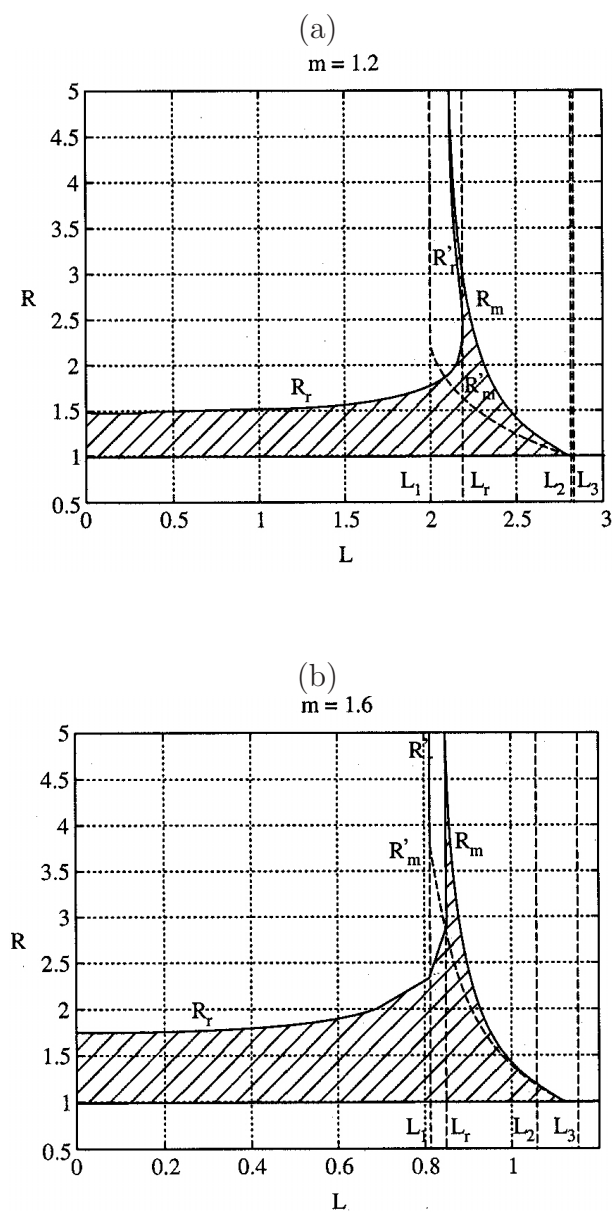


Figura 2.4: R_r , R'_r , R_m y R'_m como funciones de L para $m = 1,2$ (a), y $m = 1,6$ (b). Las regiones rayadas corresponden a soluciones sin celda de flujo inverso cerca de la pared.

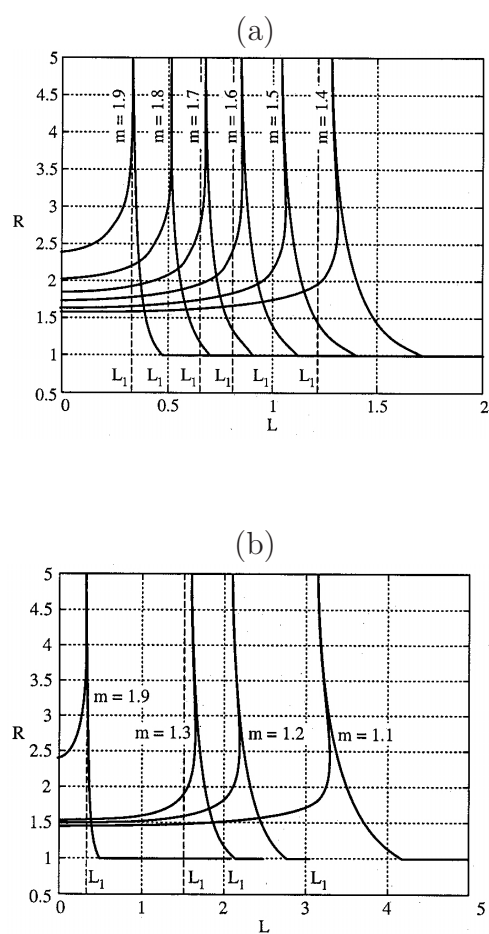


Figura 2.5: R_r , R'_r , y R_m como funciones de L para varios valores de m en el intervalo $1 \leq m < 2$.

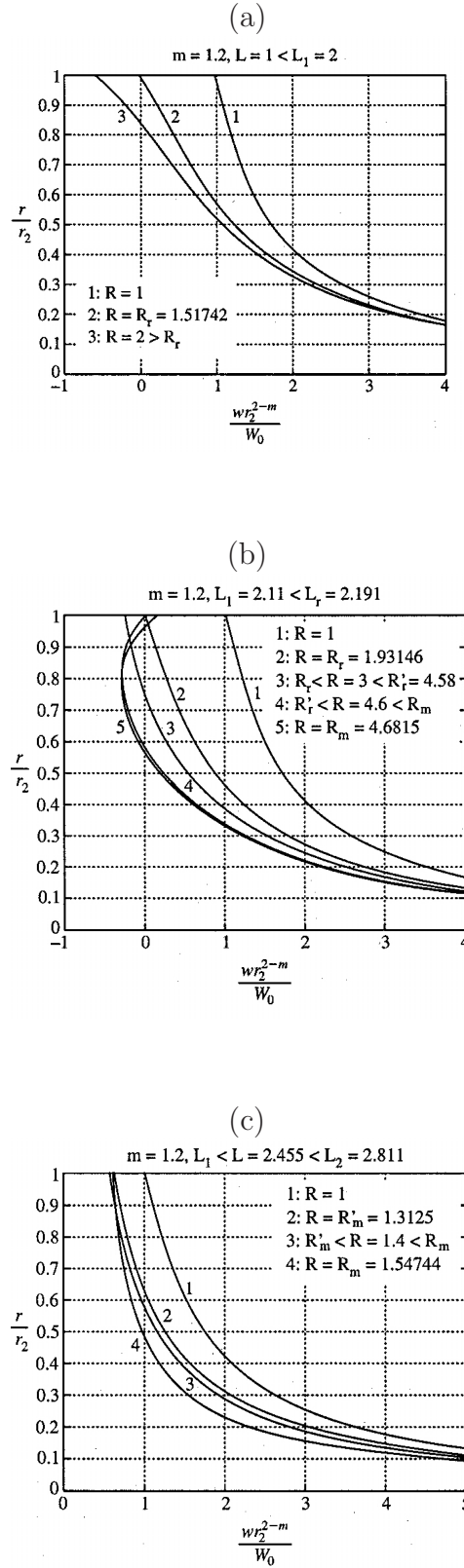


Figura 2.6: Perfiles adimensionales de velocidad axial aguas abajo para $m = 1,2$ y los valores de R y L indicamos.

(marcado con una línea a trazos en la figura 2.4) por encima del cual (es decir, para $R'_m < R < R_m$) pueden existir varias soluciones que satisfagan las mismas condiciones de contorno. Sin embargo, como se discutió anteriormente, sólo una de ellas, con o sin la zona de flujo inverso, dependiendo de si R es más pequeño o más grande que R_r , es físicamente admisible.

Finalmente, en el intervalo $L_r(m) \leq L \leq L_3(m)$, no existe ninguna región de flujo inverso para ningún valor de R . El valor límite de R , R_m , está todavía presente. El radio R'_m , por encima del cual existe una multiplicidad de soluciones para un R dado, llega a ser igual a R_m para $L = L_2(m)$. Así, para $L_2(m) \leq L < L_3(m)$, la región con multiplicidad de soluciones no aparece. Cuando $L = L_3(m)$, $R_m = 1$, por lo que, como se indicó arriba, no existen soluciones al problema actual para un conducto divergente cuando $L > L_3(m)$. Como se discutió para el caso $m = 1$, las soluciones con flujo inverso para $R > R_r$ (con $L < L_r$) no son únicas porque otras condiciones de contorno puede ser especificadas para el flujo inverso de la zona cerca de la pared, las cuales no son consideradas aquí. Las soluciones particulares dadas aquí son aquellas correspondientes a las mismas funciones $H(\psi)$ y $\Gamma(\psi)$ del flujo de entrada extendidas al dominio del flujo inverso desde la salida. Consiguientemente, para conductos divergentes ($R > 1$), y para cada valor de m , la región sobre el plano (R, L) donde existe una única solución al problema actual es la región bajo la curva $R_r(m)$ para $L < L_r(m)$, y bajo $R_m(m)$ para $L \geq L_r(m)$ (áreas sombreadas en la figura 2.4). Para conductos convergentes o rectos ($R \leq 1$), existe una única solución para todos los valores de R y L .

Así, concluimos que, para el presente modelo de flujo no viscoso singular en el eje, roturas de vórtices no viscosas, o no ocurren ($m = 1$), o los valores predichos del parámetro de giro para la rotura están, para los casos más interesantes con m ligeramente mayor que la unidad (véase Fernández Feria, Fernández de la Mora & Barrero, 1995 y Fernández Feria, Fernández de la Mora, Pérez Saborid & Barrero, 1999), bastante lejos de los observados experimentalmente (y predichos también a partir de la región axial viscosa, es decir, $L^*(m)$ en la figura 2.3).

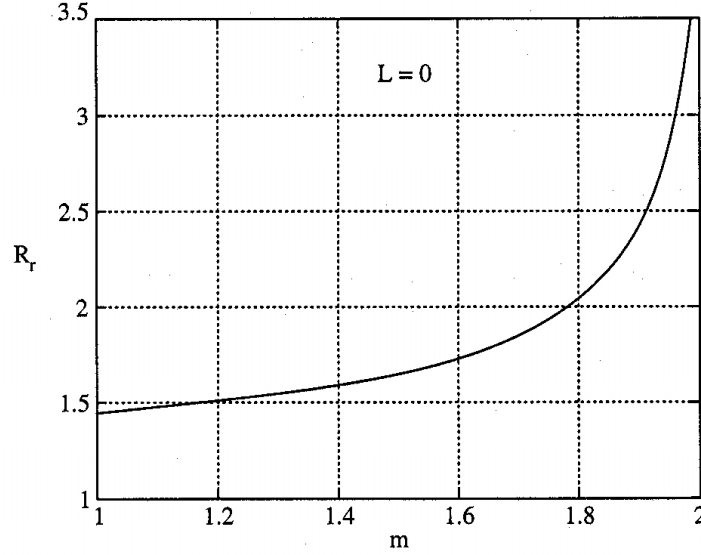


Figura 2.7: $R_r(m)$ para flujos sin giro ($L = 0$).

2.4. Regularización del flujo a la entrada

Se va a considerar en esta sección el flujo a la entrada de un conducto dado por (2.5)–(2.6) para $r_c \leq r \leq r_1$, mientras que para $0 \leq r \leq r_c$ la velocidad axial es constante y la velocidad azimutal es lineal con r (rotación como sólido rígido):

$$w = W_0 r_c^{m-2} \equiv W_1, \quad v = LW_1 \frac{r}{r_c}, \quad 0 \leq r \leq r_c; \quad (2.27)$$

$$w = W_1 \left(\frac{r}{r_c} \right)^{m-2}, \quad v = LW_1 \left(\frac{r}{r_c} \right)^{m-2}, \quad r_c \leq r \leq r_1. \quad (2.28)$$

Para $m = 1$, la velocidad azimutal anterior corresponde a un vórtice de Rankine. Este flujo de entrada para $m = 1$ es parecido al considerado por Batchelor (1967) que modela un vórtice aislado (ver también Stuart, 1987), excepto en que se permite una velocidad axial de tipo chorro con un decaimiento radial potencial, en vez de suponerla uniforme a la entrada. Debe notarse que esta regularización *ad hoc* en el eje del flujo no viscoso de entrada proporciona, por supuesto, perfiles de w y v diferentes a los obtenidos por efecto de la viscosidad cerca del eje (ver Fernández Feria, Fernández de la Mora & Barrero, 1995, Fernández Feria, Fernández de la Mora, Pérez Saborid & Barrero, 1999). Sin embargo, (2.27)–(2.28) presenta de forma simplificada algunos de los aspectos principales de un chorro con giro real y es una solución válida de las ecuaciones de Euler cilíndricas, como cualquier perfil de velocidad de la forma $(0, w(r), v(r))$. Por tanto, tiene interés seguir su

evolución mediante la ecuación de B-H.

En el intervalo $0 \leq r \leq r_c$,

$$\psi = W_1 \frac{r^2}{2}, \quad (2.29)$$

de donde las funciones $C(\psi)$ y $H(\psi)$ vienen dadas por

$$\Gamma = v r = \frac{2L}{r_c} \psi, \quad H = \frac{1}{2} w^2 + \int_0^r \frac{\Gamma}{r^2} \frac{d\Gamma}{dr} dr = \frac{1}{2} w^2 + \frac{2L^2 W_1}{r_c^2} \psi, \quad (2.30)$$

para $0 \leq \psi \leq W_1 r_c^2 / 2$. La ecuación (2.4) se convierte en

$$\psi_{rr}^{(i)} - \frac{1}{r} \psi_r^{(i)} = \frac{2L^2}{r_c^2} (W_1 r^2 - 2\psi^{(i)}) \quad (0 \leq \psi^{(i)} \leq W_1 R_c^2 / 2), \quad (2.31)$$

donde el superíndice (i) designa a la corriente *interior* dentro del núcleo. La solución general de esta ecuación es de la forma (Batchelor, 1967)

$$\psi^{(i)} = \frac{1}{2} W_1 r^2 + A r J_1(k r) + B r Y_1(k r), \quad (2.32)$$

donde A y B son constantes arbitrarias, J_1 e Y_1 son las funciones de primer orden de Bessel de primera y segunda clase, y

$$k = \frac{2L}{r_c}. \quad (2.33)$$

La condición de contorno en el eje requiere $B = 0$. La constante A será determinada al igualar esta solución con la solución externa en el radio r_b del vórtice aguas abajo, que es también desconocido (ver más abajo).

Para $r_c < r < r_1$, de acuerdo con (2.27)–(2.28),

$$\psi = \frac{W_1 r_c^2}{m} \left[\left(\frac{r}{r_c} \right)^m + \frac{m-2}{2} \right], \quad (2.34)$$

por lo que

$$\Gamma(\psi) = L W_1 r_c \left(\frac{m \psi}{W_1 r_c^2} + \frac{2-m}{2} \right)^{(m-1)/m}, \quad (2.35)$$

y

$$H(\psi) = \frac{m-3}{2(m-2)} (L W_1)^2 + \frac{W_1^2}{2} \left(1 - \frac{m-1}{2-m} L^2 \right) \left(\frac{m \psi}{W_1 r_c^2} + \frac{2-m}{2} \right)^{2(m-2)/m}, \quad (2.36)$$

siendo válidas estas funciones para

$$\frac{1}{2} W_1 r_c^2 \leq \psi \leq \frac{W_1 R_c^2}{m} \left[\left(\frac{r_1}{r_c} \right)^m - \frac{2-m}{m} \right]. \quad (2.37)$$

Utilizando las variables adimensionales

$$y = \frac{1}{2} \left(\frac{r}{r_c} \right)^2, \quad \tilde{\psi}^{(o)} = \frac{m}{W_1 r_c^2} \psi^{(o)} + \frac{2-m}{m}, \quad (2.38)$$

donde el superíndice (o) designa al flujo exterior, la ecuación B-H en esta región se escribe

$$\tilde{\psi}_{yy}^{(o)} = m(2-m) \left(\frac{m-1}{2-m} L^2 - 1 \right) \tilde{\psi}^{(o)1-4/m} - \frac{L^2 m(m-1)}{2y} \tilde{\psi}^{(o)1-2/m}. \quad (2.39)$$

Obviamente, esta ecuación tiene la misma forma que (2.9). Las condiciones de contorno son, sin embargo, bastantes diferentes:

$$\psi^{(o)}(r_b) = \psi^{(i)}(r_b) = \frac{1}{2} W_1 r_c^2, \quad (2.40)$$

$$\frac{d}{dr} \psi^{(o)}(r_b) = \frac{d}{dr} \psi^{(i)}(r_b), \quad (2.41)$$

$$\psi^{(o)}(r_2) = \frac{W_1 r_c^2}{m} \left[\left(\frac{r_1}{r_c} \right)^m + \frac{m-2}{2} \right]. \quad (2.42)$$

Las dos primeras condiciones establecen que, en el radio r_b del núcleo del vórtice a la salida, las funciones de corriente interior y exterior y sus derivadas (velocidades axial) son continuas, y que la función de corriente toma el valor que tiene a la entrada para $r = r_c$. La condición (2.42) asegura que la pared del conducto es una línea de corriente. Las ecuaciones (2.40)–(2.42) constituyen, por tanto, un conjunto de cuatro condiciones para fijar r_b , la constante de integración A en (2.32) y dos constantes de integración resultantes de (2.39). Los casos $m = 1$ y $m \neq 1$ se consideran separadamente a continuación. Para verificar estas soluciones cilíndricas, serán comparadas con resultados numéricos de la ecuación no cilíndrica de B-H para $m = 1$ y para la forma particular del conducto dada por (2.24).

2.4.1. Caso $m = 1$

La ecuación (2.39) tiene una solución general analítica para este caso de $m = 1$, y las cuatro condiciones (2.40)–(2.42) se convierten en un conjunto relativamente simple de ecuaciones algebraicas. Poniendo $m = 1$ en (2.39), se obtiene

$$\tilde{\psi}_{yy}^{(o)} = -\tilde{\psi}^{(o)-3}, \quad (2.43)$$

que tiene como solución general

$$\tilde{\psi}^{(o)} = \sqrt{(y+E)^2/D-D}, \quad (2.44)$$

con D y E constantes arbitrarias. Las ecuaciones (2.40)–(2.42) proporcionan las cuatro relaciones siguientes:

$$1 = b^2 + a b J_1(2L b), \quad (2.45)$$

$$b^2/2 + E = \sqrt{D(D+1)}, \quad (2.46)$$

$$1 + a L J_0(2L b) = \sqrt{1 + \frac{1}{D}} \quad (2.47)$$

$$R_2^2/2 + E = \sqrt{D(D + R_1^2)}, \quad (2.48)$$

donde

$$R_1 = \frac{r_1}{r_c}, \quad R_2 = \frac{r_2}{r_c}, \quad a = \frac{2A}{W_1 r_c} \quad \text{y} \quad b = \frac{r_b}{r_c}, \quad (2.49)$$

son, al igual que D y E , parámetros adimensionales. Eliminando a y E , uno tiene el siguiente conjunto de dos ecuaciones algebraicas no lineales para obtener el radio adimensional del núcleo a la salida b (y el parámetro adimensional D) como una función de los radios adimensionales del conducto a la entrada y salida, R_1 y R_2 , y del parámetro de giro L :

$$\frac{R_2^4 - b^4}{4} + D \left[1 + R_2^2 \sqrt{1 + \frac{1}{D}} - R_1^2 - b^2 \sqrt{1 + \frac{R_1^2}{D}} \right] = 0, \quad (2.50)$$

$$b^2 - 1 + \left(\sqrt{1 + \frac{1}{D}} - 1 \right) \frac{b J_1(2L b)}{L J_0(2L b)}. \quad (2.51)$$

Las figuras 2.8 y 2.9 muestran el radio b del núcleo a la salida como una función del parámetro de giro L para varios valores de R_1 y R_2 . También se muestra en estas figuras la velocidad axial adimensional a la salida en el eje ($r = 0$),

$$\xi \equiv \frac{w(r=0)}{W_1} = 1 + a L = 1 + \left(\sqrt{1 + \frac{1}{D}} - 1 \right) \frac{1}{J_0(2L b)}. \quad (2.52)$$

Para la comparación, se ha incluido en la figura 2.9 los valores correspondientes de b y ξ dados por la solución de Batchelor (1967) para un vórtice “aislado” (líneas punteadas), que corresponde al problema actual con $m = 1$ cuando no hay decaimiento radial de la velocidad axial fuera del núcleo de vórtice. Esto es, a la entrada del conducto $w = W_1$ en todos lados, y a la salida $w = W_2 = \text{constante}$ para $r > r_b$, donde, por continuidad,

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{R_1^2 - 1}{R_2^2 - b^2}. \quad (2.53)$$

Sustituyendo esta expresión en la solución de Batchelor en términos de W_2/W_1 , uno obtiene las relaciones siguientes para b y ξ :

$$b^2 - 1 + \left(\frac{R_1^2 - 1}{R_2^2 - b^2} - 1 \right) \frac{b J_1(2Lb)}{L J_0(2Lb)} = 0, \quad (2.54)$$

$$\xi = 1 + \left(\frac{R_1^2 - 1}{R_2^2 - b^2} - 1 \right) \frac{1}{J_0(2Lb)}. \quad (2.55)$$

La característica principal de las funciones $b(L)$ y $\xi(L)$ dada en las figuras 2.8 y 2.9 es que, para conductos divergentes ($R_1 < R_2$), existe un valor máximo del parámetro de giro, L_f , que depende de R_1 y R_2 , por encima del cual no existe solución, mientras que siempre existe una solución para cualquier valor de L en un conducto convergente ($R_1 > R_2$). Por lo tanto, la aproximación casi cilíndrica falla por encima de un valor crítico de L para un conducto divergente. Cuando esto ocurre, la solución numérica de la ecuación B–H no cilíndrica presenta una rotura del vórtice aguas abajo en forma de “burbuja” (ver figura 2.10). Otra característica importante observada en las figuras 2.8 y 2.9 es que, también para $R_1 < R_2$, se alcanzado un punto de remanso ($\xi = 0$) en el eje para un valor $L_o < L_f$. Así, para $L_o < L < L_f$, existen dos soluciones cilíndricas diferentes para el mismo valor del parámetro de giro en un conducto divergente. Corresponden a dos de las tres soluciones encontradas por Wang & Russak (1997) para $L_o < L < L_f$ en el caso de un conducto recto. (La tercera solución con una región de flujo inverso cercana al eje, válida para $L > L_o$, no se busca en la formulación actual. Keller, Egli & Exley (1985) demostraron que, para obtener este tipo de solución cilíndrica con una zona de flujo inverso en el eje, tenía que ser impuesta a la solución la condición adicional de conservación de la cantidad de movimiento axial total.) En realidad, para conductos rectos ($R_1 = R_2$ o $R = 1$), aunque no se encuentra un valor máximo de L (la solución de entrada, $b = \xi = 1$, es válida para cualquier valor del parámetro de giro), la segunda solución dada por Wang & Russak también se encuentra en la presente formulación casi cilíndrica para $L > L_o$, cruzando la primera solución (el flujo de entrada) para un valor L_{fm} dado por $J_0(2L_{fm}) = 0$ ($L_{fm} \simeq 1,2$). L_{fm} así constituye el valor máximo que puede alcanzar el parámetro de giro crítico L_f cuando R_1 y $R_2 \geq R_1$ varían (ver figura 2.11 junto con la figura 2.9). Este valor máximo de L coincide con el valor crítico dado por Benjamin (1962) para un conducto recto.

Estas características generales son también observadas por Batchelor (1967). De hecho, para un conducto recto ($R = 1$) ambos conjuntos de soluciones son muy similares: Uno

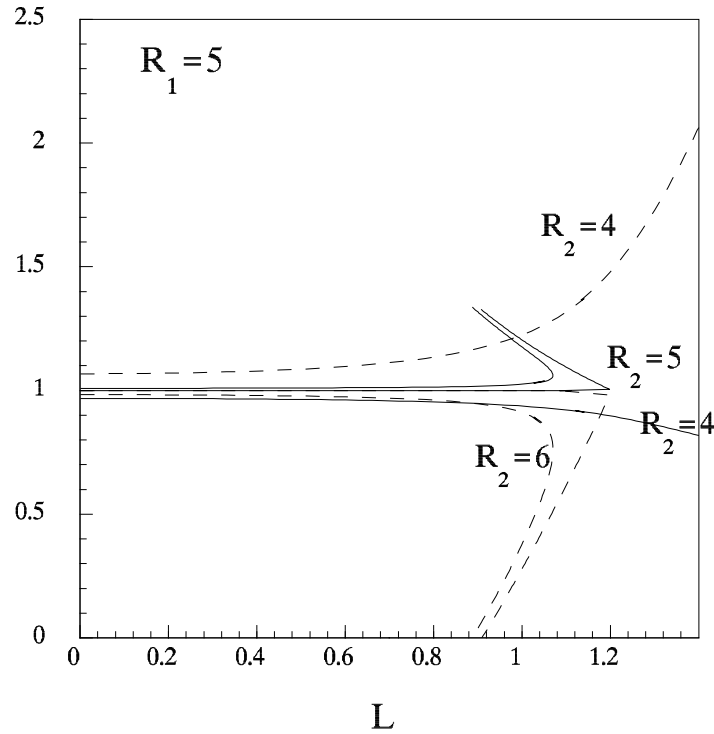


Figura 2.8: Funciones $b(L)$ (líneas continuas) y $\xi(L)$ (líneas a trazos) para $m = 1$ y $R_1 = 5$, con $R_2 = 4, 5.1$ y 6 .

tiene la solución de entrada ($b = \xi = 1$) cruzada por una segunda solución en $L = L_{fm}$. En el caso del flujo de entrada de Batchelor, estas dos soluciones se obtienen fácilmente poniendo $R_1 = R_2$ en (2.54)–(2.55):

$$b_1 = \xi_1 = 1, \quad (R = 1) \quad (2.56)$$

y

$$(R_1^2 - b_2^2)L J_0(2L b_2) + b_2 J_1(2L b_2) = 0, \quad (2.57)$$

$$\xi_2 = 1 - \frac{(b_2^2 - 1)L}{b_2 J_1(2L b_2)}, \quad R = 1,$$

que también están representadas en la figura 2.9. Sin embargo, cuando $R_2 > R_1$, los valores de L_o y L_f obtenidos con el perfil de velocidad axial constante a la entrada usado por Batchelor dependen mucho más fuertemente de los radios del conducto, R_1 y R_2 , que los obtenidos con los flujos de entrada usados en el presente modelo. Así, simplemente permitiendo un decaimiento radial de la velocidad axial, L_f llega a ser menos dependiente de R_1 y R_2 , variando típicamente entre 1 y 1.2 en el modelo actual, más en concordancia con muchos resultados experimentales y numéricos sobre la rotura de vórtices (por ejemplo

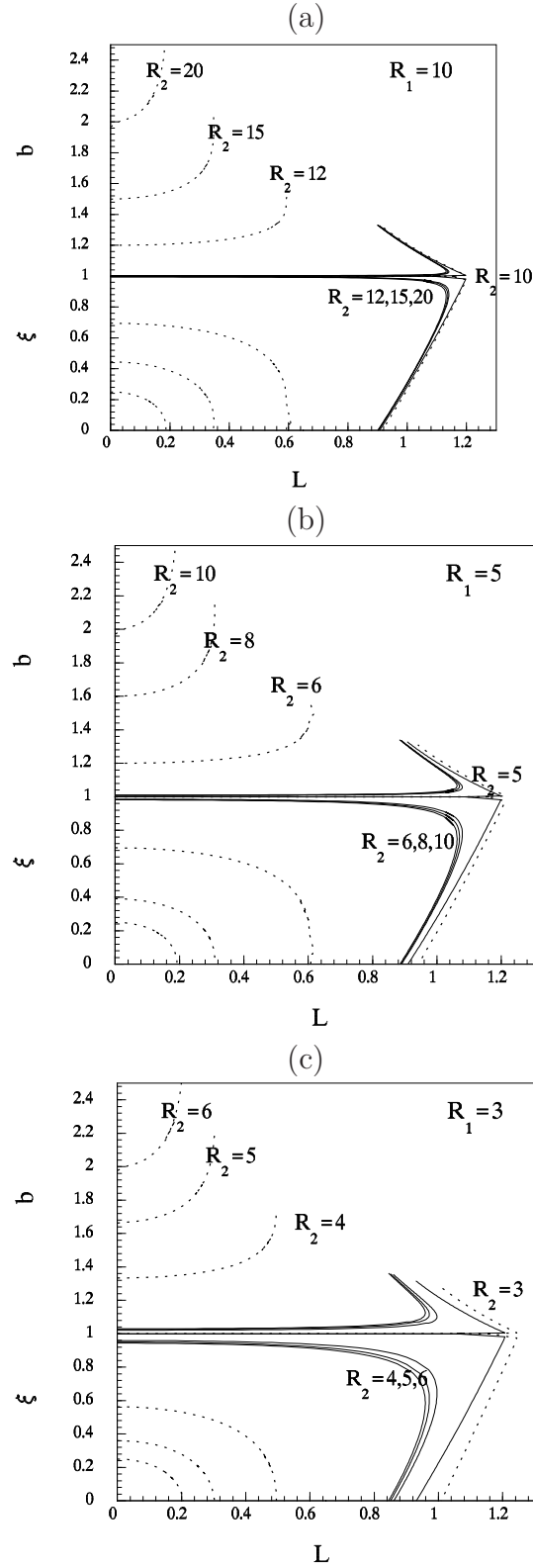


Figura 2.9: Funciones $b(L)$ y $\xi(L)$ dadas por (2.50)–(2.52) para $m = 1$ (líneas continuas), y obtenidas del modelo Batchelor (2.54)–(2.55) (líneas punteadas) para varios valores de R_1 y $R_2 > R_1$: (a) $R_1 = 10$ y $R_2 = 20, 15, 12, 10.0001$; (b) $R_1 = 5$ con $R_2 = 10, 7, 6, 5.0001$, y (c) $R_1 = 3$ con $R_2 = 6, 5, 1, 3.0001$.

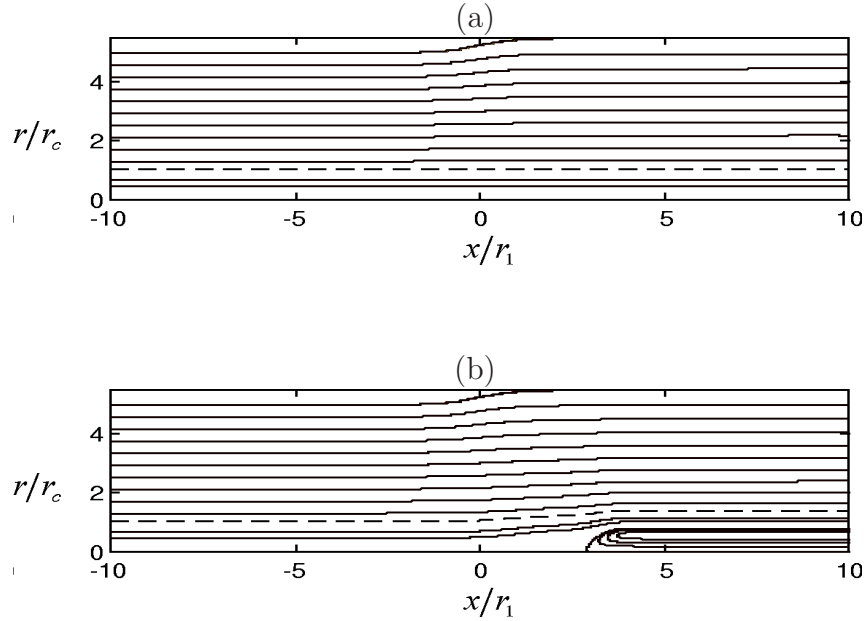


Figura 2.10: Líneas de corriente obtenidas numéricamente de la ecuación de B–H no cilíndrica (2.2) con el conducto de geometría (2.24), usando la velocidad de entrada regularizada (2.27) y (2.28) con $m = 1$, $R_1 = 5$ y $R = 1,1$, para $L = 0,5$ (a) y $L = 1,23 > L_f \simeq 1,05$ (b). Las líneas de corriente discontinuas corresponden al radio del núcleo central.

Spall *et al.*, 1987, Beran & Culik, 1992). Resultados similares fueron obtenidos por Buntine & Saffman (1995) usando un decaimiento exponencial para las velocidades de entrada axial y azimutal fuera del núcleo de vórtice.

La débil dependencia de L_f y L_o con el radio del conducto en nuestro modelo se aprecia más claramente en la figura 2.11, donde se muestra L_f y L_o como función de $R \geq 1$ para ambos modelos de flujo de entrada y para dos valores de R_1 . Con el presente modelo de flujo de entrada para $m = 1$, L_f permanece entre 1.05 y 1.2, aproximadamente, con $L_f \rightarrow L_{fm} \simeq 1,2$ cuando $R \rightarrow 1$. El valor de estancamiento L_o permanece casi constante ($L_o \simeq 0,9$) cuando R aumenta. Por otra parte, usando una velocidad axial constante a la entrada, los valores de L_o y L_f resultantes decaen rápidamente cuando R crece. Para valores suficientemente grandes de R , el valor máximo de L puede incluso desaparecer usando el flujo de entrada de Batchelor (ver figura 2.9; este valor de R depende de R_1 , pero uno puede ver en la figura 2.11 que esto típicamente está entre $R = 1,2$ y $R = 1,4$). En estos casos se produce una transición “suave” a un punto de remanso en el eje cuando L aumenta sin pasar por un máximo. Así, la topología de histéresis de la rotura no viscosa dada por Wang & Russak (1997) no existe para estos casos y la solución con punto de

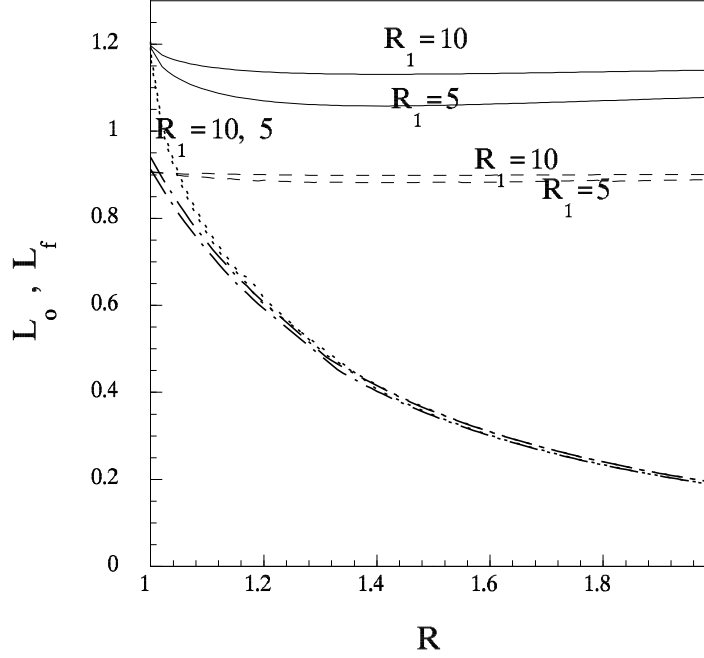


Figura 2.11: L_f (líneas continuas) y L_o (líneas rayadas) como funciones de R para $R_1 = 5$ y 10 ($m = 1$). Las líneas punteadas y de trazos y puntos corresponden al modelo de entrada de Batchelor.

remanso en el eje puede alcanzarse sin una transición brusca. Una situación similar sin valor L_f para un conducto divergente ha sido encontrada por Rusak, Judd & Wang (1997). Estos autores analizaron con técnicas asintóticas el efecto que una pequeña divergencia del conducto puede tener sobre flujos giratorios críticos, encontrando que, según la notación aquí usada, $L_{fm} - L \sim \alpha \sqrt{R - 1}$ cuando $R - 1$ es pequeño, donde α es una constante que depende de la geometría del conducto y del flujo de entrada considerado. Esta ley está de acuerdo con los resultados aquí obtenidos para $0 < R - 1 \ll 1$ (ver figura 2.11; para el flujo de entrada de Batchelor se encuentra que $\alpha \sim 1,4$, que es casi independiente de R_1 , mientras que para el modelo usado en esta sección con $m = 1$, α es más pequeño y depende de R_1).

Otros detalles de la solución para $m = 1$ pueden encontrarse en Fernández Feria & Ortega Casanova (1999).

2.4.2. Caso $1 < m < 2$

Para $m \neq 1$, hay que resolver numéricamente la ecuación (2.39) con las condiciones de contorno (2.40)–(2.42) para obtener $b(L)$ con diferentes valores de m , R_1 y R_2 . Para este

fin, es más conveniente usar esta ecuación escrita de la forma dada en (2.14)–(2.13), usando $m\tilde{\psi}^{(o)}/W_o$ en vez de ψ en la definición (2.12) de g , y reemplazando η por y , que tan sólo transforma formalmente (2.14) en $dg/dy = G/y$, y deja (2.13) sin modificar. Escrita de esta forma, uno puede aprovechar la estructura del plano de fase analizada exhaustivamente en Fernández Feria & Ortega Casanova (1999) para llevar a cabo la integración numérica. Sin embargo, muchas de las sutilezas del plano de fase son irrelevantes aquí porque el eje del conducto está ahora fuera del rango de aplicación de la ecuación (2.13), y porque, del análisis dado en la sección anterior, se está mayormente interesado en valores de R ligeramente mayores que, o igual a, la unidad.

La condición de contorno (2.42) en la pared se escribe

$$g = \frac{2}{(LR)^2}, \quad \text{para } y = \frac{1}{2}R_2^2. \quad (2.58)$$

La condición de contorno en el radio del núcleo, (2.40)–(2.42), sustituida en la solución interior dada en (2.32) y eliminando la constante A , se puede escribir como

$$g = \frac{2}{(Lb)^2} \quad \text{y} \quad G = \frac{2}{L^2} \left(1 + \frac{1-b^2}{b} L \frac{J_0(2Lb)}{J_1(2Lb)} - \frac{1}{b^2} \right) \quad \text{para } y = \frac{1}{2}b^2. \quad (2.59)$$

Para resolver este problema uno puede proceder por el método del disparo. Una manera eficiente de hacerlo es suponer un valor de b para cada valor de m , L , R_1 y R_2 , y obtener de (2.59) g y G justo en el radio del núcleo. Desde estos valores se comienza la integración numérica hacia el radio externo del conducto y, una vez llegado allí, se cambia el valor inicial propuesto para b hasta que tanto g como G vienen dados por (2.59) simultáneamente.

La figura 2.12 muestra $b(L)$ y $\xi(L)$ para diferentes valores de m , R_1 , y R_2 (para conductos divergentes; $R_2 > R_1$) y se compara estas funciones con las correspondientes para $m = 1$ de la figura 2.9. La característica principal observada en la figura es que tanto L_f como L_o disminuyen cuando m aumenta desde la unidad. Esto se aprecia con más claridad en la figura 2.13, donde se dibujan $L_f(m)$ y $L_o(m)$ para diferentes valores de R_1 y R_2 . L_f alcanza a L_o cuando m aumenta desde la unidad, pero siempre existe un valor máximo $L_f > L_o$, excepto para conductos rectos ($R_2 \rightarrow R_1$) y por encima de un valor relativamente grande de m (recuérdese que, físicamente, los valores más interesantes de m son aquellos cercanos a la unidad). También se ha incluido en esta figura $L^*(m)$, obtenido por Fernández Feria, Fernández de la Mora & Barrero (1995).

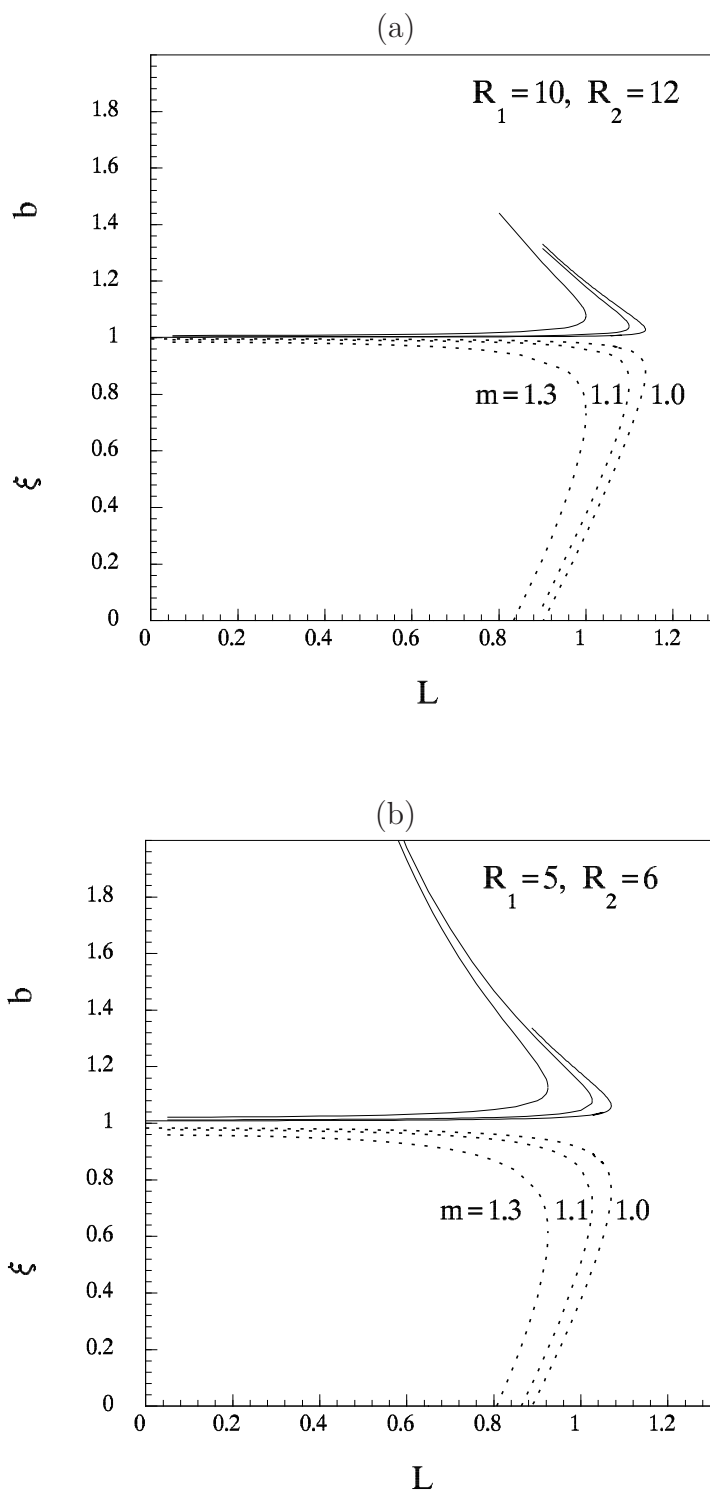


Figura 2.12: $b(L)$ (líneas continuas) y $\xi(L)$ (líneas a trazos) para valores diferentes de m , R_1 y R_2 , según se indican.

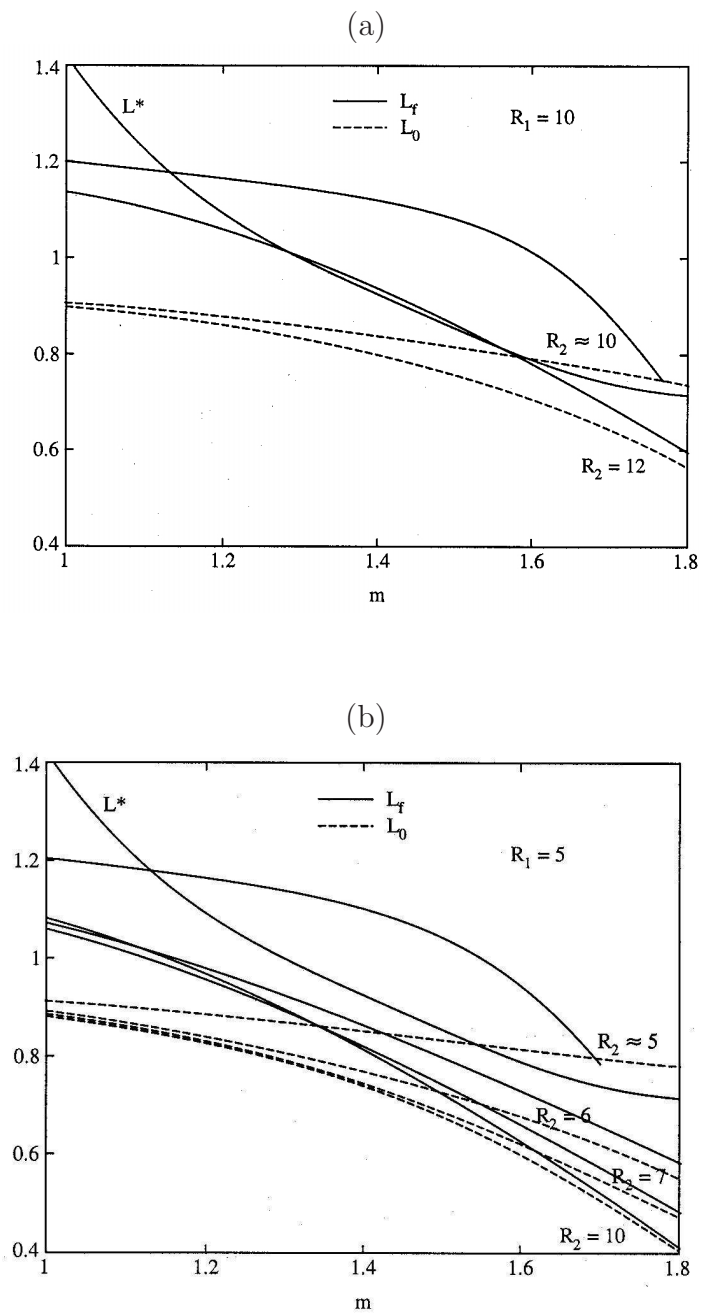


Figura 2.13: $L_f(m)$ (líneas continuas) y $L_o(m)$ (líneas a trazos) para $R_1 = 10$ (a) y $R_1 = 5$ (b), y para varios valores de R_2 . También se incluye $L^*(m)$.

2.5. Conclusiones

Usando dos modelos simples para el flujo giratorio a la entrada de un conducto se ha mostrado que las ecuaciones no viscosas predicen la rotura de vórtices sólo para perfiles de velocidad a la entrada regulares en el eje. Se deduce, por lo tanto, que la presencia de la viscosidad, que es el agente que regulariza el comportamiento, normalmente singular en el eje de flujos no viscosos con giro (ver por ejemplo, Long, 1961, Fernández Feria, Fernández de la Mora, Pérez Saborid & Barrero, 1999), es esencial para que ocurra la rotura de vórtices en conductos. Por supuesto que el ejercicio simple presentado en este capítulo está lejos de concluir con la pregunta acerca de la importancia de la viscosidad en la rotura de vórtices, pero creemos que añade algunos nuevos elementos a ésta. Para terminar de explicar este problema (al menos en conductos), uno tiene que efectuar simulaciones numéricas de flujos con giro en conductos usando las ecuaciones viscosas completas, pero con condiciones de contorno aguas arriba a la entrada del conducto más realistas que las usadas previamente por algunos investigadores, y compararlas con simulaciones no viscosas (trabajo que se presentará a lo largo de los capítulos 4 y 5). Darmofal, en sus simulaciones numéricas de las ecuaciones de Navier Stokes para el flujo con giro en un conducto (Darmofal, 1996), encuentra que la localización de la rotura era “extremadamente sensible a pequeñas variaciones en las condiciones de entrada”, las cuales eran ajustadas a partir de medidas experimentales. De aquí la necesidad en la precisión de las condiciones de contorno a la entrada. Puede señalarse, por contra, que si la presencia de la viscosidad es esencial para que ocurra la rotura de vórtices, ¿por qué las simulaciones no viscosas (pero con viscosidad escondida en el flujo de entrada) predicen tan razonablemente bien la rotura?. La respuesta puede ser que, si la ausencia de singularidad axial (o la presencia de viscosidad) es esencial para la rotura de vórtices, el parámetro que gobierna esto, el parámetro de giro, es puramente no viscoso y así, el mecanismo que produce la rotura es principalmente no viscoso, como muestran muchos trabajos previos acerca del tema (por ejemplo, Benjamin, 1962, Stuart, 1987, Buntine & Saffman, 1995, Wang & Russak, 1997). Como señalaron anteriormente Hall (1967), Beran & Culik (1992) y otros autores, algo similar sucede en el fenómeno de separación de capa límite: aunque sin viscosidad no hay separación, ésta es producida por los gradientes adversos de presión, controlada, por lo tanto, por factores no viscosos externos y predicha

por argumentos no viscosos. De los resultados citados y de los contenidos en esta sección puede inferirse que los detalles de cómo la viscosidad realmente regulariza al flujo no viscoso en el eje son menos importantes para la predicción (al menos cualitativa) de la rotura que el hecho de que la viscosidad sea tenida en cuenta en el perfil de velocidad de entrada en una forma más o menos exacta. En otras palabras, la viscosidad es de forma indirecta esencial en el mecanismo de la rotura de vórtices en cuanto que es la causante de la regularización del vórtice.

Independientemente de la pregunta sobre la viscosidad, los modelos no viscosos aquí presentados muestran que es importante tener en cuenta el decaimiento radial del flujo axial a la entrada a fin de predecir correctamente el parámetro de giro crítico por encima del cual ocurre la rotura de vórtices desde un punto de vista no viscoso. Si uno supone una velocidad axial uniforme, Batchelor (1967), el parámetro crítico de giro es mucho más dependiente del radio de salida del conducto que los valores aquí obtenidos, siendo apreciablemente menor. Usando un decaimiento radial potencial hemos demostrado, como previamente Buntine & Saffman (1995) usando un decaimiento exponencial, que los parámetros críticos de giro predichos de manera no viscosa son casi independientes del radio de salida, en concordancia con los experimentos.

Por último, cuando se utiliza un perfil de velocidad axial uniforme, a v_{se} produce un tipo de transición suave hacia un punto de remanso en el eje sin pasar por un valor máximo L_f , correspondiente a una transición abrupta hacia la solución de remanso en el eje descrita por Wang & Russak (1997). Estos dos tipos cualitativamente diferentes de rotura del vórtice en el conducto también se observarán en las simulaciones viscosas consideradas en el capítulo 5.

Capítulo 3

Flujo no viscoso con giro en conductos de sección variable

3.1. Introducción

De acuerdo con los resultados del capítulo anterior, la viscosidad juega un papel indirecto, pero esencial, en la RV en cuanto regulariza el perfil de velocidad no viscoso a la entrada. Los efectos de la viscosidad son también cuantitativamente importantes en la determinación del parámetro de giro crítico de rotura (ver Darmofal, 1996). En este capítulo se va a resolver numérica y asintóticamente las ecuaciones *no viscosas* para el flujo con giro en el mismo conducto que se va a utilizar posteriormente (capítulo 5) para resolver el problema viscoso. Básicamente, el conducto tiene un cuerpo central a la entrada que puede girar o no, al igual que la pared externa del conducto aguas arriba. Este cuerpo central simula el cubo axial del rotor de un generador de vórtices y, por supuesto, producirá un flujo no viscoso *singular* en el eje, que la viscosidad se encargará de regularizar (ver capítulo 5). Veremos que las soluciones no viscosas son cualitativamente muy diferentes dependiendo de la configuración a la entrada: si gira el cuerpo central solamente, si gira la pared externa solamente, o si ambos elementos giran. Esto demuestra la enorme dependencia de la RV del tipo de flujo a la entrada cuando el movimiento se simula en ausencia de viscosidad de una manera estricta. La geometría se ha elegido así porque, además de corresponder a un generador real de vórtices en un conducto que se puede implementar fácilmente en el laboratorio, permite fijar con precisión el perfil de velocidad viscoso a la entrada del conducto (ver capítulo 5), lo cual es esencial si se quiere comparar de forma precisa las predicciones viscosas y no viscosa sobre la RV en

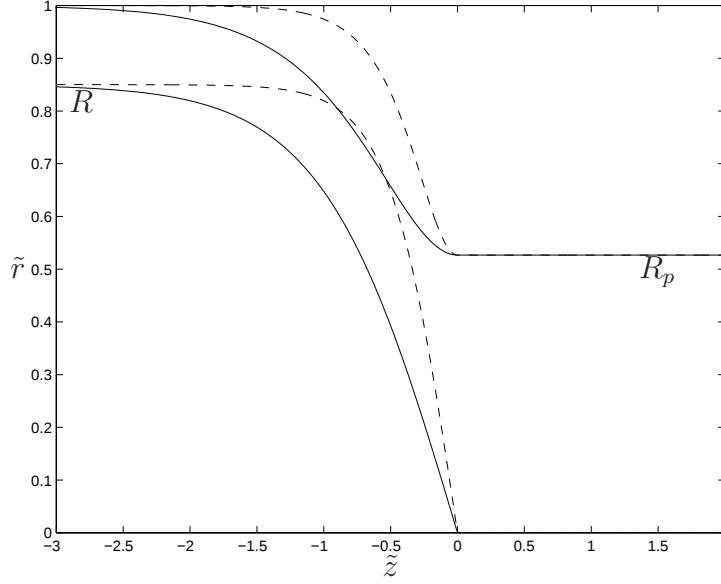


Figura 3.1: Geometría del conducto para $\alpha = 1$ (línea continua) y $\alpha = 2$ (línea discontinua) para $R = 0,85$. Aunque el dominio que se muestra es $-3 \leq \tilde{z} \leq 2$, en todos los resultados numéricos de la sección 3.4 se ha usado $-10 \leq \tilde{z} \leq 10$, es decir, $\tilde{e}_1 = 10$ y $\tilde{e}_2 = 10$.

un conducto. Los resultados de este capítulo están publicados en Ortega Casanova & Fernández Fera (1999).

3.2. Formulación del problema

Se pretende resolver la ecuación de Bragg–Hawthorne (2.2) el interior de un conducto cuya forma es la que aparece en la figura 3.1, con una contracción en la pared exterior y un cuerpo central en su interior. Este cuerpo interno acaba en $z = 0$, y su radio en variables adimensionales se escribe (ver figura 3.1)

$$\tilde{r}_i(\tilde{z}) \equiv \frac{r_i(z)}{r_2} = R \tanh(-\alpha \tilde{z}) \quad \text{para} \quad -\tilde{e}_1 \leq \tilde{z} \leq 0, \quad (3.1)$$

$$\tilde{r}_i(\tilde{z}) = 0 \quad \text{para} \quad 0 < \tilde{z} \leq \tilde{e}_2, \quad (3.2)$$

donde $-\tilde{e}_1$ y $\tilde{e}_2$ son las posiciones axiales de la entrada y salida del conducto, respectivamente. Se ha usado el radio a la entrada del conducto, r_2 , como la longitud característica, con las siguientes variables y parámetros adimensionales:

$$\tilde{r} \equiv \frac{r}{r_2}, \quad \tilde{z} \equiv \frac{z}{r_2}, \quad R \equiv \frac{r_1}{r_2}, \quad (3.3)$$

donde r_1 es el radio aguas arriba del cuerpo central, cuya longitud característica axial viene dada por el parámetro geométrico adimensional α (ver figura 3.1). El radio del conducto, o pared externa, se define en base a r_i y a la sección interior del conducto $A(z)$ conocida:

$$\tilde{r}_e(\tilde{z}) \equiv \frac{r_e(z)}{r_2} = \sqrt{\mathcal{S}(\tilde{z}) + \tilde{r}_i^2(\tilde{z})}, \quad \mathcal{S}(\tilde{z}) \equiv \frac{A(z)}{\pi r_2^2}. \quad (3.4)$$

La forma particular de $\mathcal{S}(\tilde{z})$ usada en los cálculos numéricos será especificada posteriormente en §3.4. En lo que sigue se van a definir y a usar las variables adimensionales sin la tilde “~”.

Las funciones $H(\psi)$ y $\Gamma(\psi)$ de la ecuación de B–H se obtienen a partir de los perfiles de velocidad a la entrada del conducto, $z = -e_1$, $R \leq r \leq 1$. Estos perfiles se definen en forma adimensional en función de una velocidad característica axial U y una velocidad angular característica Ω . En particular, se definen las componentes adimensionales de la velocidad,

$$u \equiv \frac{u}{U}, \quad v \equiv \frac{v}{\Omega r_2}, \quad w \equiv \frac{w}{U}, \quad (3.5)$$

y el parámetro de giro

$$L \equiv \frac{\Omega r_2}{U}. \quad (3.6)$$

Se usarán tres perfiles de velocidad diferentes a la entrada, los cuales se denotarán por (a), (b) y (c) en lo que sigue, definidos por

$$(a) \quad u = 0, \quad v = r, \quad w = 1, \quad (3.7a)$$

$$(b) \quad u = 0, \quad v = \frac{r^2 - R^2}{r(1 - R^2)}, \quad w = 1, \quad (3.7b)$$

$$(c) \quad u = 0, \quad v = \frac{R^2(1 - r^2)}{r(1 - R^2)}, \quad w = 1, \quad (3.7c)$$

donde $r \in [R, 1]$. Todos ellos corresponden a un flujo cilíndrico ($u = 0$) con una velocidad axial uniforme ($w/U = 1$). En cuanto a los perfiles de velocidad azimutal, el primero corresponde a una rotación como sólido rígido entre las dos paredes del conducto, ambas girando con velocidad angular Ω ; el segundo corresponde a una rotación de la pared externa únicamente, con el cuerpo central parado, y el tercero a una rotación del cuerpo central solamente. Estos tres perfiles para la velocidad azimutal de la entrada están dibujados en la figura 3.2 para $R = 0,85$. Las correspondientes distribuciones

para el campo de presiones (dado por la ecuación de cantidad de movimiento radial, $\rho v^2/r = \partial p/\partial r$) y para la vorticidad $[\boldsymbol{\omega} = (\gamma, \zeta, \chi) = (\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta})]$ a la entrada son:

$$(a) \quad p = \frac{1}{2}r^2 + p_0, \quad \gamma = 0, \quad \zeta = 0, \quad \chi = 2, \quad (3.8a)$$

$$(b) \quad p = \frac{1}{(1-R^2)^2} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{R^4}{2r^2} - 2R^2 \ln r \right) + p_0, \\ \gamma = 0, \quad \zeta = 0, \quad \chi = \frac{r^2 - R^2}{r(1-R^2)}, \quad (3.8b)$$

$$(c) \quad p = \frac{R^4}{(1-R^2)^2} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{1}{2r^2} - 2 \ln r \right) + p_0, \\ \gamma = 0, \quad \zeta = 0, \quad \chi = -\frac{2R^2}{1-R^2}, \quad (3.8c)$$

donde la presión y la vorticidad se han adimensionalizado mediante

$$p \equiv \frac{p}{\rho(\Omega r_2)^2}, \quad \boldsymbol{\omega} \equiv \frac{\boldsymbol{\omega}}{\Omega}, \quad (3.9)$$

y p_0 es un valor de referencia, diferente para cada uno de los tres casos [por ejemplo, $p_0 = p(r=0)$ para el caso (a), $p_0 = p(r=1)$ para el caso (c), y p_0 depende de R para el caso (b)].

Haciendo uso de las variables y parámetros adimensionales, la ecuación de B-H (2.2) se puede escribir como

$$\psi_{zz} - \frac{1}{r}\psi_r + \psi_{rr} = 4L^2 \left(r^2 \frac{dH}{d\psi} - \Gamma \frac{d\Gamma}{d\psi} \right), \quad (3.10)$$

donde

$$\psi \equiv \frac{\psi}{\frac{1}{2}U r_2^2}, \quad H \equiv \frac{H}{\Omega^2 r_2^2}, \quad \Gamma \equiv \frac{\Gamma}{\Omega r_2^2}. \quad (3.11)$$

Las funciones H y Γ se obtienen de (3.7)–(3.8):

$$(a) \quad H(\psi) = \psi, \quad \Gamma(\psi) = \psi + R^2, \quad (3.12a)$$

$$(b) \quad H(\psi) = \frac{1}{(1-R^2)^2} (\psi - R^2 \ln(\psi + R^2)), \quad \Gamma(\psi) = \frac{\psi}{1-R^2}, \quad (3.12b)$$

$$(c) \quad H(\psi) = \frac{R^4}{(1-R^2)^2} (\psi - \ln(\psi + R^2)), \quad \Gamma(\psi) = R^2 \left(1 - \frac{\psi}{1-R^2} \right), \quad (3.12c)$$

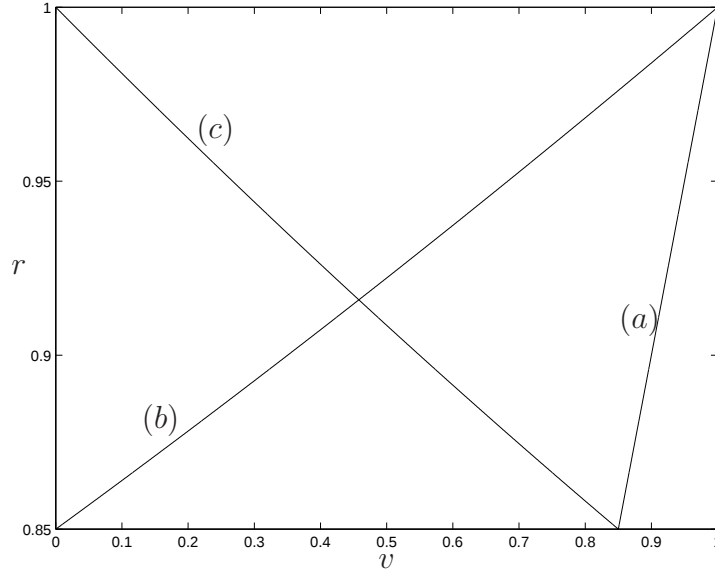


Figura 3.2: Perfiles de la velocidad azimuthal en los tres casos de la ecuación (3.7) con $R = 0,85$.

donde se ha omitido una constante aditiva para H por ser irrelevante.

La ecuación de B–H (3.10) se puede escribir de una manera compacta y genérica para los tres tipos de flujos considerados de la siguiente manera:

$$\psi_{zz} - \frac{1}{r}\psi_r + \psi_{rr} = a^2(c_1r^2 - \psi + c_2 + r^2\frac{c_3\psi + c_4}{\psi + R^2}), \quad (3.13)$$

donde las constantes a , y c_i , $i = 1, 2, 3, 4$, vienen dadas por

$$(a) \quad c_1 = 1, \quad c_2 = -R^2, \quad c_3 = 0, \quad c_4 = 0, \quad a = 2L, \quad (3.14a)$$

$$(b) \quad c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 1, \quad c_4 = 0, \quad a = \frac{2L}{1 - R^2}, \quad (3.14b)$$

$$(c) \quad c_1 = 1, \quad c_2 = 1 - R^2, \quad c_3 = 0, \quad c_4 = -1, \quad a = \frac{2LR^2}{1 - R^2}. \quad (3.14c)$$

Se observa que la ecuación de B–H resultante es lineal solamente para el perfil de entrada correspondiente al caso (a) ($c_3 = c_4 = 0$), mientras que para los casos (b) y (c) la ecuación es no lineal. Esta ecuación debe resolverse con condiciones de contorno conocidas sobre los cuatro contornos de la geometría que se está considerando. A la entrada ($z = -e_1$), la distribución radial de ψ viene dada por el perfil uniforme de velocidad axial considerado para los tres casos, tomando la pared interna como origen

($\psi(r = R) = 0$). La pared del cuerpo central y el eje de simetría ($r = r_i$) son líneas de corriente, siendo la función de corriente ahí igual a su valor a la entrada sobre el cuerpo central ($\psi(r = r_i) = 0$). La pared externa también es otra línea de corriente de valor igual al de la entrada ($\psi(r = r_e) = 1 - R^2$). Finalmente, a la salida ($z = e_2$) se considerará que el flujo es cilíndrico. Para imponer esta condición, uno podría imponer, por ejemplo, que la velocidad radial es nula a la salida ($u(z = e_2) = 0$). Sin embargo, esta condición es demasiado restrictiva, y se usará la condición más débil de que el gradiente axial de la velocidad radial es nulo a la salida, $u_z = \psi_{zz} = 0$ en $z = e_2$, (ver Buntine & Saffman, 1995, para una discusión de estas y otras posibles condiciones de contorno a la salida de un conducto). En resumen, las cuatro condiciones de contorno se escriben

$$\psi(r, z = -e_1) = r^2 - R^2, \quad R \leq r \leq 1, \quad (3.15a)$$

$$\psi(r = r_i, z) = 0, \quad -e_1 \leq z \leq e_2, \quad (3.15b)$$

$$\psi(r = r_e, z) = 1 - R^2, \quad -e_1 \leq z \leq e_2, \quad (3.15c)$$

$$\psi_{zz} = 0, \quad z = e_2, \quad 0 \leq r \leq R_p, \quad (3.15d)$$

donde

$$R_p = \frac{r_3}{r_2}, \quad (3.16)$$

y r_3 es el radio del conducto en la sección de salida.

3.3. Solución asintótica aguas abajo y valores críticos del parámetro de giro

En esta sección se buscarán soluciones cilíndricas para (3.13) en la región lejana aguas abajo ($z \gg 1$), donde $r_i = 0$ y $r_e \rightarrow R_p$, correspondientes a los tres flujos cilíndricos de entrada (3.7a), (3.7b) y (3.7c). Se verá que estas soluciones proporcionan valores críticos de L por encima de los cuales la estructura del flujo aguas abajo cambia abruptamente.

Con el fin de linealizar la ecuación para los casos (b) y (c), se supondrá que R_p es pequeño. Así, aguas abajo, tanto r como ψ son pequeños, y el término no lineal en la

parte derecha de (3.13) puede ser linealizado como

$$r^2 \frac{c_3 \psi + c_4}{\psi + R^2} = \frac{c_4 r^2}{R^2} + r^2 \psi \left(\frac{c_3}{R^2} - \frac{c_4}{R^4} \right) + O(r^2 \psi^2). \quad (3.17)$$

Manteniendo los términos hasta $O(r^2)$ [y, por tanto, con errores de $O(r^2 \psi) = O(R_p^2(1 - R^2))$]; hay que notar que para una sección líquida constante $\mathcal{S} = \text{constante} = 1 - R^2 = R_p^2$, los errores son de $O(R_p^4)$], la ecuación (3.13) llega a ser

$$\psi_{zz} - \frac{1}{r} \psi_r + \psi_{rr} = a^2 (c_1 r^2 - \psi + c_2 + c_4 \frac{r^2}{R^2}). \quad (3.18)$$

Esta ecuación es exacta para el caso (a), para el que $c_3 = c_4 = 0$. Definiendo

$$F \equiv \psi - c_2 - r^2(c_1 + \frac{c_4}{R^2}), \quad (3.19)$$

la ecuación (3.18) y las condiciones de contorno sobre $r = r_i = 0$ y $r = r_e \rightarrow R_p$, ecuaciones (3.15b)–(3.15c), se transforman en

$$F_{zz} - \frac{1}{r} F_r + F_{rr} + a^2 F = 0, \quad (3.20)$$

$$F = -c_2 - r^2(c_1 + \frac{c_4}{R^2}), \quad r = 0, \quad -e_1 \leq z \leq e_2, \quad (3.21a)$$

$$F = 1 - R^2 - c_2 - r^2(c_1 + \frac{c_4}{R^2}), \quad r = R_p, \quad -e_1 \leq z \leq e_2. \quad (3.21b)$$

Así, en este límite de z grande, el problema puede resolverse por separación de variables. Haciendo uso de las condiciones (3.21) en (3.20), se tiene un problema de autovalores para la dependencia en r que proporciona la siguiente solución como una expansión mediante funciones de Bessel de primer orden J_1 (primera clase) e Y_1 (segunda clase):

$$F = r[A_0 J_1(a r) + B_0 Y_1(a r)] + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n e^{\lambda_n z} + D_n e^{-\lambda_n z}) r J_1(\frac{j_{1,n}}{R_p} r), \quad (3.22)$$

donde $j_{1,n}$ es el n -simo cero de J_1 (ver Abramowitz & Stegun, 1964), y los autovalores λ_n vienen dados por

$$\lambda_n = \sqrt{\frac{j_{1,n}^2}{R_p^2} - a^2}. \quad (3.23)$$

Las constantes B_0 y A_0 son

$$(a) \quad B_0 = -R^2 L\pi, \quad A_0 = \frac{1 - R_p^2 - B_0 R_p Y_1(2LR_p)}{R_p J_1(2LR_p)}, \quad (3.24a)$$

$$(b) \quad B_0 = 0, \quad A_0 = \frac{1 - R^2}{R_p J_1(aR_p)}, \quad (3.24b)$$

$$(c) \quad B_0 = \frac{(1 - R^2)\pi a}{2}, \quad A_0 = \frac{(1 - R^2)R_p - R^2 B_0 Y_1(aR_p)}{R^2 J_1(aR_p)}. \quad (3.24c)$$

Todas las constantes C_n en (3.22) deberán ser nulas, y las D_n no pueden ser determinadas dentro del presente límite asintótico de z grande; sin embargo, ambas son irrelevantes para $z \gg 1$, donde solamente los dos primeros términos de (3.22) son importantes.

Es interesante comparar los tres diferentes comportamientos cerca del eje ($r \ll 1$) de esta solución obtenida para los tres flujos de entrada considerados:

caso (a):

$$\psi = \frac{B_0 a}{\pi} r^2 \ln r + Ar^2 + O(r^4 \ln r), \quad (3.25)$$

$$w = \frac{B_0 a}{\pi} (2 \ln r + 1) + A + O(r^2 \ln r), \quad (3.26)$$

$$v = \frac{R^2}{r} + \frac{B_0 a}{\pi} r \ln r + Ar + O(r^3 \ln r), \quad (3.27)$$

$$p = p_0 + \frac{1}{4\pi^2} (2 \ln r (4A\pi^2 R^2 + aB_0 2R^2 \pi \ln r) - \frac{2\pi R^4}{r^2}) + O(r^2 \ln^2 r); \quad (3.28)$$

caso (b)

$$\psi = Ar^2 + O(r^4), \quad (3.29)$$

$$w = A + O(r^2), \quad (3.30)$$

$$v = \frac{Ar}{1 - R^2} + O(r^3), \quad (3.31)$$

$$p = p_0 + \frac{A^2 r^2}{2(1 - R^2)^2} + O(r^6); \quad (3.32)$$

caso (c):

$$\psi = \frac{B_0 a}{\pi} r^2 \ln r + Ar^2 + O(r^4 \ln r), \quad (3.33)$$

$$w = \frac{B_0 a}{\pi} (\ln r + \frac{1}{2}) + A + O(r^2 \ln r), \quad (3.34)$$

$$v = R^2 \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{1-R^2} \left(\frac{B_0 a}{\pi} r \ln r + Ar \right) \right] + O(r^3 \ln r), \quad (3.35)$$

$$p = p_0 + \frac{R^4}{4\pi^2(1-R^2)^2} [2 \ln r \{ -4A\pi^2(1-R^2) - aB_0 2\pi(1-R^2) \ln r \} - \frac{2\pi^2(1-R^2)^2}{r^2}] + O(r^2 \ln^2 r). \quad (3.36)$$

En las expresiones anteriores A viene dado por

$$A \equiv c_1 + \frac{c_4}{R^2} + \frac{aA_0}{2} + \frac{aB_0}{2\pi} \left(2\gamma - 1 + 2 \ln \frac{a}{2} \right), \quad (3.37)$$

y $\gamma \simeq 0,5772156649$ es la constante de Euler. La componente radial de la velocidad no ha sido dada explícitamente porque se hace exponencialmente pequeña cuando $z \rightarrow \infty$. Notar también que solamente para el caso (b), que corresponde a un flujo de entrada con velocidad azimutal nula en $r = r_e$ (el cuerpo central no está girando), las propiedades del flujo son todas regulares en el eje. Para los casos (a) y (c), la velocidad azimutal se hace singular en el eje debido a la rotación del cuerpo interno y a la conservación de la circulación a lo largo de las líneas de corriente para un flujo no viscoso y, como consecuencia de esto, el resto de las propiedades del flujo son también singulares en el eje.

La solución asintótica anterior proporciona un criterio para la rotura de cada flujo a la entrada: el flujo aguas abajo decae exponencialmente a un flujo cilíndrico independiente de z si todos los autovalores λ_n son reales; en caso contrario, es decir, si alguno de los λ_n fuera imaginario, el flujo aguas abajo oscilaría periódicamente a lo largo de z . La condición $\lambda_1 = 0$ proporciona, por tanto, un valor máximo del parámetro de giro, $L = L_f$, por encima del cual no es posible obtener un flujo cilíndrico aguas abajo a partir del utilizado a la entrada. Usando (3.23) y las diferentes definiciones del parámetro a para los tres flujos de entrada considerados, se obtienen los siguientes tres parámetros de giro críticos para la rotura del flujo aguas abajo:

$$L_f^{(a)} = \frac{j_{1,1}}{2R_p}, \quad (3.38a)$$

$$L_f^{(b)} = \frac{j_{1,1}(1-R^2)}{2R_p} + O\left(\frac{R_p^2}{R^2}\right), \quad (3.38b)$$

$$L_f^{(c)} = \frac{j_{1,1}(1-R^2)}{2R_p R^2} + O(R_p^4) + O\left(\frac{R_p^4}{R^4}\right). \quad (3.38c)$$

Las sucesivas condiciones $\lambda_n = 0, n = 2, 3, \dots$, proporcionarán otros valores críticos para el parámetros de giro, $L = L_{f_n} > L_f$, por encima de los cuales la estructura que existe aguas abajo cambia de nuevo, pero estos valores críticos no son físicamente tan relevantes como $L_{f_1} \equiv L_f$ pues el flujo aguas abajo ya no tiene simetría cilíndrica para $L > L_f$. Nótese que para un conducto recto sin cuerpo central ($R = 0, R_p = 1$), los valores críticos para los casos (a) y (b), que en este límite serían idénticos, colapsan en $L_f = j_{1,1}/2$, que coincide con el valor crítico dado por Batchelor (1967) para un flujo girando como sólido rígido en el interior de un conducto uniforme. Además, este valor coincide también con el obtenido por Chow (1969) para un conducto de geometría diferente a la aquí usada en el límite de longitud infinita. Para el caso (c), en este límite de $R = 0$ y $R_p = 1$, $L_f \rightarrow \infty$ pues la rotación del flujo a la entrada desaparece con el cuerpo central [ver ecuaciones (3.7a)–(3.7c)].

Otra característica del flujo aguas abajo es que una región de flujo invertido se puede formar cerca de la pared por encima de un determinado valor del parámetro de giro $L = L_r$. Para obtenerlo partiendo de la solución asintótica anterior, se debe de tener en cuenta que la función ψ crecería (pendiente positiva) entre $r_i \leq r \leq r_e$ si no existiera la región de flujo inverso cerca de la pared. El inicio, por tanto, de este flujo inverso requiere que la pendiente de la función ψ sea nula primero en la pared, y después negativa cerca de la pared. Con esto, el valor L_r se puede calcular de la condición

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \quad \text{en} \quad r = R_p. \quad (3.39)$$

Usando la solución (3.22) para $z \gg 1$,

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = -2r[(c_1 + \frac{c_4}{R^2}) + aA_0J_0(ar) + aB_0Y_0(ar)], \quad (3.40)$$

con lo que la condición (3.39) proporciona, para el caso (a),

$$2L_r^{(a)}R^2 = -2L_r^{(a)}(R_p^2 - 1)J_0(2L_r^{(a)}R_p) + 2R_pJ_1(2L_r^{(a)}R_p). \quad (3.41)$$

Puesto que la ecuación (3.20) no contiene ninguna aproximación para este caso, el valor de $L_r^{(a)}$ que resulta de esta ecuación algebraica es exacto y válido para cualquier valor de R_p . Para R_p pequeño, los valores de L_r que se obtienen para los tres casos considerados son:

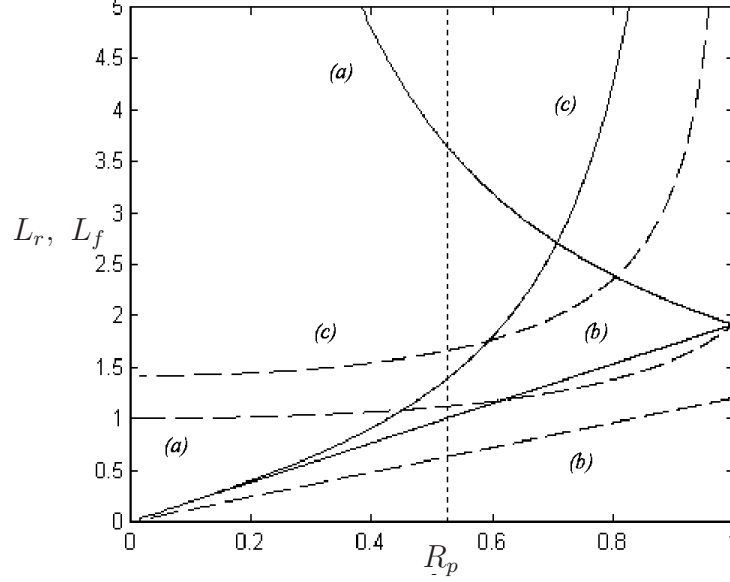


Figura 3.3: Parámetro de giro crítico L_f (línea continua) y de recirculación L_r (línea a trazos) para los tres flujos de entrada considerados como funciones de $R_p = \sqrt{1 - R^2}$. El valor $R_p = 0,52678$ usado en los resultados numéricos es el marcado con una línea vertical discontinua.

$$L_r^{(a)} = \frac{\sqrt{2(1-R)}}{R_p} + \frac{\frac{1}{R} - 1}{2\sqrt{2(1-R)}} R_p + O(R_p^3), \quad (3.42a)$$

$$L_r^{(b)} = \frac{j_{0,1}(1-R^2)}{2R_p} + O(R_p^2(1-R^2)), \quad (3.42b)$$

$$L_r^{(c)} = \frac{\sqrt{2}(1-R^2)}{RR_p^2} + O(R_p^2(1-R^2)) + O(R_p^5), \quad (3.42c)$$

donde $j_{0,1}$ es el primer cero de la función de Bessel J_0 . En la figura 3.3 se muestran los valores de L_f y L_r como función de R_p para los tres casos considerados cuando la sección fluida del conducto es constante ($1 - R^2 = R_p^2$). Para el caso (a), estas funciones son válidas para cualquier valor de R_p [ecuaciones (3.38a) y (3.41)], mientras que en los otros dos casos sólo son válidas cuando R_p es pequeño, con errores que varían entre $O(R_p^2)$ y $O(R_p^4)$ [ver (3.38b)–(3.38c) y (3.42b)–(3.42c)]. Es interesante notar que para el caso (c), $L_r > L_f$ cuando R_p es pequeño, por lo que la región de flujo inverso cerca de la pared externa aparece para un parámetro de giro mayor que el crítico para que se produzca la rotura del vórtice aguas abajo. Por tanto, la región de flujo inverso cerca de la pared no

se alcanza al requerir un L por encima del de validez de la presente solución cilíndrica.

3.4. Resultados numéricos

Para llevar a cabo la integración numérica de (3.13)–(3.15), se usará un valor constante para la sección interior $\mathcal{S}(z)$ en (3.4):

$$\mathcal{S}(z) = 1 - R^2 \equiv \mathcal{S}_0. \quad (3.43)$$

Es necesario transformar el dominio físico fluido en uno rectangular en el que llevar a cabo la integración numéricamente. Para ello se definirán las nuevas coordenadas

$$\eta = \frac{r_i(\xi) - r}{r_i(z) - r_e(z)} \quad \text{y} \quad \xi = z, \quad (3.44)$$

con lo que el dominio computacional se transforma en

$$0 \leq \eta \leq 1 \quad \text{y} \quad -\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2, \quad (3.45)$$

donde $\xi_1 = e_1$ y $\xi_2 = e_2$. Con esta transformación, la ecuación (3.10) y las condiciones de contorno (3.15) se pueden escribir como

$$\begin{aligned} \psi_{\xi\xi} + f_1\psi_{\xi\eta} + f_2\psi_{\eta\eta} + f_3\psi_{\eta} = \\ 4L^2[\{\eta(r_i - r_e) + r_e\}^2 \frac{dH}{d\psi} - \Gamma \frac{d\Gamma}{d\psi}], \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\psi(\eta, \xi = -\xi_1) = [\eta(r_i - r_e) + r_e]^2 - R^2, \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad (3.47a)$$

$$\psi(\eta = 0, \xi) = 0, \quad -\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2, \quad (3.47b)$$

$$\psi(\eta = 1, \xi) = 1 - R^2, \quad -\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2, \quad (3.47c)$$

$$\psi_{\xi\xi} = 0, \quad \xi = \xi_2, \quad 0 \leq \eta \leq 1. \quad (3.47d)$$

En (3.46) las diferentes funciones $f_i(\xi, \eta)$, $i = 1, 2, 3$, vienen dadas por

$$f_1 = 2r'_i \frac{1}{r_i - r_e} - [r'_i - r'_e] \frac{2\eta}{r_i - r_e}, \quad (3.48a)$$

$$f_2 = \frac{1}{(r_i - r_e)^2} + \frac{f_1^2}{4}, \quad (3.48b)$$

$$f_3 = \frac{r''_i}{r_i - r_e} - \frac{2[r'_i - r'_e]r'_i}{(r_i - r_e)^2} + \frac{2\eta[\eta'_i - \eta'_o]^2}{(\eta_i - \eta_o)^2} - \frac{\eta[r''_i - r''_e]}{r_i - r_e} + \{\eta(r_i - r_e) + r_e(r_i - r_e)\}^{-1}, \quad (3.48c)$$

con las primas indicando diferenciación respecto a z . Para resolver el problema (3.46)–(3.47) se discretizarán las derivadas mediante diferencias finitas en una malla de $\mathcal{M}$ puntos para la dirección de η y $\mathcal{N}$ para la de ξ , utilizándose en ambos casos distribuciones equiespaciadas. Así, resulta un sistema de $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ ecuaciones algebraicas no lineales para los valores desconocidos ψ_k en cada nodo $k = (m, n)$, $1 \leq m \leq \mathcal{M}$, $1 \leq n \leq \mathcal{N}$. Este sistema se puede escribir formalmente como

$$F(\psi; \lambda) \equiv 0, \quad (3.49)$$

donde λ representa a los diferentes parámetros del problema y F es la matriz operador que resulta de la discretización. La ecuación (3.49) se puede resolver iterativamente usando un método de Newton. Una iteración de este método consiste en resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$F_\psi(\psi^i; \lambda) \delta\psi = -F(\psi^i; \lambda), \quad (3.50)$$

$$\psi^{i+1} = \psi^i + \delta\psi, \quad (3.51)$$

donde F_ψ es la matriz Jacobiana (el elemento (j, k) de esta matriz es $F_{\psi_{j,k}} = \partial F_j / \partial \psi_k$ para $1 \leq j \leq \mathcal{M} \times \mathcal{N}$, $1 \leq k \leq \mathcal{M} \times \mathcal{N}$). Si se utiliza una solución inicial lo suficientemente buena ψ^0 , las sucesivas aplicaciones de la iteración de Newton resultará en la convergencia de ψ^i a la solución final ψ . En los tres casos se ha usado el flujo a la entrada como solución inicial, lo que hace bastante rápida la convergencia del método. Típicamente se puede encontrar una solución en pocas iteraciones puesto que la convergencia del método es cuadrática (para el caso (a) el sistema es lineal y únicamente es necesaria una iteración para alcanzar la solución final). En lo que se refiere a los valores de ξ_1 y ξ_2 que se pueden

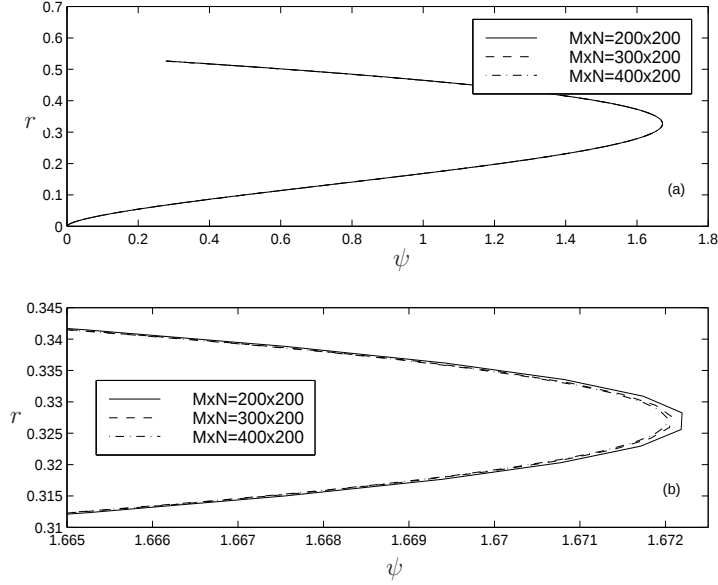


Figura 3.4: Perfiles radiales de la función de corriente $\psi(r)$ para el caso (a) y $L = 3$ justo detrás del cuerpo central ($\xi = 0,05025$) para los tres mallados diferentes indicados. En la figura (a) se ha mostrado el perfil en su totalidad para $0 \leq r \leq R_p$, mientras que en la (b) se muestra un detalle cerca del máximo de ψ .

utilizar, estos deben de ser lo suficientemente grandes como para que las paredes interna y externa del conducto sean paralelas al eje de simetría en las regiones entrada y salida. Como se muestra en la figura 3.1, estos valores se deben aumentar (particularmente ξ_1) cuando α disminuye. Para asegurar que el conducto es uniforme tanto a la entrada como a la salida para una variedad de valores de α , se ha usado $\xi_1 = 10$ y $\xi_2 = 10$ en todos los cálculos numéricos. Además, también se fija $R = 0,85$ y $R_p = \sqrt{1 - R^2} = 0,526783$ (ver figura 3.3 para los correspondientes valores asintóticos de L_r y L_f para los tres casos). Con esta geometría, una malla de 300×200 puntos fue suficiente para alcanzar una precisión de al menos cuatro dígitos significativos en todos los resultados que en esta sección se presentarán. Para ilustrar la convergencia del método, en la figura 3.4 se muestra el perfil radial de la función de corriente justo detrás del cuerpo central, donde los gradientes radiales son mayores, para tres mallados diferentes. Solamente el perfil correspondiente al mallado de 200×200 es ligeramente diferente en una pequeña región cerca del máximo de ψ [ver figura 3.4(b)], mientras que para los otros dos mallados los perfiles prácticamente colapsan.

En primer lugar se considerará el caso en el que el parámetro geométrico α es igual

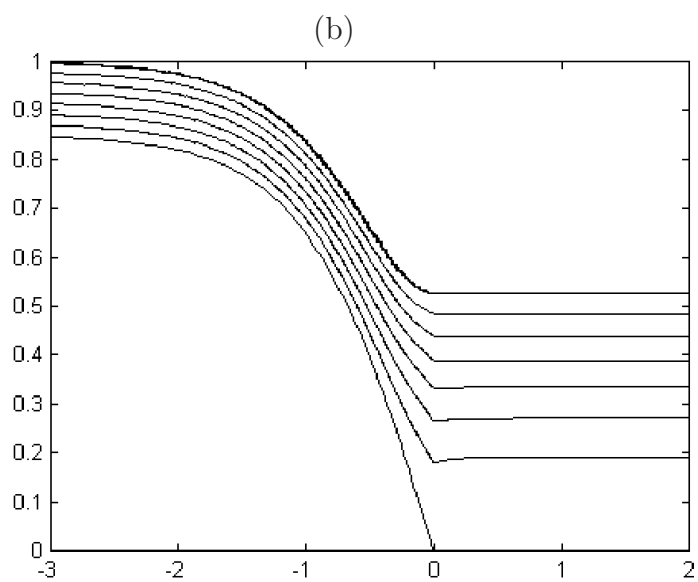
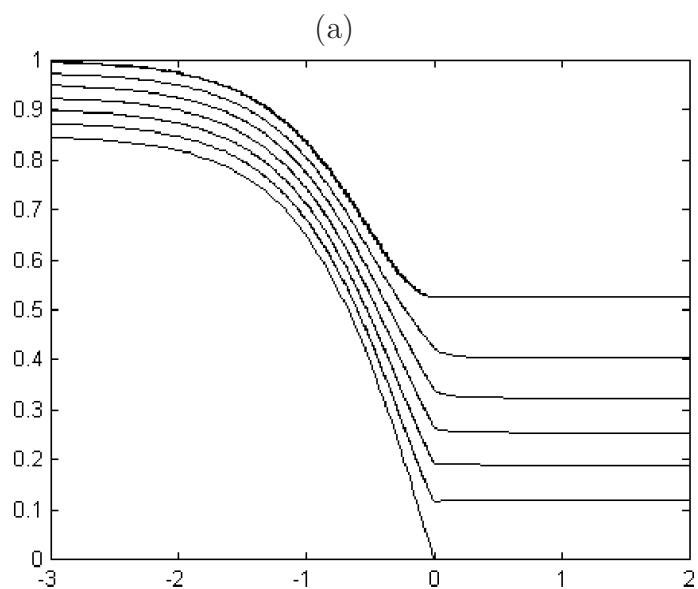


Figura 3.5(a)–(b): Para pie de figura ver página siguiente

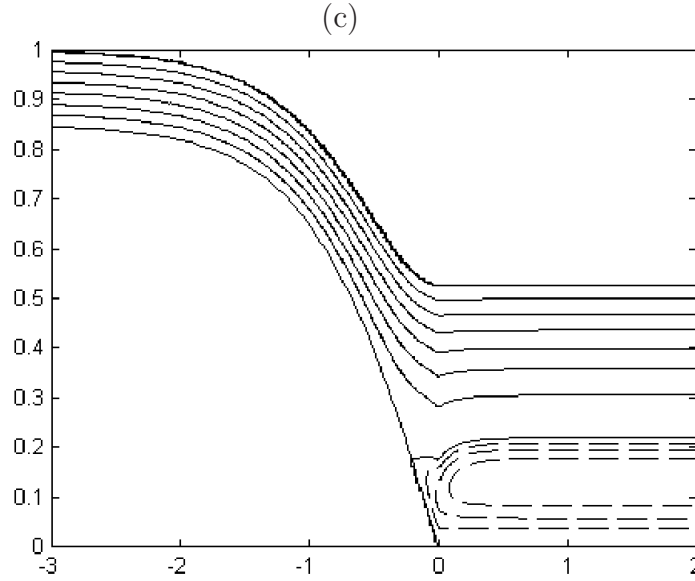


Figura 3.5: Líneas de corriente cuando $L < L_r$ para los tres casos de flujo de entrada considerados. Caso (a): figura 3.5(a) para $L = 1$; caso (b): figura 3.5(b) para $L = 0,25$ y caso (c): figura 3.5(c) para $L = 0,8$. Las líneas a trazos corresponden a $\psi < 0$.

a la unidad. En las figuras 3.5(a), (b) y (c) se muestran, para los tres tipos de flujos usados a la entrada (a), (b) y (c), las líneas de corriente obtenidas numéricamente para un valor de L menor que L_r . Nótese que una región de flujo inverso se forma en el eje para el caso (c). Esta configuración ocurre incluso cuando el parámetro de giro es prácticamente despreciable, es decir, $L \rightarrow 0$. Para L mayor que L_r y menor que L_f , una región de flujo inverso se forma cerca de la pared externa del conducto, como se puede apreciar en la figura 3.6(a) y (b) (excepto para el caso (c), para el que $L_r < L_f$ y la solución no se muestra aquí). Finalmente, cuando L es mayor que L_f , la estructura del flujo cambia dramáticamente, apareciendo un flujo periódico con varias burbujas de flujo recirculando en su interior, como se puede ver en la figura 3.7 para el caso (a) (para los otros dos casos (b) y (c) el método iterativo no converge cuando $L > L_f$). Claramente, para $L > L_f$, el flujo no tiene estructura cilíndrica aguas abajo, como ya fue predicho por el análisis asintótico realizado en la sección anterior. Si se continúa aumentando el valor de L , se observan nuevos cambios en la estructura del flujo aguas abajo cuando se superan cada uno de los L_{f_n} dados por la solución asintótica (ver Chow, 1969, para resultados cualitativamente similares en un conducto de geometría diferente).

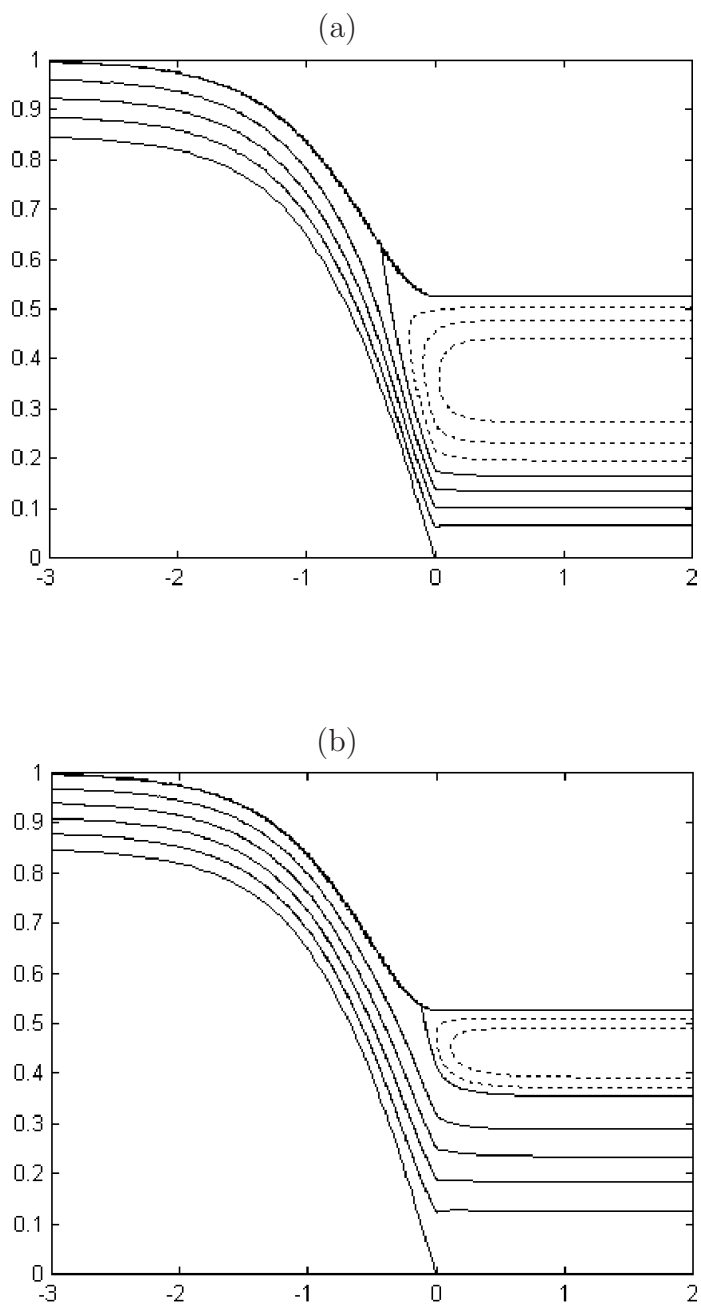


Figura 3.6: Líneas de corriente cuando $L < L_r < L_f$ para los casos (a): figura 3.6(a), con $L = 2$ y (b): figura 3.6(b), con $L = 0,8$. Las líneas punteadas corresponden a $\psi > (1 - R^2)$.

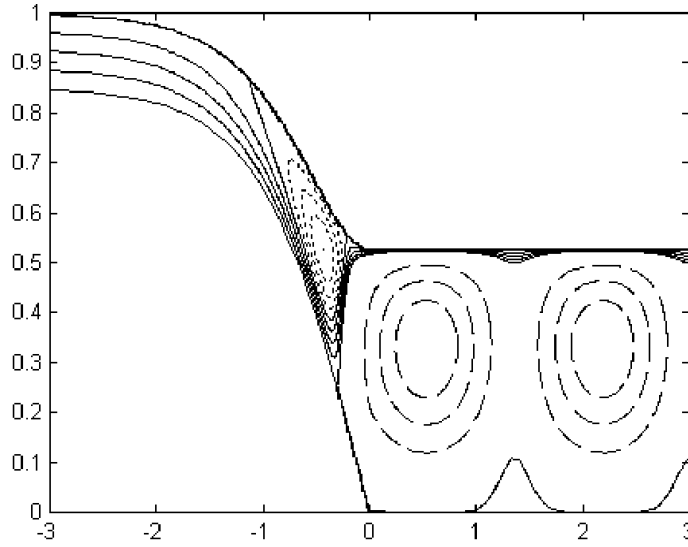


Figura 3.7: Líneas de corriente para el caso (a) cuando $L = 4,1 > L_f^{(a)}$. Las líneas a trazos corresponden a $\psi < 0$ y las punteadas a $\psi > (1 - R^2)$.

En las figuras 3.8–3.10 se compara la solución asintótica anteriormente obtenida con los resultados numéricos. En particular, la figura 3.8 muestra la variación radial de la función de corriente a la salida del conducto ($\xi = \xi_2 = 10$) para $L < L_r$, mientras que la figura 3.9 para $L > L_r$ [sólo para los casos (a) y (b)] y la figura 3.10 para $L > L_f$ [solamente para el caso (a)]. Como era de esperar, el acuerdo es excelente cerca del eje (r pequeño, límite en que se obtuvieron las soluciones asintóticas), pero se hace peor conforme se va alcanzando la pared exterior (nótese que el valor de $R_p = 0,526783$ para el radio exterior del conducto no es tan pequeño).

Con el fin de apreciar mejor las transformaciones del flujo aguas abajo cuando L aumenta, la figura 3.11 muestra la variación radial de la velocidad axial w a la salida del conducto obtenida numéricamente para diferentes valores de L y para el flujo de entrada de tipo (a). Se observa que, sin rotación a la entrada, $L = 0$, la velocidad axial es uniforme a lo largo de la sección de salida (su valor es la unidad por continuidad). Cuando se introduce una rotación en el flujo de entrada, la velocidad axial se hace singular en el eje, incluso para pequeños valores de L . El efecto de aumentar L hasta $L = L_f$ es acelerar el flujo cerca del eje de simetría y decelerarlo en la pared exterior, siendo ahí la velocidad cero cuando $L = L_r$, y negativa para $L_r < L \leq L_f$.

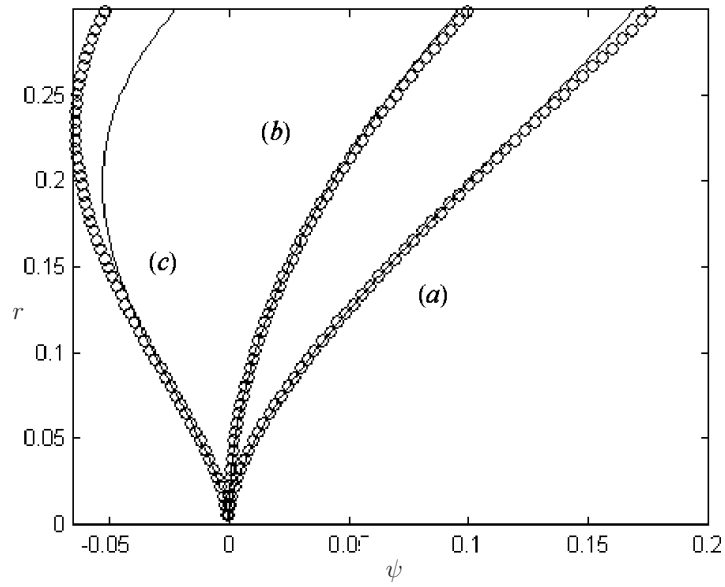


Figura 3.8: Perfil de la función de corriente a la salida del conducto ($\xi = 10$) obtenida numéricamente (línea continua) y asintóticamente (círculos) para los tres flujos de entrada considerados y con $L \leq L_r$: (a) $L = 1$, (b) $L = 0,25$, y (c) $L = 0,8$.

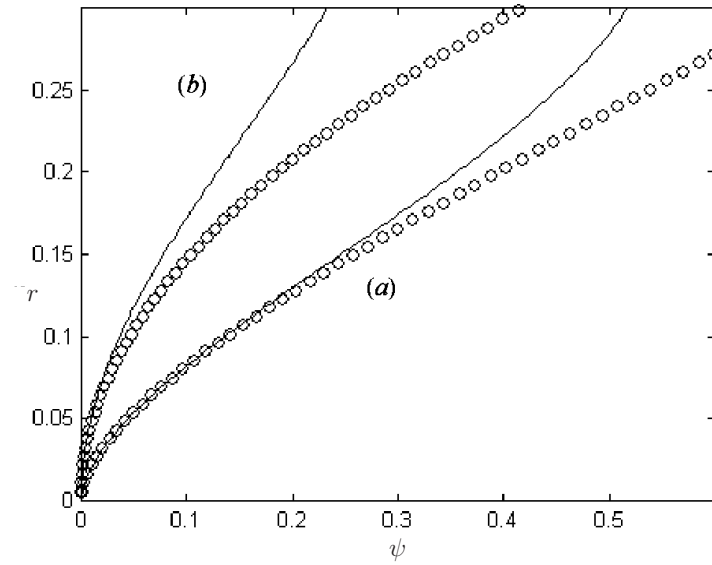


Figura 3.9: Como en la figura 3.8, pero para $L > L_r$ y los casos (a) ($L = 2$) y (b) ($L = 0,8$).

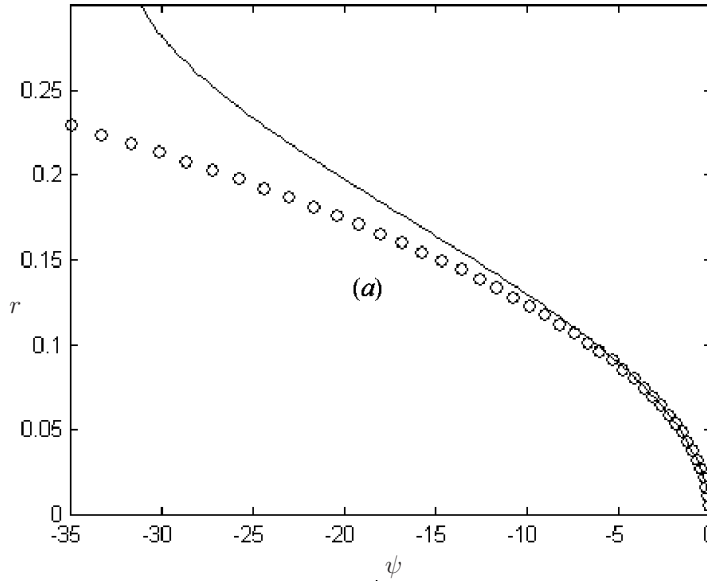


Figura 3.10: Como en la figura 3.8, pero para $L = 3,7 > L_f$ y sólo para el caso (a). Nótese que en este caso $\psi < 0$ y su valor absoluto es mucho mayor que en los casos previos debido a la estructura de burbuja que aparece aguas abajo.

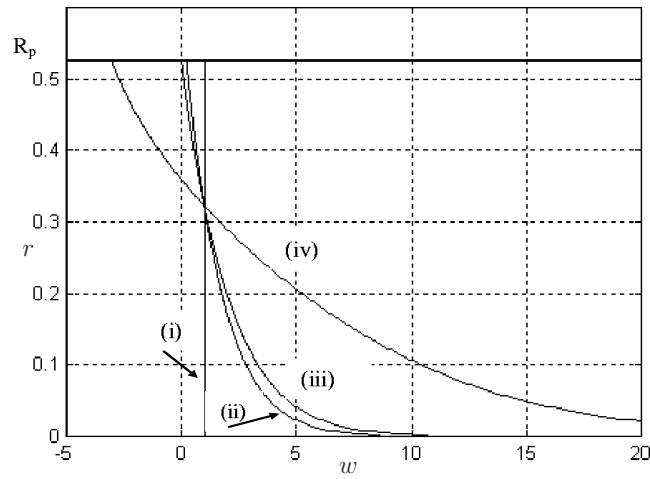


Figura 3.11: Perfiles de velocidad axial a la salida del conducto ($\xi = 10$) para (i) $L = 0$, (ii) $L = 1 < L_r$, (iii) $L = L_r \simeq 1,1246$, y (iv) $L = 2 > L_r$, en el caso de un flujo de entrada de tipo (a).

Se ha mostrado que para el flujo a la entrada de tipo (c), siempre existe una región de flujo inverso en el eje para $L > 0$, con la línea de corriente $\psi = 0$ saliendo de algún punto del cuerpo central (ver figura 3.5). Sería interesante conocer si esta “burbuja” puede ser despegada de la pared interna cambiando la geometría del conducto, por ejemplo mediante una contracción–expansión del conducto en la sección justo detrás del cuerpo central. Para este fin se considerará a continuación una sección interna $\mathcal{S}(\xi)$ del conducto diferente a la usada en los cálculos previos, con una región de contracción–expansión situada entre dos posiciones axiales ξ_a and ξ_b :

$$\mathcal{S}(\xi) = \mathcal{S}_0 = 1 - R^2 \quad \text{para} \quad -\xi_1 \leq \xi \leq \xi_a, \quad (3.52)$$

$$\mathcal{S}(\xi) = \mathcal{S}_0 + \frac{1}{2}\alpha_c \left(\cos\left(2\pi \frac{\xi - \xi_a}{\xi_b - \xi_a}\right) - 1 \right) \quad \text{para} \quad \xi_a < \xi \leq \xi_b, \quad (3.53)$$

$$\mathcal{S}(\xi) = \mathcal{S}_0 \quad \text{para} \quad \xi_b < \xi \leq \xi_2. \quad (3.54)$$

Así, el conducto tiene un mínimo en su sección $\mathcal{S}_0 - \alpha_c$ situado en $\xi_m = \frac{\xi_b + \xi_a}{2}$. Se han usado diferentes valores de ξ_a , ξ_b y α_c , y se ha encontrado que para cada región de contracción–expansión centrada en $\xi_m = 0$ (por ejemplo, $\xi_a = -2$ and $\xi_b = +2$), existe, para cada L , un factor de contracción $\alpha_c^*(L)$ por encima del cual la línea de corriente $\psi = 0$ se separa del cuerpo central. Por tanto, para $\alpha_c > \alpha_c^*(L)$, un punto de remanso se forma en alguna posición sobre el eje y una burbuja abierta de flujo inverso aparece tras él (ver figura 3.12).

Finalmente, también se ha estudiado la influencia de la longitud característica axial del cuerpo central α . En las figuras 3.13(a), (b) y (c), se muestran las líneas de corriente correspondientes al caso $\alpha = 2$ para un flujo de entrada del tipo (a) para tres valores distintos del parámetro L . Se observa que, en relación al conducto con $\alpha = 1$, solamente se producen pequeños cambios en el flujo en la región cercana a donde el cuerpo central termina. Como predijo el análisis asintótico, el flujo lejos aguas abajo es independiente de α , como puede verse también en la figura 3.14, en la que se comparan los perfiles de velocidad axial a la salida ($\xi = \xi_2$) para $\alpha = 1$ y $\alpha = 2$, que son indistinguibles.

3.5. Conclusiones y discusión

En este capítulo se ha analizado la influencia del flujo usado como condición de entrada en la evolución no viscosa de un flujo giratorio e incompresible dentro de un conducto

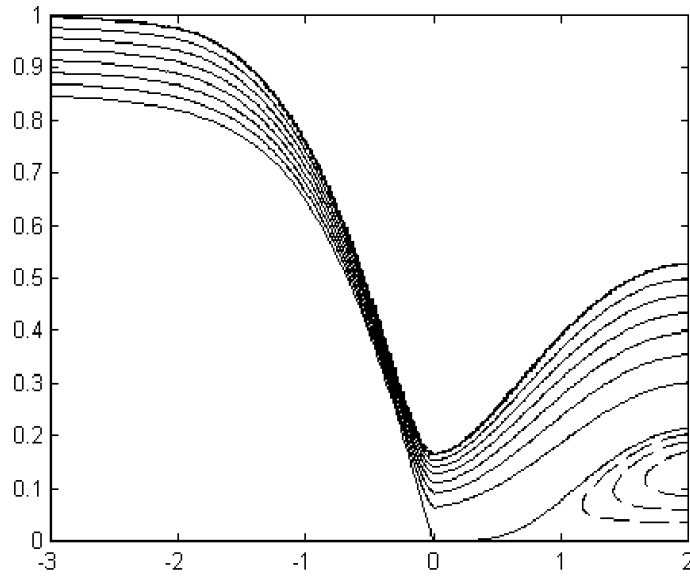


Figura 3.12: Líneas de corriente para el mismo caso mostrado en 3.5(c) pero con una región de contracción–expansión en el conducto centrada en $\xi_m = 0$, con $\xi_a = -2$, $\xi_b = 2$ y $\alpha_c = 0,25$. Las líneas a trazos corresponden a $\psi < 0$.

que tiene un cuerpo central en su interior, elemento éste presente en la mayoría de los generadores de giro, el cual normalmente concentra el giro en el eje del conducto. Se han considerado tres tipos de flujos aguas arriba, proporcionando “auténticos” perfiles de velocidad no viscosos justo detrás del cuerpo central, a la entrada del conducto. Dos de estos flujos son singulares en el eje de simetría y se corresponden con los casos de una rotación del cuerpo central con y sin rotación aguas arriba de la pared exterior [casos (a) y (c)], mientras que para el otro caso el flujo es regular en el eje, que se corresponde con una rotación de la pared exterior con el cuerpo central en reposo [caso (b)]. Las soluciones asintóticas y numéricas de la ecuación de Bragg–Hawthorne, que gobierna la evolución no viscosa del flujo giratorio y axilsimétrico en el conducto, muestran que la estructura del flujo aguas abajo cambia cuando el parámetro de giro L sobrepasa dos diferentes valores, los cuales dependen de la geometría del conducto y del flujo de entrada. Se ha mostrado que la dependencia respecto al flujo de entrada es no sólo cuantitativa, sino también cualitativa. En particular, el valor L_f por encima del cual el flujo aguas abajo no tiene simetría cilíndrica (el vórtice colocado a la entrada se rompe) depende fuertemente del flujo de entrada considerado. El caso de flujo de entrada (c), que corresponde al caso de cuerpo central girando y el exterior en reposo, es de particular interés porque la evolución

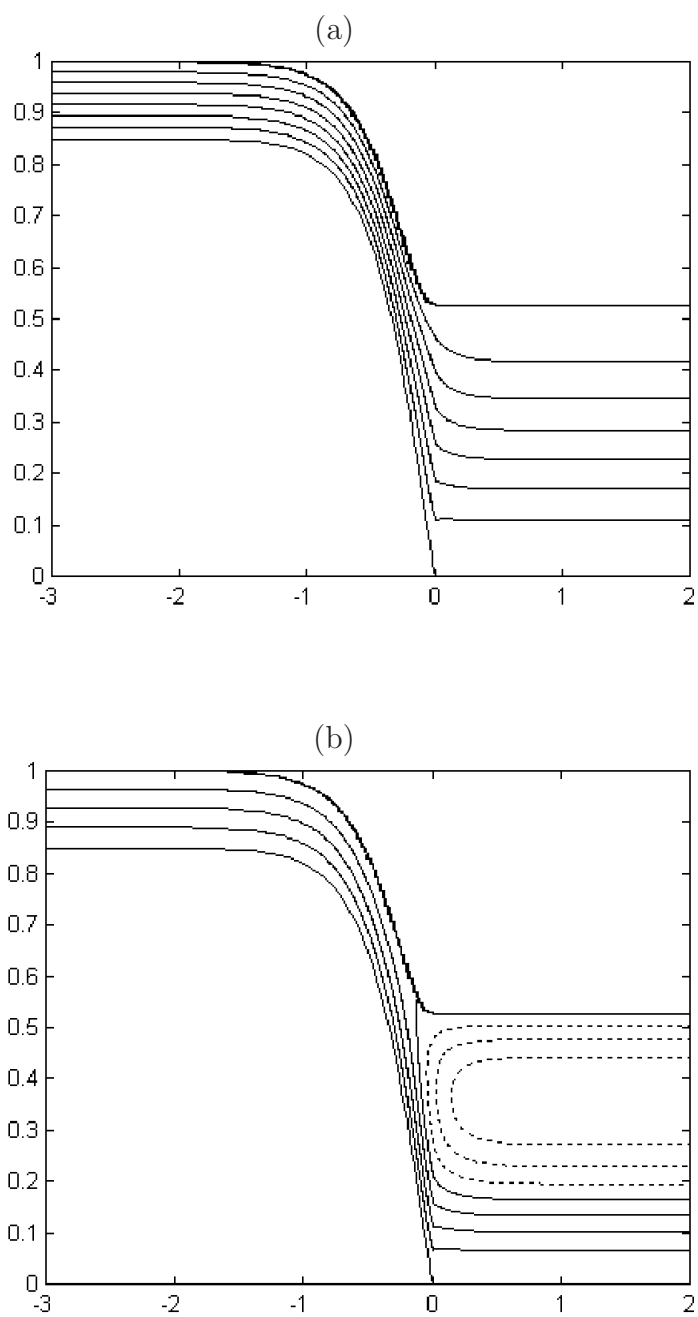


Figura 3.13: Para pie de figura ver página siguiente.

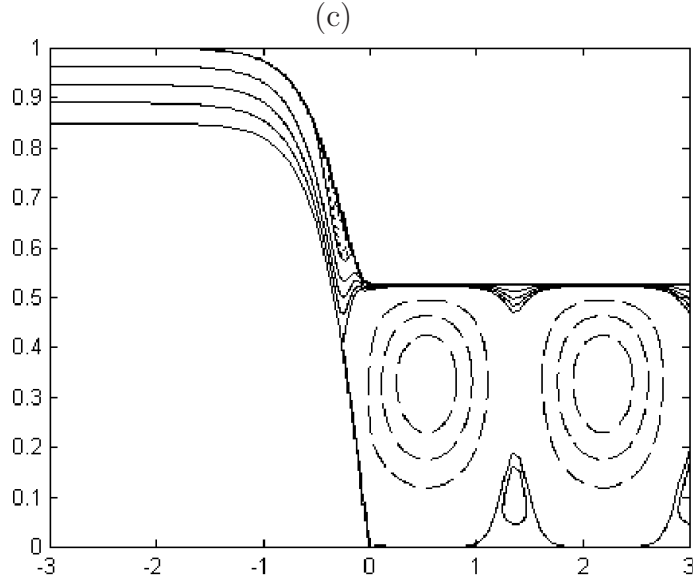


Figura 3.13: Líneas de corriente para un flujo de entrada de tipo (a) con $\alpha = 2$. Figura 3.13(a): para $L = 1$, como en la figura 3.5(a); figura 3.13(b): para $L = 2$, como en la figura 3.6(a), y figura 3.13: para $L = 4,1$, como en la figura 3.7. Las líneas a rayas corresponden a $\psi < 0$ y las punteadas a $\psi > (1 - R^2)$.

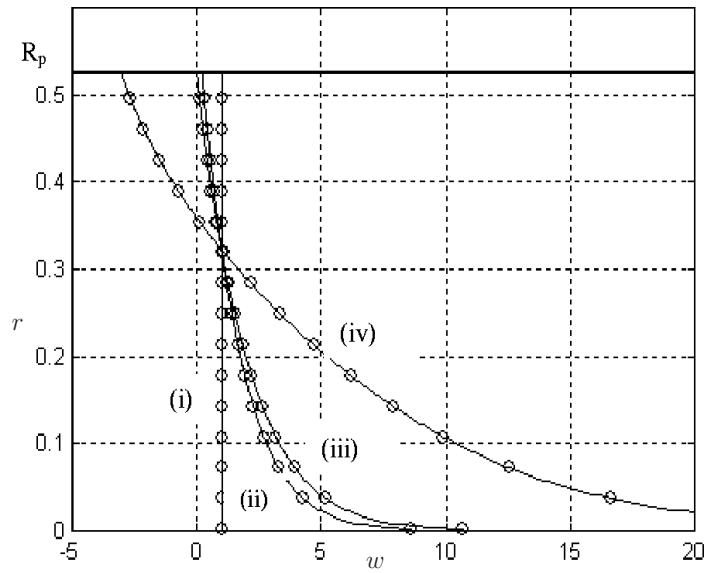


Figura 3.14: Comparación entre los perfiles de velocidad axial a la salida ($\xi = 10$) para el flujo de entrada de tipo (a) cuando $\alpha = 1$ (líneas) y $\alpha = 2$ (círculos), para los mismos valores de L de la figura 3.11.

no viscosa del flujo predice que siempre se formará una región de flujo inverso en el eje (siempre se produce la rotura del vórtice a la entrada), incluso cuando el parámetro de giro del flujo a la entrada es infinitesimal. Además, para este caso, el valor de L_r por encima del cual se forma una zona de flujo de recirculación en la pared exterior es mayor que L_f , con lo que, contrariamente a los otros dos casos, esta configuración con recirculación cerca de la pared externa nunca se alcanza en teoría. Para los otros dos casos considerados, $L_r < L_f$, con lo que, cuando L aumenta, la región de flujo inverso cerca de la pared siempre aparece antes de que el flujo deje de considerarse como cilíndrico aguas abajo. Todos estos resultados muestran que se debe tener cierta precaución antes de obtener conclusiones sobre el comportamiento de los flujos giratorios en conductos cuando únicamente se utilizan las ecuaciones no viscosas, particularmente sobre la rotura de vórtices.

Capítulo 4

Flujo viscoso en conductos de sección variable: código numérico y validación.

4.1. Introducción

En los capítulos anteriores se ha estudiado la evolución no viscosa de un flujo con giro en el interior de un conducto de geometría variable. En ellos se comprobó la importancia de tener bien definidas las condiciones de contorno a la entrada del conducto, y nos han mostrado la necesidad de resolver las ecuaciones completas (viscosas) si se quiere modelar con precisión la aparición del fenómeno de rotura de vórtices. Se vió (capítulo 2) como la evolución no viscosa de un vórtice singular en el eje de giro no desencadenaba en la rotura del mismo aguas abajo, mientras que si el estudio no viscoso se hacía sobre el mismo vórtice pero regularizado en el eje, sí se producía la rotura. En el otro estudio no viscoso realizado (capítulo 3) se analizó el efecto de tres flujos con giro distintos en la región aguas abajo de un conducto, siendo las estructuras que adquiriría el flujo muy dependientes de tipo vórtice de entrada. Esto nos lleva a plantear el problema viscoso y resolverlo en la misma geometría, para comparar así con los resultados no viscosos y ver si el considerar la viscosidad produce resultados tan diferentes como los obtenidos sin viscosidad.

Antes de abordar la geometría comentada, lo cual se hará en el capítulo siguiente, en este capítulo se van a describir las ecuaciones a resolver junto con los cambios de coordenadas introducidos, los métodos numéricos utilizados para resolver las ecuaciones y en las últimas secciones se presentará la validación del código numérico desarrollado mediante la comparación con otros trabajos previos existentes en la literatura, como son

los de Talbot (1954), Beran & Culik (1992), López (1994) y Darmofal (1996).

4.2. Ecuaciones. Formulación función de corriente–circulación–vorticidad

Para resolver el flujo en el interior de un conducto se van a escribir las ecuaciones que gobiernan el movimiento en su interior en coordenadas cilíndricas (r, θ, z) , y se considerará que son nulas las variaciones de las magnitudes fluidas respecto al ángulo θ , es decir, el flujo es axilsimétrico. Por tanto, las incógnitas a resolver serán las tres componentes del vector velocidad, $\mathbf{v} = (u, v, w)$, y la presión, p , que se obtendrán de la resolución de la ecuación de continuidad y de las tres ecuaciones de cantidad de movimiento. El número total de variables a resolver se reduce de las cuatro anteriores a sólo tres si se utiliza la formulación función de corriente–circulación–vorticidad. La ventaja de esta formulación frente a la formulación en “variables primitivas” de velocidad–presión está en que no hay que imponer condiciones de contorno para la presión. Ésta se obtendrá, si uno está interesado en calcularla, en una etapa final, una vez que se haya alcanzado el estado estacionario en las variables función de corriente, circulación y vorticidad. Tampoco se requiere la resolución de la ecuación de continuidad pues se cumple idénticamente por el uso de la función de corriente. La desventaja de esta formulación está en que hay que imponer condiciones de contorno para la vorticidad, aunque esto no supone una complicación excesiva.

Haciendo uso de la función de corriente para el movimiento meridional ψ (2.1) y de la circulación, $\Gamma = r v$, el vector velocidad en coordenadas cilíndricas se escribe

$$\mathbf{v} = (u, v, w) = \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \frac{\Gamma}{r}, \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right). \quad (4.1)$$

Por otro lado, las componentes del vector vorticidad, $\boldsymbol{\omega}$, definido como

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v} = (\omega_r, \omega_\theta, \omega_z), \quad (4.2)$$

vienen dadas por

$$\omega_r = -\frac{\partial v}{\partial z}, \quad (4.3a)$$

$$\omega_\theta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r}, \quad (4.3b)$$

$$\omega_z = \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r}. \quad (4.3c)$$

Usando la variable circulación, la podemos escribir como

$$\boldsymbol{\omega} = \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \Gamma}{\partial z}, \omega_\theta, \frac{1}{r} \frac{\partial \Gamma}{\partial r} \right). \quad (4.4)$$

Comparando (4.4) con (4.1) se observa que, en un plano meridional (r, z) , la circulación es al campo de vorticidad lo que la función de corriente al campo de velocidad: $\Gamma(r, z) = \text{constante}$ define las líneas de vorticidad constante en el plano (r, z) . Además, todo el campo de velocidad y de vorticidad quedará especificado resolviendo las variables $\psi - \Gamma - \omega_\theta$. Para ello se han de obtener las ecuaciones que nos permitan calcular estas variables.

Las tres ecuaciones de cantidad de movimiento en coordenadas cilíndricas para un problema axilsimétrico son:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} \right], \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{u v}{r} = \nu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{v}{r^2} \right], \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right], \quad (4.7)$$

donde ρ es la densidad y ν la viscosidad cinemática. Con el fin de que en las ecuaciones a resolver sólo aparezcan las incógnitas $\psi - \Gamma - \omega_\theta$, se va a eliminar la presión hallando la derivada parcial respecto a z de (4.5) y restándole la derivada parcial respecto a r de (4.7). La ecuación resultante se puede escribir haciendo uso de ψ y ω_θ (variable esta última que en lo que sigue mencionaremos como ω simplemente), quedando

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial z} + \frac{\omega}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} = \\ \frac{2\Gamma}{r^3} \frac{\partial \Gamma}{\partial z} + \nu \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{\omega}{r^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

La ecuación para la circulación se obtiene de multiplicar por r la ecuación (4.6):

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \Gamma}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \Gamma}{\partial z} = \nu \left[\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Gamma}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial z^2} \right]. \quad (4.9)$$

La tercera ecuación que cierra el problema se obtiene introduciendo la función de corriente en la definición de la componente azimutal de la vorticidad:

$$\omega = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (4.10)$$

Para simplificar la notación se va introducir la variable $\Pi = \omega r$, con lo que las ecuaciones (4.8), (4.9) y (4.10) que gobiernan el problema se van a escribir, respectivamente,

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \Pi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \Pi}{\partial z} + \frac{2\Pi}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{2\Gamma}{r^2} \frac{\partial \Gamma}{\partial z} + \nu \nabla^{*2} \Pi, \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \Gamma}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \Gamma}{\partial z} = \nu \nabla^{*2} \Gamma, \quad (4.12)$$

$$\Pi = -\nabla^{*2} \psi, \quad (4.13)$$

donde el operador ∇^{*2} se define como

$$\nabla^{*2} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}. \quad (4.14)$$

4.3. Geometría del conducto y condiciones de contorno

Una vez escritas las ecuaciones a resolver se define a continuación la geometría del conducto en la que se va realizar su integración numérica y se identifican sobre ella las condiciones de contorno.

Se va a utilizar un conducto muy general (ver figura 4.1), que incluye como caso particular el conducto usado en el capítulo 3, así como, obviamente, el conducto de sección uniforme. Las funciones $r_e(z)$ (pared externa) y $r_i(z)$ (pared interna) son conocidas, así como la longitud del cuerpo central interno, $\mathcal{L}_1 = e_1$, y la total del conducto, $\mathcal{L} = e_1 + e_2$, coincidiendo el origen del eje z con el final del cuerpo central.

Las condiciones de contorno que se implementarán en las diferentes regiones del contorno son las siguientes:

Región de entrada

En esta región se conocen los perfiles de velocidad axial, $w = w_{in}(r)$, de velocidad azimutal, $v = v_{in}(r)$, y se fija $\partial u / \partial z = 0$, dejando que el perfil de velocidad radial se adapte de forma libre a su valor a la entrada de acuerdo con esta condición. Usando las variables $\psi - \Gamma - \Pi$, estas condiciones se escriben

$$\psi = \psi_{in}(r), \quad \Gamma = \Gamma_{in}(r), \quad \Pi = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad \text{en } z = -e_1, \quad r_i(-e_1) \leq r \leq r_e(-e_1). \quad (4.15)$$

Región de salida

En esta región se considerará que el flujo posee simetría cilíndrica (condición primeramente

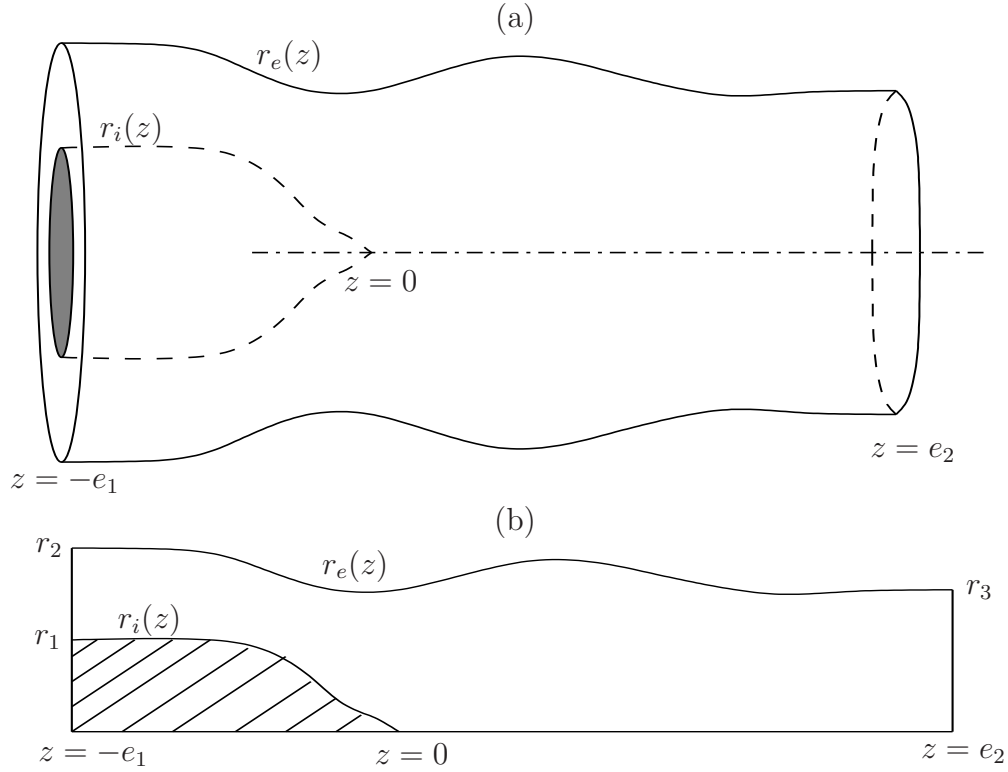


Figura 4.1: Geometría genérica tridimensional (a) y plano de trabajo (b) para un flujo axilsimétrico.

usada por Hall, 1972, y posteriormente también por Darmofal, 1996), con lo que las condiciones de contorno se escriben

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{en} \quad z = e_2, \quad 0 \leq r \leq r_e(e_2). \quad (4.16)$$

Paredes sólidas

En las paredes $r = r_e(z)$ y $r = r_i(z)$ la velocidad del fluido es la de la pared. Las componentes radial y axial serán siempre nulas, $u = w = 0$. Sin embargo, la componente azimutal puede ser no nula si el conducto gira con una cierta velocidad angular conocida Ω . En particular, dividiremos la pared superior en dos partes: una que puede o no girar ($-e_1 \leq z < 0$) y otra que no gira ($0 \leq z \leq e_2$). La pared del cuerpo central también podrá girar en su totalidad, o no girar.

En las variables $\psi - \Gamma - \Pi$, estas condiciones de contorno son:

En $r = r_e(z)$, $-e_1 \leq z < 0$:

$$\psi = \psi_{in}(r_{ei}), \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \quad \Gamma = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \Omega r^2 \end{array} \right\}, \quad \Pi = - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right). \quad (4.17)$$

En $r = r_e(z)$, $0 \leq z \leq e_2$:

$$\psi = \psi_{in}(r_{ei}), \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \quad \Gamma = 0, \quad \Pi = - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right). \quad (4.18)$$

En $r = r_i(z)$, $-e_1 \leq z < 0$:

$$\psi = \psi_{in}(r_{ii}), \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \quad \Gamma = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \Omega r^2 \end{array} \right\}, \quad \Pi = - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right), \quad (4.19)$$

donde $r_{ei} \equiv r_e(-e_1)$ y $r_{ii} \equiv r_i(-e_1)$.

Eje de simetría

En el eje de simetría del conducto ($r = 0$) la velocidad radial es nula, $u = 0$, lo cual implica que la función de corriente debe ser constante sobre el eje. La velocidad axial w debe ser regular, lo que requiere que $\partial \psi / \partial r|_{r=0} = 0$. En general, el vector velocidad debe cumplir la condición de simetría $\partial \mathbf{v} / \partial r|_{r=0} = 0$, lo cual implica, junto con $u = 0$, que $\Pi = 0$. Por último, la velocidad azimutal sobre el eje es nula. Resumiendo, estas condiciones las podemos escribir como

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \quad \Gamma = 0, \quad \Pi = 0, \quad \text{en } r = r_i(z), \quad 0 \leq z \leq e_2. \quad (4.20)$$

4.4. Variables adimensionales

Antes de resolver numéricamente las ecuaciones se va a pasar a adimensionalizarlas. Como velocidad característica se va a usar U , que es una velocidad axial representativa a la entrada del conducto, y como longitud radial característica el radio del conducto exterior a la entrada r_{ei} . Como longitud axial característica se usará una fracción de r_{ei} , r_{ei}/α . Las magnitudes adimensionales son, por tanto,

$$\tilde{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{U}, \quad \tilde{r} = \frac{r}{r_{ei}}, \quad \tilde{z} = \frac{z}{r_{ei}/\alpha}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{r_{ei}/U}, \quad (4.21)$$

$$\tilde{\psi} = \frac{\psi}{U r_{ei}^2}, \quad \tilde{\Gamma} = \frac{\Gamma}{U r_{ei}}, \quad \tilde{\Pi} = \frac{\Pi}{U}, \quad \tilde{\nabla}^{*2} = \frac{\nabla^{*2}}{1/r_{ei}^2}. \quad (4.22)$$

Esta adimensionalización es diferente a la usada en (3.3) y (3.5) con el fin de que no aparezca el parámetro α en la definición de la geometría, y para que el parámetro de giro L aparezca en la definición de los perfiles de velocidad azimutal a la entrada y no en las ecuaciones que gobiernan el problema. En casi todos los resultados que se mostrarán en lo que sigue se ha utilizado un valor de α igual a la unidad, teniéndose, por tanto, el radio

exterior de entrada del conducto como única longitud característica. Sólo se indicará el valor de α cuando sea distinto de la unidad. Las longitudes adimensionales del cuerpo central interno y del conducto uniforme son

$$\tilde{e}_1 = \frac{e_1}{r_{ei}/\alpha} \quad \text{y} \quad \tilde{e}_2 = \frac{e_2}{r_{ei}/\alpha}, \quad (4.23)$$

respectivamente.

Con estas variables así definidas, las ecuaciones de Navier Stokes (4.11)–(4.13) adimensionales, prescindiendo de “ $\sim$ ” por simplicidad y usando subíndices para indicar diferenciación respecto a la variable indicada, son:

$$\begin{aligned} \Pi_t + \frac{\alpha}{r} \psi_r \Pi_z - \frac{\alpha}{r} \psi_z \Pi_r + \frac{2\alpha}{r^2} \psi_z \Pi = \\ \frac{2\alpha}{r^2} \Gamma \Gamma_z + \frac{1}{Re} \nabla^{*2} \Pi, \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\Gamma_t + \frac{\alpha}{r} \psi_r \Gamma_z - \frac{\alpha}{r} \psi_z \Gamma_r = \frac{1}{Re} \nabla^{*2} \Gamma, \quad (4.25)$$

$$\nabla^{*2} \psi = -\Pi \quad (4.26)$$

donde

$$\nabla^{*2} = \alpha^2 \partial_{zz} + \partial_{rr} - \frac{1}{r} \partial_r$$

y Re es el número de Reynolds, dado por

$$Re = \frac{U r_{ei}}{\nu}.$$

Las condiciones de contorno (4.15)–(4.20) en variables adimensionales se escriben:

Región de entrada

$$\psi = \psi_{in}(r), \quad \Gamma = \Gamma_{in}(r), \quad \Pi = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad \text{en} \quad z = -e_1, \quad r_{ii} \leq r \leq r_{ei}, \quad (4.27)$$

Región de salida

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} = 0, \quad \text{en} \quad z = e_2, \quad 0 \leq r \leq r_e(e_2), \quad (4.28)$$

Paredes sólidas

En $r = r_e(z)$, $-e_1 \leq z < 0$:

$$\psi = \psi_{in}(r_{ei}), \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \quad \Gamma = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ L r^2 \end{array} \right\}, \quad \Pi = -\left(\alpha^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right). \quad (4.29)$$

En $r = r_e(z)$, $0 \leq z \leq e_2$:

$$\psi = \psi_{in}(r_{ei}), \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \quad \Gamma = 0, \quad \Pi = - \left(\alpha^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right). \quad (4.30)$$

En $r = r_i(z)$, $-e_1 \leq z < 0$:

$$\psi = \psi_{in}(r_{ii}), \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \quad \Gamma = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ L r^2 \end{array} \right\}, \quad \Pi = - \left(\alpha^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right). \quad (4.31)$$

Eje de simetría

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \quad \Gamma = 0, \quad \Pi = 0, \quad \text{en } r = r_i(z) \quad 0 \leq z \leq e_2. \quad (4.32)$$

El parámetro de giro L se ha definido como

$$L = \frac{\Omega r_{ei}}{U},$$

y representa, al igual que el definido en (3.6), la relación entre las velocidades azimutal y axial características.

4.5. Cambio de coordenadas

Para poder resolver numéricamente las ecuaciones de Navier Stokes en la geometría mostrada en la figura 4.1 es conveniente transformar esa geometría irregular en otra rectangular. Esto se hará introduciendo el mismo cambio de coordenadas que se utilizó en §3.4, ecuación (3.44):

$$\eta = \frac{r - r_i(z)}{r_e(z) - r_i(z)}, \quad \xi = z, \quad (4.33)$$

que transforma el dominio físico inicial

$$r_i(z) \leq r \leq r_e(z), \quad -e_1 \leq z \leq e_2, \quad (4.34)$$

en el dominio computacional rectangular

$$0 \leq \eta \leq 1, \quad -\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2, \quad (4.35)$$

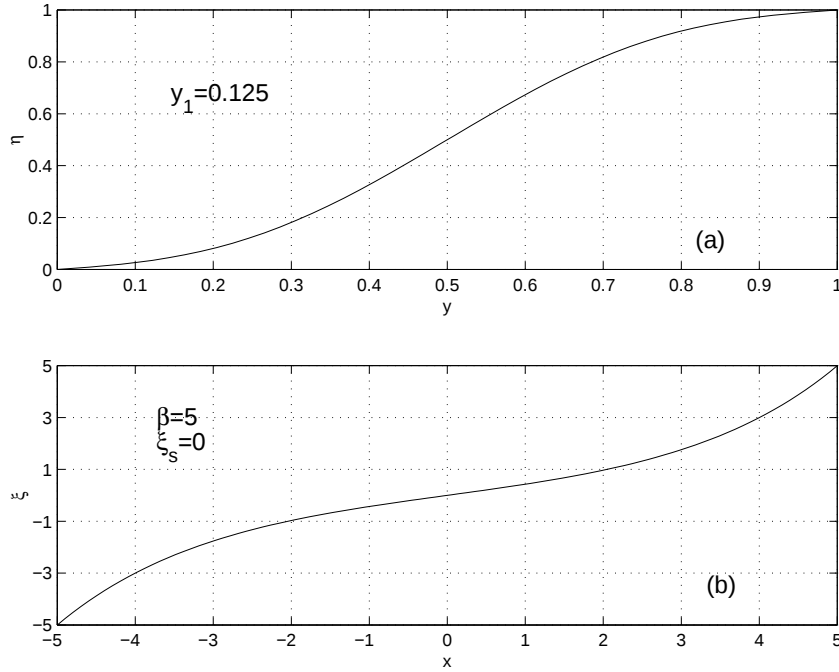


Figura 4.2: Coordenadas (x, y) en función de (ξ, η) para los valores de y_1 , β y ξ_s especificados.

con $\xi_1 = e_1$ y $\xi_2 = e_2$. Para escribir las ecuaciones y sus condiciones de contorno en estas nuevas coordenadas, se hará uso de la regla de la cadena:

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial r}, \quad (4.36a)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad (4.36b)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} = \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial r} \right)^2, \quad (4.36c)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2}, \quad (4.36d)$$

donde se ha sustituido $\partial \xi / \partial z = 1$.

Antes de escribir la forma final de las ecuaciones y de las condiciones de contorno en las nuevas coordenadas se va a introducir un nuevo cambio de coordenadas que permita concentrar los nodos de la discretización en determinadas zonas del dominio computacional en las que se requiere una mayor precisión en los resultados. En la dirección η se concentrarán los puntos cerca de $\eta = 0$ ($r = r_i$) y de $\eta = 1$ ($r = r_e$), mientras que el de la dirección ξ se concentrarán en el entorno de una posición axial determinada, $\xi = \xi_s$ ($z = \xi_s$). El nuevo sistema de coordenadas (x, y) está relacionado con el (ξ, η) mediante

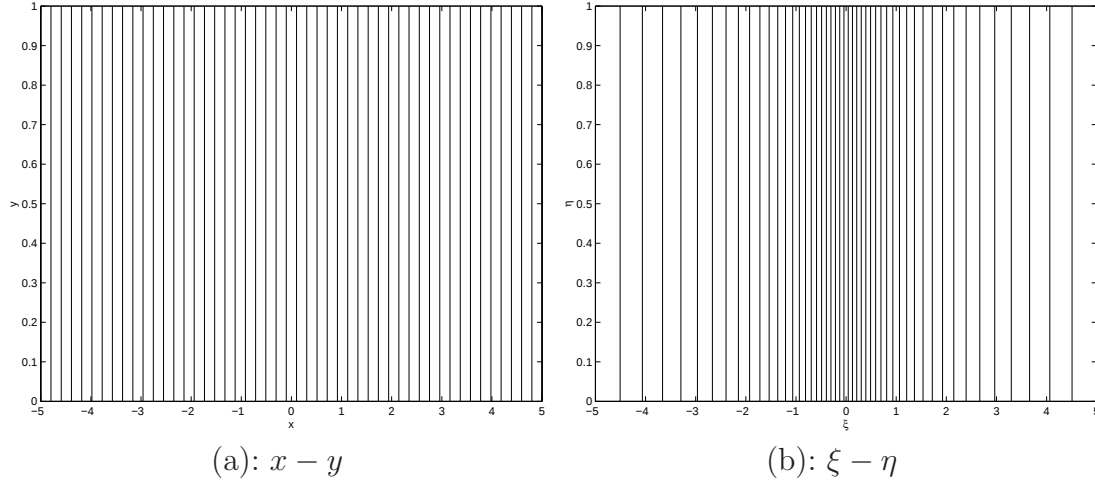


Figura 4.3: (a): Distribución uniforme en la coordenada x . (b): Distribución no uniforme en ξ según (4.38) para un factor de escala de $\beta = 5$.

las relaciones

$$\eta = y - y_1 \sin(2\pi y), \quad (4.37)$$

$$\xi = \frac{x_0 (\xi_1 + \xi_2)}{A} \left[\sinh \left\{ \left(\frac{x + \xi_1}{\xi_1 + \xi_2} - \xi_0 \right) \beta \right\} + A \right] - \xi_1, \quad (4.38)$$

donde

$$x_0 = \frac{\xi_s + \xi_1}{\xi_1 + \xi_2}, \quad (4.39)$$

$$\xi_0 = \frac{1}{2\beta} \ln \left[\frac{1 + x_0 (e^\beta - 1)}{1 + x_0 (e^{-\beta} - 1)} \right], \quad (4.40)$$

$$A = \sinh(\beta \xi_0). \quad (4.41)$$

Los parámetros β e y_1 son los factores de concentración de nodos y ξ_s es la posición axial en torno a la cual se concentrarán los nodos. Las ecuaciones de transferencia (4.37) y (4.38) están dibujadas en la figura 4.2 para valores concretos de y_1 , β y ξ_s . Una discretización uniforme en x e y [figuras 4.3(a) y 4.4(a)] dará lugar a una discretización no uniforme en ξ y η [figuras 4.3(b) y 4.4(b)], con una concentración de puntos entorno a ξ_s para la dirección axial y cerca de $\eta = 0$ y $\eta = 1$ para la dirección radial, estando el grado de concentración de nodos controlado por β e y_1 .

Las relaciones entre las derivadas parciales en (ξ, η) y las derivadas parciales en (x, y)

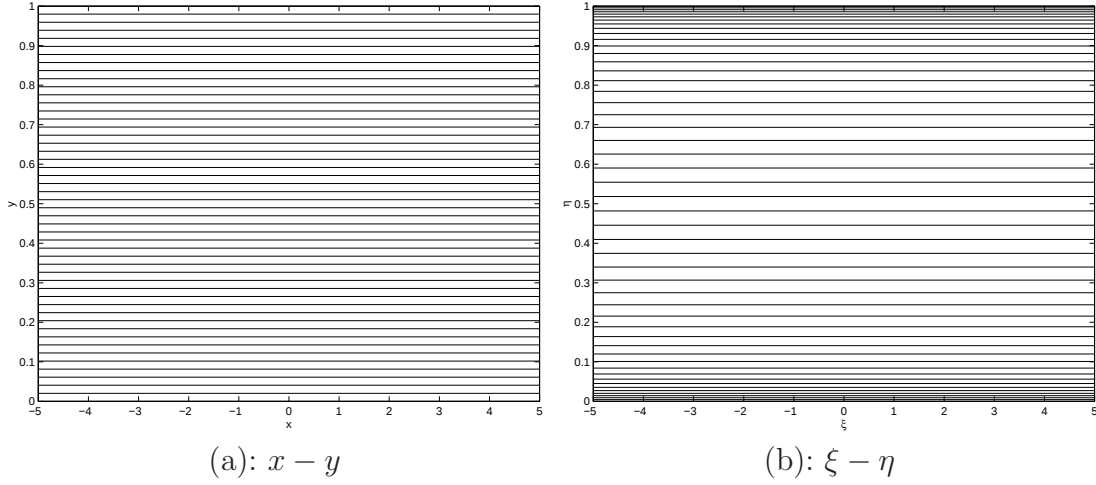


Figura 4.4: (a): Distribución uniforme en la coordenada y . (b): Distribución no uniforme en η según (4.37) para un factor de stretching de $y_1 = 0,125$.

son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \eta} &= \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\eta_y}, \\
 \frac{\partial}{\partial \xi} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\xi_x}, \\
 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{\xi_x^2} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\xi_{xx}}{\xi_x^3}, \\
 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{1}{\eta_y^2} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\eta_{yy}}{\eta_y^3},
 \end{aligned}$$

donde los subíndices indican, como siempre, diferenciación y donde se ha hecho uso de

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^{-1} = \frac{1}{\eta_y}, \quad (4.43a)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^{-1} = -\frac{\eta_{yy}}{\eta_y^2}, \quad (4.43b)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^{-1} = \frac{1}{\xi_x}, \quad (4.43c)$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^{-1} = -\frac{\xi_{xx}}{\xi_x^2}. \quad (4.43d)$$

Por tanto, con las transformaciones (4.36) y (4.43), las ecuaciones (4.24)–(4.26) se escriben

en las coordenadas (x, y) , como:

$$\begin{aligned} \Pi_t + \frac{\alpha\eta_r}{r\eta_y\xi_x}\psi_y\Pi_x - \frac{\alpha\eta_r}{r\eta_y\xi_x}\psi_x\Pi_y + \frac{2\alpha}{r^2}\Pi\left(\frac{\psi_x}{\xi_x} + \frac{\eta_z}{\eta_y}\psi_y\right) \\ = \frac{2\alpha}{r^2}\Gamma\left(\frac{\Gamma_x}{\xi_x} + \frac{\eta_z}{\eta_y}\Gamma_y\right) + \frac{1}{Re}\nabla_{xy}^{*2}\Pi, \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\Gamma_t + \frac{\alpha\eta_r}{r\eta_y\xi_x}\psi_y\Gamma_x - \frac{\alpha\eta_r}{r\eta_y\xi_x}\psi_x\Gamma_y = \frac{1}{Re}\nabla_{xy}^{*2}\Gamma, \quad (4.45)$$

$$\nabla_{xy}^{*2}\psi = -\Pi, \quad (4.46)$$

donde

$$\begin{aligned} \nabla_{xy}^{*2} = \frac{\alpha^2}{\xi_x^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\alpha^2\xi_{xx}}{\xi_x^3}\frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{\alpha^2\eta_z^2 + \eta_r^2}{\eta_y^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ + \left[\frac{\alpha^2\eta_{zz} + \eta_r/r}{\eta_y} - \frac{\eta_{yy}}{\eta_y^3}(\alpha^2\eta_z^2 + \eta_r^2)\right]\frac{\partial}{\partial y} + 2\frac{\alpha^2\eta_z}{\eta_y\xi_x}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

En cuanto a las condiciones de contorno (4.27)–(4.32), en las coordenadas (x, y) son:

Región de entrada

$$\psi = \psi_{in}(y), \quad \Gamma = \Gamma_{in}(y), \quad \Pi = -\frac{\eta_r^2}{\eta_y^2}\psi_{yy} + \left[\frac{\eta_r}{r\eta_y} - \frac{\eta_{yy}}{\eta_y^3}\eta_r^2\right]\psi_y, \quad \text{en } x = -x_1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (4.48)$$

Región de salida

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\psi_{xx}}{\xi_x^2} - \psi_x \frac{\xi_{xx}}{\xi_x^3} + \frac{2\eta_z}{\eta_y\xi_x}\psi_{xy} + \frac{\eta_z^2}{\eta_y^2}\psi_{yy} + \frac{\eta_{zz}}{\eta_y}\psi_y = 0 \\ \frac{\Pi_{xx}}{\xi_x^2} - \Pi_x \frac{\xi_{xx}}{\xi_x^3} + \frac{2\eta_z}{\eta_y\xi_x}\Pi_{xy} + \frac{\eta_z^2}{\eta_y^2}\Pi_{yy} + \frac{\eta_{zz}}{\eta_y}\Pi_y = 0 \\ \frac{\Gamma_{xx}}{\xi_x^2} - \Gamma_x \frac{\xi_{xx}}{\xi_x^3} + \frac{2\eta_z}{\eta_y\xi_x}\Gamma_{xy} + \frac{\eta_z^2}{\eta_y^2}\Gamma_{yy} + \frac{\eta_{zz}}{\eta_y}\Gamma_y = 0 \end{array} \right\} \quad \text{en } x = x_2, \quad 0 \leq y \leq 1. \quad (4.49)$$

Paredes sólidas

En $y = 1, -x_1 \leq x < 0$:

$$\psi = \psi_{in}(r_{ei}), \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0, \quad \Gamma = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ Lr_e^2 \end{array} \right\}, \quad \Pi = -\left(\frac{\alpha^2\eta_z^2 + \eta_r^2}{\eta_y^2}\right)\psi_{yy}. \quad (4.50)$$

En $y = 1, 0 \leq x \leq x_2$:

$$\psi = \psi_{in}(r_{ei}), \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0, \quad \Gamma = 0, \quad \Pi = -\left(\frac{\alpha^2\eta_z^2 + \eta_r^2}{\eta_y^2}\right)\psi_{yy}. \quad (4.51)$$

En $y = 0, -x_1 \leq x < 0$:

$$\psi = \psi_{in}(r_{ii}), \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0, \quad \Gamma = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ Lr^2 \end{array} \right\}, \quad \Pi = -\left(\frac{\alpha^2\eta_z^2 + \eta_r^2}{\eta_y^2}\right)\psi_{yy}. \quad (4.52)$$

Eje de simetría

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad \Gamma = 0, \quad \Pi = 0 \quad \text{en} \quad y = 0 \quad 0 \leq x \leq x_2. \quad (4.53)$$

La condición de contorno a la salida se simplifica en las geometrías que se van a utilizar, en donde $r_e(z)$ tiende asintóticamente a un valor constante. Esto quiere decir que en $z = e_2$ ($\xi = \xi_2$, $x = x_2$), $\eta_z = \eta_{zz} = 0$, con lo que la condición de contorno (4.49) se simplifica a:

Región de salida

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_{xx} \frac{1}{\xi_x^2} - \psi_x \frac{\xi_{xx}}{\xi_x^3} = 0 \\ \Pi_{xx} \frac{1}{\xi_x^2} - \Pi_x \frac{\xi_{xx}}{\xi_x^3} = 0 \\ \Gamma_{xx} \frac{1}{\xi_x^2} - \Gamma_x \frac{\xi_{xx}}{\xi_x^3} = 0 \end{array} \right\} \quad \text{en} \quad x = x_2, \quad 0 \leq y \leq 1. \quad (4.54)$$

4.6. Resolución numérica

A continuación se pasa a describir los métodos numéricos implementados para resolver el problema planteado.

Con los cambios de coordenadas introducidos en la sección anterior se ha transformado el dominio físico inicial en el dominio computacional rectangular en el que se van a resolver las ecuaciones (4.44)–(4.46) con las correspondientes condiciones de contorno. Estas ecuaciones y condiciones de contorno escritas en las coordenadas (x, y) se van a discretizar utilizando la aproximación FTCS (del inglés *Forward Time Centered Space*), que consiste en aproximar las derivadas espaciales mediante diferencias finitas centradas de segundo orden y las temporales con aproximaciones hacia delante de segundo orden.

Sea $f = f(x, y, t)$, una variable determinada del problema (ψ, Π, Γ) ,. Utilizando el índice i para recorrer el dominio discreto computacional en la dirección x (espaciado entre nodos uniforme dado por Δx), el j para la dirección y (espaciado también uniforme y dado por Δy), e indicando con n el instante temporal (con Δt el espaciado en la variable tiempo), un punto (i, j) del dominio en el instante n se indicará con $f_{i,j}^n$. Usando esta notación, la aproximación FTCS de las distintas derivadas que aparecen en las ecuaciones

evaluadas en el punto (i, j) y en el instante n se escriben:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_{i+1,j}^n - f_{i-1,j}^n}{2\Delta x}, \quad (4.55)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{f_{i,j+1}^n - f_{i,j-1}^n}{2\Delta y}, \quad (4.56)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f_{i+1,j}^n - 2f_{i,j}^n + f_{i-1,j}^n}{\Delta x^2}, \quad (4.57)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{f_{i,j+1}^n - 2f_{i,j}^n + f_{i,j-1}^n}{\Delta y^2}, \quad (4.58)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{f_y|_{i+1,j}^n - f_y|_{i-1,j}^n}{2\Delta x} = \frac{f_{i+1,j+1}^n - f_{i+1,j-1}^n - (f_{i-1,j+1}^n - f_{i-1,j-1}^n)}{4\Delta x \Delta y}. \quad (4.59)$$

Para la discretización del plano computacional se van a usar $nx + 1$ ($0 \leq i \leq nx$) nodos en la dirección x y $ny + 1$ ($0 \leq j \leq ny$) nodos en la dirección y , siendo ambas distribuciones equiespaciadas en las coordenadas (x, y) , aunque no lo son en los planos (ξ, η) y (z, r) . Por tanto, se tendrá una malla de $(nx + 1) \times (ny + 1)$ nodos equiespaciados sobre la que resolver las ecuaciones diferenciales. Usando (4.55)–(4.59), las ecuaciones (4.44)–(4.46) se pueden escribir formalmente como

$$\Pi_{i,j}^{n+1} = \Pi_{i,j}^n + \Delta t F(\Pi_{i,j}^n, \Gamma_{i,j}^n, \psi_{i,j}^n), \quad (4.60)$$

$$\Gamma_{i,j}^{n+1} = \Gamma_{i,j}^n + \Delta t G(\Gamma_{i,j}^n, \psi_{i,j}^n), \quad (4.61)$$

$$\nabla_{xy}^{*2} \psi_{i,j}^{n+1} = -\Pi_{i,j}^{n+1}, \quad (4.62)$$

donde las funciones F y G son las aproximaciones en diferencias finitas de todos los términos de (4.44) y (4.45) excepto los de las derivadas temporales.

Las ecuaciones para Π y Γ se resolverán mediante un método explícito de dos etapas temporales. Para resolver la ecuación de Poisson (4.62) para ψ se han implementado dos métodos: un método directo y un método basado en la diagonalización de matrices. A continuación se detallarán cada uno de estos métodos.

4.6.1. Resolución de las ecuaciones de transporte para Π y Γ

El método que se va a utilizar para resolver estas ecuaciones es un método predictor–corrector. En una primera etapa de cálculo se obtiene una solución intermedia

(etapa predictora) mientras que en la segunda etapa se corrige el valor obtenido en la etapa anterior. En base a las ecuaciones discretizadas (4.60) y (4.61), las dos etapas del método son:

$$\text{Predicción: } \left\{ \begin{array}{l} \Pi_{i,j}^* = \Pi_{i,j}^n + \frac{1}{2}\Delta t F(\Pi_{i,j}^n, \Gamma_{i,j}^n, \psi_{i,j}^n), \\ \Gamma_{i,j}^* = \Gamma_{i,j}^n + \frac{1}{2}\Delta t G(\Gamma_{i,j}^n, \psi_{i,j}^n), \end{array} \right\} \quad (4.63a)$$

$$\text{Corrección: } \left\{ \begin{array}{l} \Pi_{i,j}^{n+1} = \Pi_{i,j}^n + \Delta t F(\Pi_{i,j}^*, \Gamma_{i,j}^*, \psi_{i,j}^*), \\ \Gamma_{i,j}^{n+1} = \Gamma_{i,j}^n + \Delta t G(\Gamma_{i,j}^*, \psi_{i,j}^*). \end{array} \right\} \quad (4.63b)$$

Evidentemente, la etapa de corrección requiere el cálculo previo de la variable ψ^* , que se calculará mediante $\nabla_{xy}^{*2}\psi^* = -\Pi^*$ (ver sección siguiente). También, después de cada una de las dos etapas, se habrán de implementar las correspondientes condiciones de contorno, pues la solución debe ser conocida en todo el dominio para avanzar a la siguiente etapa. Los errores de este método son de $O(\Delta t^2, \Delta x^2, \Delta y^2)$.

4.6.2. Resolución de la ecuación de Poisson para ψ

Como se ha dicho anteriormente, la resolución de la ecuación de Poisson para la función de corriente se va a implementar por dos métodos distintos que se describen a continuación.

Método directo

En el dominio rectangular en el que se quiere resolver (4.62), con $nx + 1$ nodos en la dirección x ($0 \leq i \leq nx$) y con $ny + 1$ en la dirección y ($0 \leq j \leq ny$), la ecuación, previa eliminación de las condiciones de contorno, proporciona un sistema de $N = (nx-1) \times (ny-1)$ ecuaciones lineales algebraicas para obtener los valores desconocidos de ψ en los nodos interiores, que escrito en forma matricial es

$$\overline{\overline{A}} \cdot \Psi = T. \quad (4.64)$$

La matriz $\overline{\overline{A}}$ de coeficientes del sistema de ecuaciones, de tamaño $(nx-1)(ny-1) \times (nx-1)(ny-1)$, es una matriz por bandas, con tantas bandas como nodos distintos intervengan en la discretización de $\nabla_{xy}^{*2}\psi$. Usando de nuevo la aproximación FTCS para discretizar estos términos se obtiene que son nueve los nodos que se usan y, por tanto, serán también nueve las bandas no nulas que formarán la matriz $\overline{\overline{A}}$: la principal más cuatro

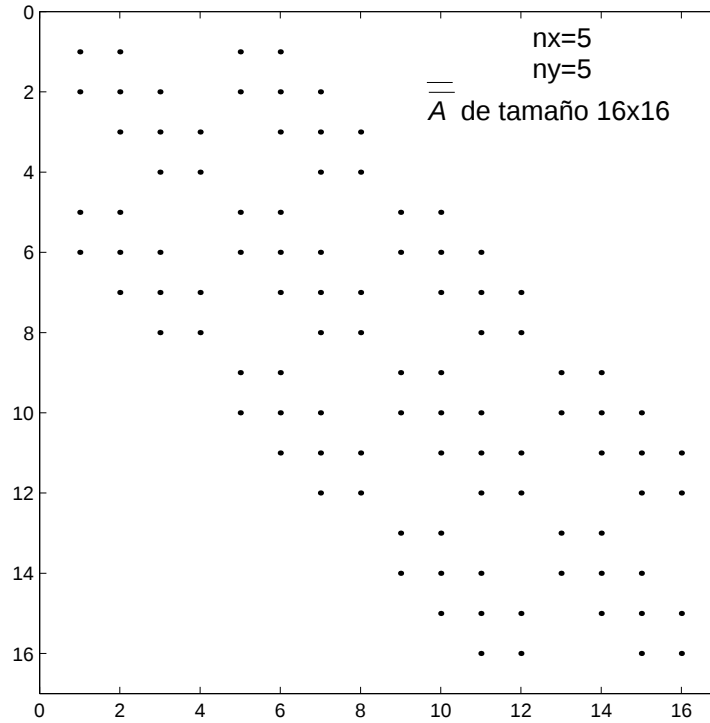


Figura 4.5: Estructura de la matriz $\bar{A}$.

diagonales superiores y cuatro inferiores (véase la figura 4.5, en la que se han representado con puntos los elementos no nulos de la matriz para una geometría con los valores de nx y ny indicados).

La condición de contorno más importante en un problema viscoso es la de no deslizamiento del fluido sobre las paredes, condiciones (4.50)–(4.52). Esto supone que los gradientes normales y tangenciales de la función de corriente en las paredes han de ser nulos. En la geometría rectangular del sistema de coordenadas (x, y) , el gradiente tangencial es nulo por ser la pared una línea de corriente sobre la que ψ es constante. Sin embargo, la implementación de la condición del gradiente normal nulo requirió una atención especial. La forma habitual de imponer esta condición es a través de la condición de contorno de la vorticidad en la pared, teniendo en cuenta que la primera derivada es nula al implementar por diferencias finitas la condición de contorno para la vorticidad a través de la segunda derivada (ver, por ejemplo, Roache, 1998). Esta manera de imponer la condición para ψ nos ha funcionado bien cuando la geometría en las coordenadas originales es uniforme. Pero cuando se requieren cambios de coordenadas para transformar el dominio computacional en rectangular, el imponer la condición de no deslizamiento a

través de la vorticidad no es suficiente, pues no se cumple la condición de gradiente normal nulo a lo largo de toda la pared. Por este motivo se decidió imponer directamente la condición de gradiente nulo como una ecuación nueva a resolver para los nodos anteriores a las paredes, en lugar de resolver sobre ellos la ecuación (4.62).

La condición de contorno sobre el eje de simetría, condición (4.53), también requiere que el gradiente normal de ψ sea nulo, por lo que también se impondrá esta condición sobre el eje del modo comentado anteriormente. Por tanto, la nueva ecuación que resolveremos sobre las paredes y el eje es

$$\psi_y = 0, \quad \left\{ \begin{array}{ll} i = ny, & 1 \leq j \leq nx - 1, \quad (\text{pared superior}) \\ i = 0, & 1 \leq j \leq j_0, \quad (\text{pared inferior}) \\ i = 0, & j_0 + 1 \leq j \leq nx - 1, \quad (\text{eje de simetría}) \end{array} \right\}, \quad (4.65)$$

donde $j_0 \equiv \frac{x_1 \times nx}{x_1 + x_2}$ es el índice correspondiente a la posición axial $x = 0$. Discretizando esta ecuación mediante diferencias finitas de segundo orden no centradas se obtiene

$$4\psi_{ny-1,j} - \psi_{ny-2,j} = 3\psi_{in}(r_{ei}), \quad 1 \leq j \leq nx - 1, \quad (4.66)$$

para la pared superior, y

$$4\psi_{1,j} - \psi_{2,j} = 3\psi_{in}(r_{ii}), \quad 1 \leq j \leq nx - 1, \quad (4.67)$$

para la inferior y el eje. Estas nuevas ecuaciones a resolver cambiarán la fila k -ésima de $\overline{\overline{A}}$ para los valores de k dados por

$$k = i + (j - 1)(ny - 1), \quad \left\{ \begin{array}{l} i = ny \\ i = 0 \end{array} \right\}, \quad 1 \leq j \leq nx - 1, \quad (4.68)$$

siendo aún la forma general de $\overline{\overline{A}}$ la mostrada en la figura 4.5 con nueve diagonales. Las nuevas ecuaciones a resolver, (4.66) y (4.67), suponen, además de cambios en $\overline{\overline{A}}$, cambios en el vector $\mathbf{T}$, cuyas componentes $k = i + (j - 1)(ny - 1)$ vendrán dadas por

$$T_k = \left\{ \begin{array}{ll} \Pi_{i,j}, & 2 \leq i \leq ny - 2 \\ 3\psi_{in}(r_{ei}), & i = ny - 1 \\ 3\psi_{in}(r_{ii}), & i = 1 \end{array} \right\}, \quad 1 \leq j \leq nx - 1. \quad (4.69)$$

El vector de incógnitas Ψ está formado por los valores desconocidos de la función de corriente en los nodos internos, es decir,

$$\Psi_k = \psi_{i,j}, \quad k = i + (j - 1)(ny - 1), \quad 1 \leq i \leq ny - 1, \quad 1 \leq j \leq nx - 1. \quad (4.70)$$

Por último, las componentes no nulas de la matriz $\overline{\overline{\mathbf{A}}}$ se obtienen de la discretización de la ecuación (4.62). Téngase en cuenta que la forma de $\mathbf{T}$ dada en (4.69) no es su forma final pues no se han tenido en cuenta aún las condiciones de contorno en las regiones de entrada y de salida.

Existen métodos directos elementales para resolver el sistema de ecuaciones (4.64), como la regla de Crammer o cualquier método de eliminación Gaussiana, por ejemplo. El inconveniente de su uso está en el inmenso número de operaciones de multiplicación que requieren, aproximadamente $(N + 1)!$ la regla de Crammer, o N^3 los métodos de eliminación Gaussiana cuando la matriz es llena. Aunque la matriz de coeficientes $\overline{\overline{\mathbf{A}}}$ es dispersa o casi vacía, tampoco es aconsejable el uso de estos métodos directos. Para resolver este tipo de sistemas de ecuaciones lineales con matrices dispersas existen rutinas específicas muy eficientes en determinados paquetes numéricos disponibles comercialmente o de forma gratuita. Entre las rutinas más utilizadas para cálculo numérico están las que proporcionan los paquetes IMSL (del inglés *International Mathematics and Statistic Libraries*) y BLAS (del inglés *Basic Lineal Algebra Subroutines*). En ellos se pueden encontrar rutinas para el tratamiento de estas matrices, bien como dispersas, o bien como una matriz por bandas, siendo esta última opción la más aconsejable por reducir el tiempo de cálculo. En concreto, se han utilizado las rutinas del paquete BLAS llamadas **bdgfa(...)** y **dgbsl(...)**, que factorizan y resuelven el sistema de ecuaciones, respectivamente.

Método de diagonalización de matrices

Este método se puede aplicar directamente cuando se pueden escribir separados los operadores diferenciales de las distintas variables de la ecuación de Poisson. Un caso claro en el que, en principio, no se puede utilizar es cuando aparecen derivadas cruzadas en la ecuación de Poisson, que es nuestro caso, donde los términos cruzados aparecen debido a los cambios de coordenadas introducidos. Sin embargo, aún cuando existen derivadas cruzadas, es posible aplicar el método pasando estos términos “cruzados” al segundo miembro de la ecuación de Poisson y tratándolos igual que el término no homogéneo. En este caso, la ecuación (4.46) se escribe

$$\nabla_{xy}^{+2}\psi = -\Pi - 2\frac{\alpha^2\eta_z}{\eta_y\xi_x}\psi_{xy}, \quad (4.71)$$

donde

$$\begin{aligned} \nabla_{xy}^{+2} = & \frac{\alpha^2}{\xi_x^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\alpha^2 \xi_{xx}}{\xi_x^3} \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{\alpha^2 \eta_z^2 + \eta_r^2}{\eta_y^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ & + \left[\frac{\alpha^2 \eta_{zz} + \eta_r/r}{\eta_y} - \frac{\eta_{yy}}{\eta_y^3} (\alpha^2 \eta_z^2 + \eta_r^2) \right] \frac{\partial}{\partial y}, \end{aligned}$$

es el operador (4.47) sin derivadas cruzadas. Se usarán diferencias finitas de segundo orden y se discretizarán por separado los operadores diferenciales en las direcciones x e y , siendo Δx e Δy los incrementos constantes en ambas direcciones, respectivamente ($y = i \Delta y$ y $x = -x_1 + j \Delta x$). El operador según la dirección y se discretiza en los nodos interiores, $1 \leq j \leq nx - 1$, $1 \leq i \leq ny - 1$, como

$$\begin{aligned} & \frac{c_{yy}}{\Delta y^2} (\psi_{i-1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i+1,j}) - \frac{c_y}{2\Delta y} (\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}) = \\ & \left[\left(\frac{c_{yy}}{\Delta y^2} - \frac{c_y}{2\Delta y} \right) \psi_{i-1,j} - \frac{2c_{yy}}{\Delta y^2} \psi_{i,j} + \left(\frac{c_{yy}}{\Delta y^2} + \frac{c_y}{2\Delta y} \right) \psi_{i+1,j} \right], \end{aligned} \quad (4.72)$$

donde

$$c_{yy} = \frac{\alpha^2 \eta_z^2 + \eta_r^2}{\eta_y^2}, \quad c_y = \frac{\alpha^2 \eta_{zz} + \eta_r/r_{i,j}}{\eta_y} - \frac{\eta_{yy}}{\eta_y^3} (\alpha^2 \eta_z^2 + \eta_r^2).$$

Definiendo las matrices

$$\bar{\bar{\Psi}} = \begin{bmatrix} \psi_{1,1} & \psi_{1,2} & \cdots & \psi_{1,nx-2} & \psi_{1,nx-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \psi_{i,j} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \psi_{ny-1,1} & \psi_{ny-1,2} & \cdots & \psi_{ny-1,nx-2} & \psi_{ny-1,nx-1} \end{bmatrix}, \quad (4.73)$$

y

$$\bar{\bar{A}} = \begin{bmatrix} -\frac{2c_{yy}}{\Delta y^2} & \left(\frac{c_{yy}}{\Delta y^2} + \frac{c_y}{2\Delta y} \right) & 0 & \cdots & 0 \\ \left(\frac{c_{yy}}{\Delta y^2} - \frac{c_y}{2\Delta y} \right) & -\frac{2c_{yy}}{\Delta y^2} & \left(\frac{c_{yy}}{\Delta y^2} + \frac{c_y}{2\Delta y} \right) & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 & \left(\frac{c_{yy}}{\Delta y^2} - \frac{c_y}{2\Delta y} \right) & -\frac{2c_{yy}}{\Delta y^2} \end{bmatrix},$$

de dimensiones $n \times m$ y $n \times n$, respectivamente, donde $n = ny - 1$ y $m = nx - 1$, el término en y (4.72) se puede escribir como el producto

$$\bar{\bar{A}} \cdot \bar{\bar{\Psi}}. \quad (4.74)$$

Por otro lado, el operador diferencial en x se discretiza en los nodos interiores como

$$\begin{aligned} & \frac{c_{xx}}{\Delta x^2} (\psi_{i,j-1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j+1}) + \frac{c_x}{2\Delta x} (\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}) \\ &= \left(\frac{c_{xx}}{\Delta x^2} - \frac{c_x}{2\Delta x} \right) \psi_{i,j-1} - \left(\frac{2c_{xx}}{\Delta x^2} \right) \psi_{i,j} + \left(\frac{c_{xx}}{\Delta x^2} + \frac{c_x}{2\Delta x} \right) \psi_{i,j+1} \end{aligned} \quad (4.75)$$

donde

$$c_{xx} = \frac{\alpha^2}{\xi_x^2}, \quad c_x = -\frac{\alpha^2 \xi_{xx}}{\xi_x^3}.$$

Definiendo ahora la matriz de dimensión $m \times m$

$$\overline{\overline{B}} = \begin{bmatrix} -\frac{2c_{xx}}{\Delta x^2} & \left(\frac{c_{xx}}{\Delta x^2} - \frac{c_x}{2\Delta x} \right) & 0 & \cdots & 0 \\ \left(\frac{c_{xx}}{\Delta x^2} + \frac{c_x}{2\Delta x} \right) & -\frac{2c_{xx}}{\Delta x^2} & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \left(\frac{c_{xx}}{\Delta x^2} + \frac{c_x}{2\Delta x} \right) & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \left(\frac{c_{xx}}{\Delta x^2} - \frac{c_x}{2\Delta x} \right) \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & -\frac{2c_{xx}}{\Delta x^2} \end{bmatrix},$$

(4.75) se escribe

$$\overline{\overline{\Psi}} \cdot \overline{\overline{B}}. \quad (4.76)$$

Por tanto, la discretización de la ecuación inicial (4.71) escrita en forma matricial es

$$\overline{\overline{A}} \cdot \overline{\overline{\Psi}} + \overline{\overline{\Psi}} \cdot \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{F}}, \quad (4.77)$$

que contiene errores de $O(\Delta x^2, \Delta y^2)$ y donde las componentes de la matriz $\overline{\overline{F}}$, de dimensión $n \times m$ son

$$F_{i,j} = -\Pi_{i,j} - 2 \left(\frac{\alpha^2 \eta_z}{\eta_y \xi_x} \psi_{xy} \right) \Big|_{i,j}, \quad (4.78)$$

para $2 \leq i \leq ny - 2$ y $2 \leq j \leq nx - 2$, dejando fuera los nodos internos siguientes a los contornos que serán tratados más tarde. La resolución de (4.77) en el instante $n + 1$ supone evaluar el término en derivadas cruzadas en ese instante. Pero como todavía no se conoce la solución, se evalúa el término cruzado en $n + 1$ en función de su valor en los instante n y $n - 1$. El desarrollo en serie de Taylor para los instantes $n + 1$ y $n - 1$ de $\partial^2 \psi / \partial x \partial y$ se escribe

$$\frac{\partial^2 \psi^{n+1}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \psi^n}{\partial x \partial y} + \Delta t \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \psi^n}{\partial x \partial y} \right) + O(\Delta t^2), \quad (4.79)$$

$$\frac{\partial^2 \psi^{n-1}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \psi^n}{\partial x \partial y} - \Delta t \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \psi^n}{\partial x \partial y} \right) + O(\Delta t^2). \quad (4.80)$$

Sumando ambas expresiones se obtiene

$$\frac{\partial^2 \psi^{n+1}}{\partial x \partial y} = 2 \frac{\partial^2 \psi^n}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi^{n-1}}{\partial x \partial y} + O(\Delta t^2), \quad (4.81)$$

aproximación que tiene errores de segundo orden en el tiempo. Por tanto, en el instante $n + 1$ todo el segundo miembro será conocido.

Para obtener la forma final de las matrices $\overline{\overline{A}}$ y $\overline{\overline{B}}$ se han de implementar las condiciones de contorno para ψ . En los puntos “frontera” del dominio interior, es decir, $i = 1, \forall j$; $i = ny - 1, \forall j$; $j = 1, \forall i$ y $j = nx - 1, \forall i$, hay que tener en cuenta las condiciones de contorno para la función de corriente sobre cada uno de los contorno. Sólo las condiciones de contorno de tipo Neumann afectarán a las matrices $\overline{\overline{A}}$ y $\overline{\overline{B}}$. Usando tres puntos genéricos (i, j) sobre los contornos $y = 0$, $y = 1$ y $x = x_2$, mostraremos como quedan finalmente las matrices. Sobre los nodos $i = ny, \forall j$, se ha de cumplir

$$\psi_{i,j} = \psi_{in}(r_{ei}), \quad \psi_y = \frac{3\psi_{i,j} - 4\psi_{i-1,j} + \psi_{i-2,j}}{2\Delta y} = 0,$$

lo que nos proporciona la siguiente ecuación algebraica a resolver en lugar de (4.71):

$$4\psi_{ny-1,j} - \psi_{ny-2,j} = 3\psi_{in}(r_{ei}), \quad 1 \leq j \leq nx - 1.$$

Del mismo modo, para los nodos $i = 0, \forall j$, se tiene

$$4\psi_{1,j} - \psi_{2,j} = 3\psi_{in}(r_{ii}), \quad 1 \leq j \leq nx - 1.$$

Por tanto, la primera fila de $\overline{\overline{A}}$ correspondiente a las incógnitas $i = 1, \forall j$, se escribirá

$$[4 \quad -1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0],$$

mientras que la última ($i = ny - 1, \forall j$) será

$$[0 \quad \cdots \quad 0 \quad -1 \quad 4].$$

Por otra parte, la matriz $\overline{\overline{F}}$ también se verá modificada con motivo de esta condición de contorno, quedando

$$\begin{aligned} F_{ny-1,j} &= 3\psi_{in}(r_{ei}) \quad \text{para } i = ny - 1, \quad 1 \leq j \leq nx - 1, \\ F_{1,j} &= 3\psi_{in}(r_{ii}) \quad \text{para } i = 1, \quad 1 \leq j \leq nx - 1. \end{aligned} \quad (4.82)$$

La condición para ψ en $j = nx$, $\forall i$, es

$$\frac{1}{\xi_x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \Big|_{i,nx} - \frac{\xi_{xx}}{\xi_x^3} \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{i,nx} = 0. \quad (4.83)$$

Para discretizar estas derivadas se hará uso de los desarrollos en serie de Taylor en $nx - 1$ y $nx - 2$ dados por

$$\begin{aligned} \psi_{i,nx-1} &= \psi_{i,nx} - \frac{\Delta x}{2!} \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{i,nx} + \frac{\Delta x^2}{3!} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \Big|_{i,nx} + O(\Delta x^3), \\ \psi_{i,nx-2} &= \psi_{i,nx} - \frac{2\Delta x}{2!} \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{i,nx} + \frac{4\Delta x^2}{3!} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \Big|_{i,nx} + O(\Delta x^3). \end{aligned} \quad (4.84)$$

Eliminando la primera derivada obtenemos como aproximación para la segunda derivada en $j = nx$ la expresión:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \Big|_{i,nx} = \frac{3(\psi_{i,nx} - 2\psi_{i,nx-1} + \psi_{i,nx-2})}{\Delta x^2} + O(\Delta x),$$

que tiene errores de primer orden, y se escogió por no intervenir el nodo $nx - 3$ y no incluir, por tanto, un término nuevo no nulo en la matriz $\bar{\bar{A}}$ (ver más adelante). Eliminando la segunda derivada en (4.84), obtenemos para la primera derivada

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{i,nx} = \frac{-3\psi_{i,nx} + 4\psi_{i,nx-1} - \psi_{i,nx-2}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2).$$

Sustituyendo estas aproximaciones para las derivadas en (4.83) obtenemos el valor desconocido de ψ en $j = nx$ que hace que se cumpla la condición de contorno:

$$\psi_{i,nx} = \psi_{i,nx-1} \left(\frac{12\xi_x + 4\Delta x \xi_{xx}}{6\xi_x + 3\Delta x \xi_{xx}} \right) + \psi_{i,nx-2} \left(\frac{-6\xi_x - \Delta x \xi_{xx}}{6\xi_x + 3\Delta x \xi_{xx}} \right).$$

Por tanto, la condición diferencial para ψ en este contorno se ha convertido en una condición de tipo Dirichlet en función de los nodos internos. Al introducir este valor en (4.75) para $j = nx - 1$, $\forall i$, se obtiene

$$\begin{aligned} &\left(\frac{c_{xx}}{\Delta x^2} - \frac{c_x}{2\Delta x} \right) \psi_{i,nx-2} - \left(\frac{2c_{xx}}{\Delta x^2} \right) \psi_{i,nx-1} \\ &+ \left(\frac{c_{xx}}{\Delta x^2} + \frac{c_x}{2\Delta x} \right) \left[\psi_{i,nx-1} \left(\frac{12\xi_x + 4\Delta x \xi_{xx}}{6\xi_x + 3\Delta x \xi_{xx}} \right) + \psi_{i,nx-2} \left(\frac{-6\xi_x - \Delta x \xi_{xx}}{6\xi_x + 3\Delta x \xi_{xx}} \right) \right] \\ &= u \psi_{i,nx-2} + d \psi_{i,nx-1}, \end{aligned}$$

donde

$$u = \left[\frac{c_{xx}}{\Delta x^2} - \frac{c_x}{2\Delta x} + \left(\frac{c_{xx}}{\Delta x^2} + \frac{c_x}{2\Delta x} \right) \left(\frac{-6\xi_x - \Delta x \xi_{xx}}{6\xi_x + 3\Delta x \xi_{xx}} \right) \right],$$

$$d = \left[\frac{-2c_{xx}}{\Delta x^2} + \left(\frac{c_{xx}}{\Delta x^2} + \frac{c_x}{2\Delta x} \right) \left(\frac{12\xi_x + 4\Delta x \xi_{xx}}{6\xi_x + 3\Delta x \xi_{xx}} \right) \right].$$

Con todo esto, la última columna de $\overline{\overline{B}}$ se escribe

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u \\ d \end{bmatrix}, \quad (4.85)$$

no afectando esta condición de contorno al termino independiente $\overline{\overline{F}}$. Sin embargo, la condición de contorno en $x = -x_1$ sí modifica a $\overline{\overline{F}}$ cuando se aplica (4.48) a los nodos frontera $j = 1, \forall i$, permaneciendo igual la matriz $\overline{\overline{B}}$:

$$F_{i,1} = -\Pi_{i,1} - 2\frac{\alpha^2\eta_z}{\eta_y\xi_x} \left[2\frac{\partial^2\psi^n}{\partial x\partial y}\Big|_{i,1} - \frac{\partial^2\psi^{n-1}}{\partial x\partial y}\Big|_{i,1} \right] - \left(\frac{c_{xx}}{\Delta x^2} - \frac{c_x}{2\Delta x} \right) \psi_{in}(i), \quad \text{para } j = 1, \quad \forall i.$$

Con las matrices $\overline{\overline{A}}$, $\overline{\overline{B}}$ y $\overline{\overline{F}}$ ya totalmente conocidas, se puede aplicar el método de diagonalización para resolver la función de corriente (ver Lynch *et al.* (1964) para los detalles del método).

4.7. Validación del código numérico

4.7.1. Decaimiento del giro en un conducto uniforme

En este apartado se va a utilizar el ejemplo del decaimiento del giro en un conducto circular para comparar los resultados numéricos del presente código con los semianalíticos de Talbot (1954).

El conducto en el que se van a llevar a cabo la simulación es uniforme,

$$r_i(z) = 0, \quad r_e(z) = 1, \quad (4.86)$$

de longitud $\mathcal{L} = e_1 + e_2$. La pared exterior gira con velocidad angular Ω desde $z = -e_1$ hasta $z = 0$. A la entrada, el flujo tiene una velocidad axial de tipo Poisseuille y gira como sólido rígido. Por tanto, como condiciones de contorno a la entrada tendremos

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial u / \partial z = 0 \\ v = Lr \\ w = 2(1 - r^2) \end{array} \right\} \quad z = -e_1, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad (4.87)$$

donde L es el parámetro de giro (3.6), y se ha tomado como velocidad característica U la velocidad media en la sección.

Talbot (1954) obtuvo una solución asintótica del decaimiento del giro aguas abajo. Para ello linealizó las ecuaciones en torno al flujo de Poiseuille existente para $z \rightarrow \infty$, y obtuvo una solución para el decaimiento del giro por separación de variables como una expansión en series de Bessel de la forma

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} b_n J_1(\beta_n r) e^{-\beta_n z}, \quad (4.88)$$

donde β_n son los autovalores y J_1 la función de Bessel de primer orden. Los dos primeros autovalores, β_1 y β_2 , y sus aproximaciones para Reynolds altos, se representan en la figura 4.7.

Para comprobar la validez de nuestro código numérico, se compararán los resultados para z grande, que se escribirán en la forma

$$v(z, r) = v_1(r) e^{-\beta z}, \quad (4.89)$$

con la solución asintótica anterior. Para obtener numéricamente el parámetro β , en vez de v se utiliza la magnitud integrada en cada sección

$$S = 2 \int_0^1 v w r^2 dr. \quad (4.90)$$

El valor de S en la sección de entrada viene dado por

$$S_{in} = 2 \int_0^1 2(1 - r^2) L r r^2 dr = 4L \left(\frac{r^4}{4} - \frac{r^6}{6} \right) \Big|_0^1 = \frac{L}{3}. \quad (4.91)$$

Aguas abajo, sustituyendo (4.89) y el flujo de Poiseuille para w , se tiene

$$S = 2 \int_0^1 2(1 - r^2) v_1(r) e^{-\beta z} r^2 dr \equiv S_1 e^{-\beta z}. \quad (4.92)$$

Esta ecuación se puede escribir como

$$\ln S = \ln S_1 - \beta z, \quad (4.93)$$

que permite obtener β numéricamente hallando la pendiente de la recta a la que tiende $\ln S$ asintóticamente para z grande. En las figuras 4.6(a) y (b) se representa la función $\ln S$ obtenida numéricamente (líneas a trazos) para $Re = 100$ con $L = 0,61$ y $Re = 50$

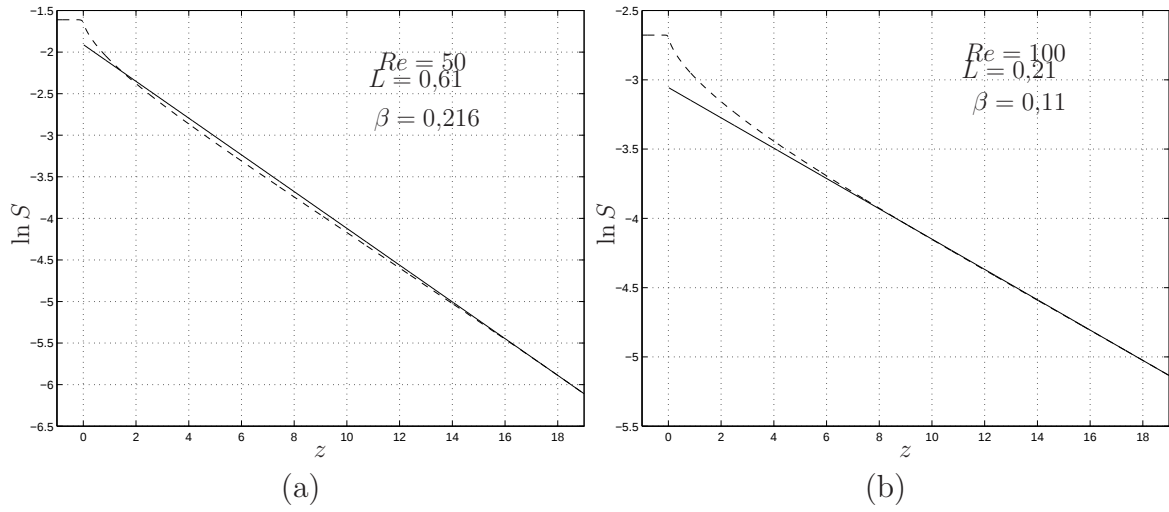


Figura 4.6:

con $L = 0,21$, respectivamente. También se representa la recta de pendiente $-\beta$ que se ajusta al último tramo de la curva (línea continua), corroborando que, lejos de la región de generación del giro, v se puede escribir como (4.89). Los valores de β así obtenidos para diversos valores de Re y L son representados en la figura 4.6, donde se comparan con los autovalores β_1 y β_2 . En ella se observa una buena concordancia entre el valor obtenido numéricamente para β y el primer autovalor β_1 de (4.88), que es el más relevante a medida que z crece. Esta coincidencia entre β y β_1 es bastante buena para valores grandes y pequeños de Re , independientemente de la intensidad del giro a la entrada L , lo cual está en consonancia con la solución asintótica de Talbot.

4.7.2. Comparación con los resultados de Darmofal (1996) para un conducto no uniforme

En esta sección y en la siguiente se compararán los resultados numéricos de nuestro código con otros existentes para conductos con geometría variable, más complejos que el simple conducto uniforme de la sección anterior. En particular, en esta sección se usarán los resultados de Darmofal (1996), que resolvió el flujo con giro en un conducto como el mostrado en la figura 4.8, cuya geometría física queda determinada por las siguientes relaciones:

$$z_i/r_i = 1,76, \quad (z_e - z_i)/r_i = 13,33, \quad (z_c - z_e)/r_i = 2,62, \quad (z_s - z_c)/r_i = 10,50, \quad (4.94)$$

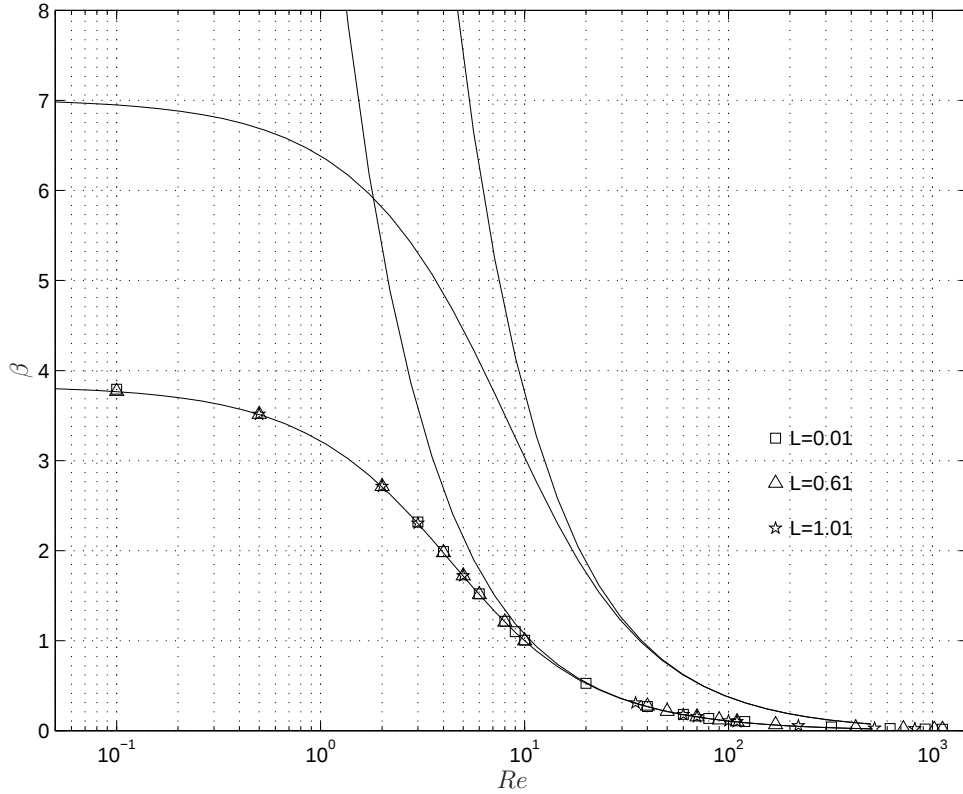


Figura 4.7: Autovalores β_1 y β_2 , y sus aproximaciones para Reynolds altos. Los puntos representan los resultados obtenidos numéricamente para β con distintos valores de Re y L .

y

$$r_e/r_i = 1,33, \quad r_s/r_i = 0,787. \quad (4.95)$$

Resolviendo numéricamente las ecuaciones en variables $\mathbf{v} - -p$, Darmofal estudió la evolución de un vórtice de tipo q a la entrada del conducto para diferentes valores del número de Reynolds y del parámetro de giro (ver más adelante para la equivalencia entre los parámetros Re_D y L_D usados por Darmofal y los del presente trabajo). Encontró que, para determinados valores del número de Reynolds y por encima de ciertos valores del parámetro de giro, el vórtice de entrada se rompe aguas abajo, apareciendo un punto de remanso en el eje asociado a una RV de tipo burbuja. Demostró, además, lo sensible que es la localización del punto de remanso y, por tanto, la burbuja de recirculación, a las pequeñas variaciones en los perfiles de entrada. Por esto, para reproducir numéricamente uno de los casos dados en el trabajo de Darmofal se ha de intentar ajustar lo más exactamente posible las condiciones de contorno a la entrada, además de ser necesaria la perfecta equivalencia entre los números de Reynolds y los parámetros de giro.

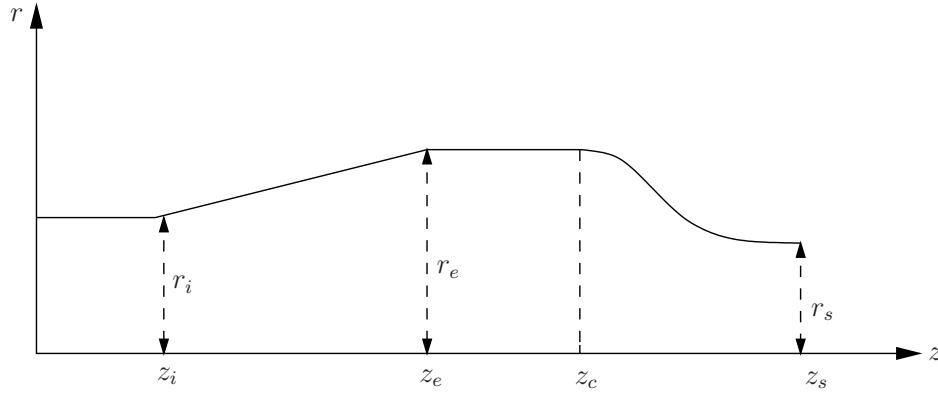


Figura 4.8: Geometría del conducto.

Darmofal define el número de Reynolds Re_D y el parámetro de giro L_D como

$$Re_D = \frac{U \delta}{\nu}, \quad L_D = \frac{\Gamma_o}{U \delta}, \quad (4.96)$$

donde δ es el tamaño radial del núcleo del vórtice q y $\Gamma_o = \Omega r_{ei}^2$ es la circulación característica de la corriente de entrada lejos del eje del conducto. De acuerdo con nuestra adimensionalización,

$$Re = \frac{U r_{ei}}{\nu}, \quad (4.97)$$

por lo que la equivalencia entre ambos es

$$Re = Re_D \frac{r_{ei}}{\delta}, \quad (4.98)$$

donde r_{ei}/δ es el radio del conducto exterior a la entrada en la adimensionalización usada por Darmofal. Por otro lado, la equivalencia entre los parámetros de giro es

$$L = \frac{\Omega r_{ei}}{U} = L_D \frac{\delta}{r_{ei}}. \quad (4.99)$$

Teniendo en cuenta estas equivalencias, los perfiles de velocidad del vórtice q a la entrada del conducto usados por Darmofal son

$$u_{in}(r) = 0, \quad (4.100a)$$

$$v_{in}(r) = D(r) \left(L_D \left[1 - e^{-r^2} \right] \right), \quad (4.100b)$$

$$w_{in}(r) = D(r) \left(1 + \Delta w e^{-r^2} \right), \quad (4.100c)$$

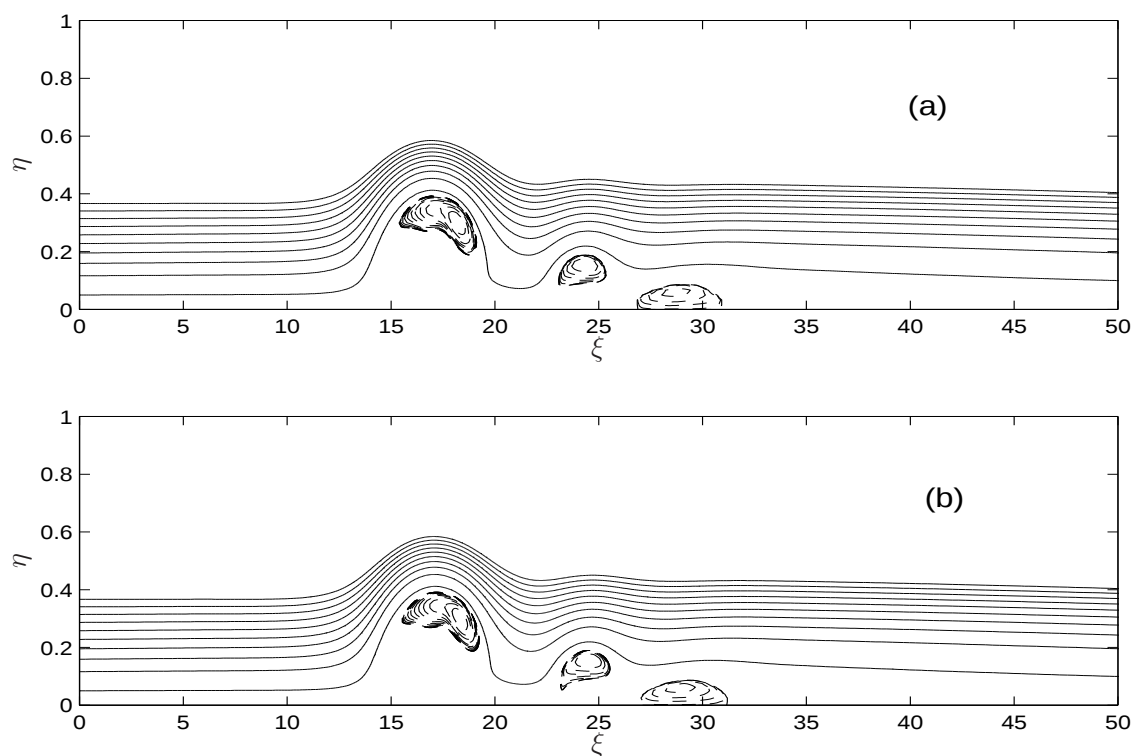


Figura 4.9: Función de corriente para $Re = 1492,59$ y $L = 0,5589$ obtenidos con los dos mallados discutidos en el texto.

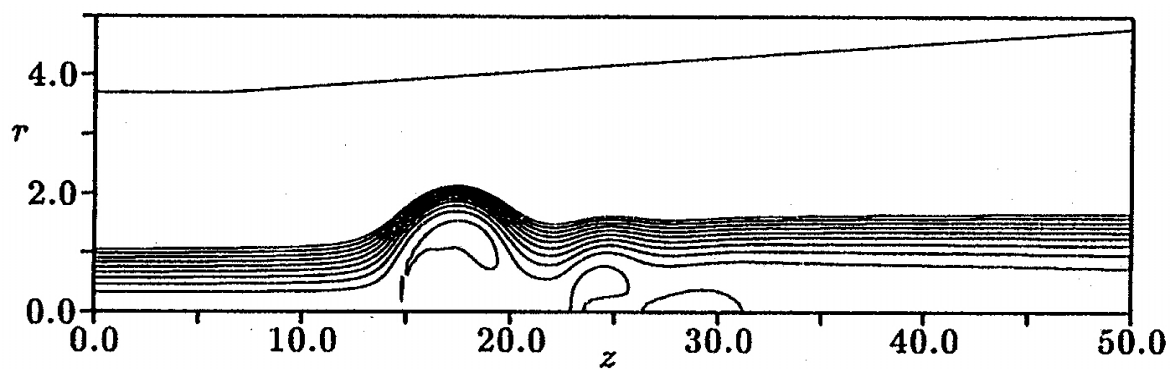


Figura 4.10: Líneas de corriente obtenidas por Darmofal (1996) para los mismos valores de los parámetros de la figura 4.9.

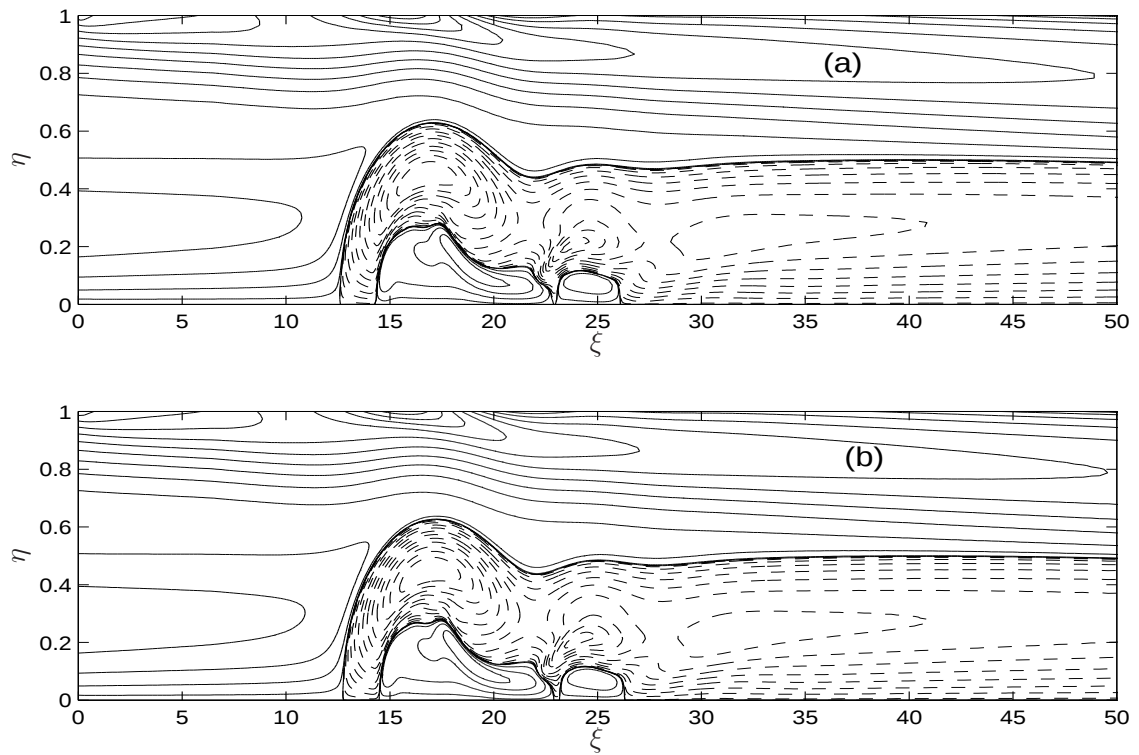


Figura 4.11: Líneas de vorticidad constante para $Re = 1492,59$ y $L = 0,5589$ obtenidos con los dos mallados discutidos en el texto.

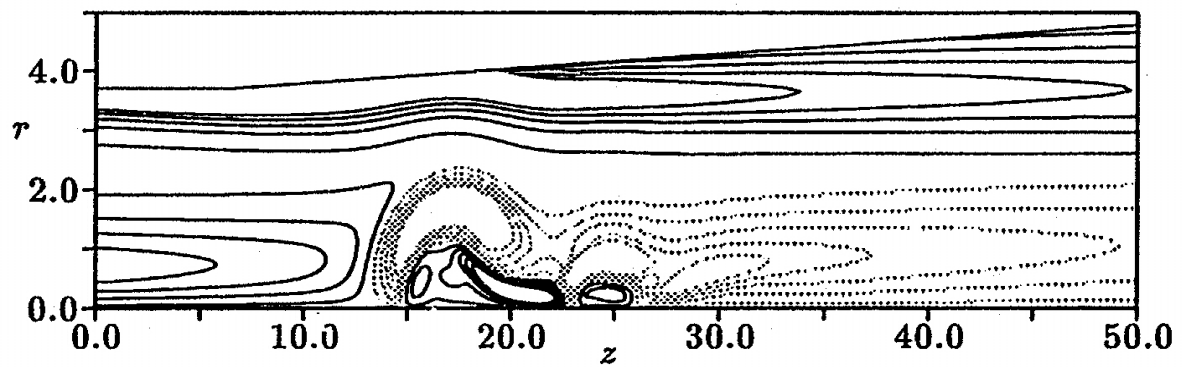


Figura 4.12: Contornos de vorticidad obtenidos por Darmofal (1996) para los mismos valores de los parámetros de la figura 4.11

donde Δw es la diferencia entre la velocidad axial en el eje y la existente lejos de él ($\Delta w = 1,08$ en el caso considerado aquí) y $D(r)$ es la función que hace cumplir la condición de contorno de no deslizamiento en la pared,

$$D(r) = 1 - \exp[-\epsilon(1 - r/r_i)], \quad (4.101)$$

siendo ϵ el parámetro que controla el espesor de la capa límite de los perfiles de velocidad (4.100) en la pared del conducto ($\epsilon = 14$ es el valor utilizado por Darmofal). Téngase en cuenta que en vez de la condición de contorno (4.100a), en nuestro código se ha usado la condición más general $\partial u_{in}/\partial x = 0$, según se indicó en (4.15).

El caso con el que se va a realizar la comparación entre los simulados por Darmofal es el correspondiente a $Re_D = 403$ y $L_D = 2,07$, para un radio exterior a la entrada igual a $r_{ei}/\delta = 3,7037$, que equivalen, en nuestra adimensionalización, a $Re = 1492,59$ y $L = 0,5589$. Se han llevado a cabo dos simulaciones distintas para estos valores de los parámetros: una con un espaciado uniforme tanto en la dirección x como en la dirección y (factores de escala nulos en ambas direcciones, $\beta = 0$, $y_1 = 0$), con $nx = 1200$, $ny = 60$, y otra simulación con una mallado comprimido en la dirección x ($\beta = 7$) en torno al punto donde, de acuerdo con los resultados de Darmofal, se espera tenga lugar el estancamiento del flujo y la rotura del vórtice ($\xi_s = 20$), siendo el mallado en la dirección y también uniforme ($y_1 = 0$), con $nx = 501$, $ny = 80$. En la figura 4.9(a) y (b) se dibujan las líneas de corriente para los dos casos comentados, mientras que en la figura 4.11(a) y (b) se muestran los contornos de vorticidad obtenidos. En ambas figuras se usan las coordenadas (ξ, η) , mostrándose sólo el dominio axial comprendido entre 0 y 50 para efectuar así una comparación directa con las líneas de corriente y con los contornos de vorticidad de Darmofal, que se han reproducido en las figuras 4.10 y 4.12, respectivamente. De esta comparación se puede observar la casi coincidencia de los resultados, a pesar de lo crítica que es la localización de la burbuja frente a cualquier diferencia en las condiciones de contorno a la entrada del conducto. Estos resultados, por tanto, nos confirman que, ante geometrías no uniformes, todos los cambios de coordenadas introducidos y el código numérico desarrollado están funcionando muy bien. No obstante, una validación adicional del código se presenta en la sección siguiente con el objetivo de cuantificar la importancia de la condición de contorno de no deslizamiento sobre la pared externa del conducto, que muchos autores han obviado en sus simulaciones numéricas (Darmofal, 1996, es la excepción).

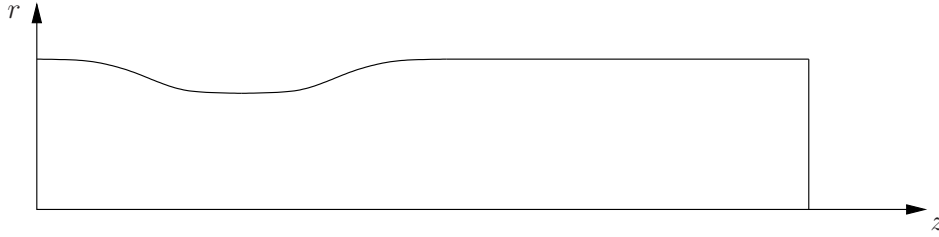


Figura 4.13: Geometría del conducto usado por López (1994)

4.7.3. Influencia de la Condición de no deslizamiento en la pared

En esta sección se van a comparar los resultados numéricos obtenidos con el código desarrollado con los del trabajo de López (1994). Este autor resuelve el flujo viscoso en un conducto de sección variable pero tratando la pared del mismo como una pared no viscosa sobre la que el fluido desliza. Otros autores también han resuelto el flujo en conductos bajo estas mismas suposiciones, por ejemplo Beran & Culik (1992). Estos trabajos centran su estudio en la dinámica del núcleo del vórtice que desencadena en su rotura aguas abajo, no dando importancia a la posible interacción entre el núcleo del vórtice y la capa límite viscosa que se desarrolla en la pared del conducto. Por este motivo eliminan la condición de contorno de no deslizamiento sobre la pared que, como se ha visto, complica enormemente la implementación del código numérico. Sin embargo, como veremos más adelante, esta condición de contorno puede influir de forma importante en algunos aspectos de la rotura del vórtice axial.

La geometría sobre la que se va a realizar la simulación es la mostrada en la figura 4.13. Para reproducir los resultados de López, se va a suponer que el fluido desliza sobre la pared del conducto. Esto supondrá una simplificación en las condiciones de contorno sobre la pared. En vez de (4.17), se supone que la función de corriente es constante sobre la pared y, debido a la conservación de la circulación sobre una línea de corriente no viscosa, se tendrá que $\Gamma(z, r_e) = \text{constante}$. Además, siguiendo a López (1994) y a Beran & Culik (1992), para la vorticidad en esta pared se tiene $\Pi = 2L_D^2[1 - \exp(-R_0^2)] \exp(-R_0^2)(m - 1/m)R_0$, donde $R_0 = r_{ei}/\delta$ (cuyo valor numérico se dará a continuación) y $m = R_0/r_e(z)$. Resumiendo, las condiciones de contorno para

la pared con deslizamiento son:

$$\psi(z, r_e) = \text{constante} = \psi_{in}(r_{ei}) \quad (4.102a)$$

$$\Gamma(z, r_e) = \text{constante} = \Gamma_{in}(r_{ei}) \quad (4.102b)$$

$$\Pi(z, r_e) = 2L_D^2[1 - \exp(-R_0^2)] \exp(-R_0^2)(m - 1/m)R_0. \quad (4.102c)$$

López (1994) utiliza, al igual que Darmofal (1996), el núcleo del vórtice como longitud característica para adimensionalizar. Así, la equivalencia entre los números de Reynolds y los parámetros de giro es la misma que la dada en (4.98) y (4.99), respectivamente. El flujo de entrada usado por López, y que se usará aquí para reproducir sus simulaciones, es el vórtice q dado en (4.100), pero con $D(r) = 1$, pues no se impone que las velocidades sean nulas en la pared. El caso que se va a reproducir es el correspondiente a $Re_D = 1000$, $L_D = 1,495$, $\Delta w = 0$ y $r_{ei}/\delta = 2$, lo que supone que en nuestras simulaciones hemos de usar $Re = 2000$ y $L = 0,7475$. En las figuras 4.14(a), (b) y (c) se presentan las líneas de corriente, los contornos de vorticidad y de circulación, respectivamente, para este caso cuando se usa una discretización de 41 nodos en la dirección radial y 401 en la axial. Comparando estos resultados con los obtenidos por López, reproducidos en la figura 4.15, podemos comprobar el buen acuerdo que existe entre ambos, dando esto, de nuevo, validez al código numérico desarrollado.

A continuación compararemos estos resultados con los obtenidos cuando se supone que no existe deslizamiento en la pared del conducto. El flujo de entrada vendrá dado por (4.100), siendo $D(r)$ en este caso

$$D(r) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{para } 0 \leq r \leq 1 - \epsilon \\ 1 - \frac{[r - (1 - \epsilon)]^2}{\epsilon^2}, & \text{para } 1 - \epsilon \leq r \leq 1 \end{array} \right\}. \quad (4.103)$$

donde ϵ mide, de nuevo, el espesor de la capa límite que se introduce en los perfiles de entrada de velocidad. Estos perfiles se representan en la figura 4.16, donde se puede apreciar el pequeño espesor que se ha considerado para la capa límite del vórtice a la entrada ($\epsilon = 0,01$, correspondiente a un 1 % del radio del conducto). Para conseguir más precisión cerca de la pared y no perder la información contenida en la pequeña capa límite, se ha usado un mallado de espaciado variable en la dirección y , con los nodos concentrados cerca de la pared (nótese en la figura 4.16 que para que cuatro nodos coincidieran dentro de la capa límite se hubieran necesitado 400 nodos con una discretización uniforme). Este

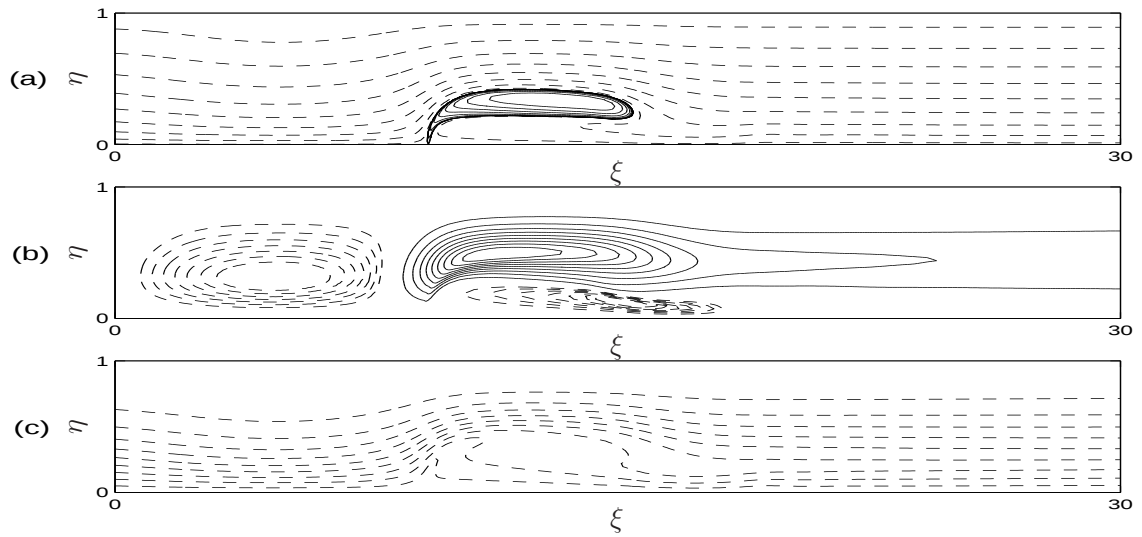


Figura 4.14: Contornos de (a) función de corriente, (b) vorticidad y (c) circulación obtenidos numéricamente para $Re = 2000$ y $L = 0,7475$ suponiendo que hay deslizamiento en la pared.

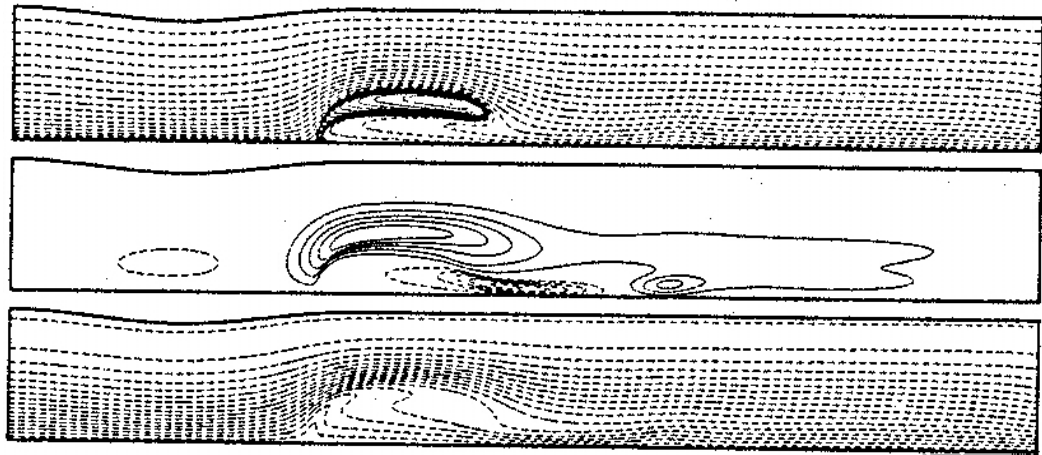


Figura 4.15: Contornos de función de corriente, vorticidad y circulación obtenidos por López (1994).

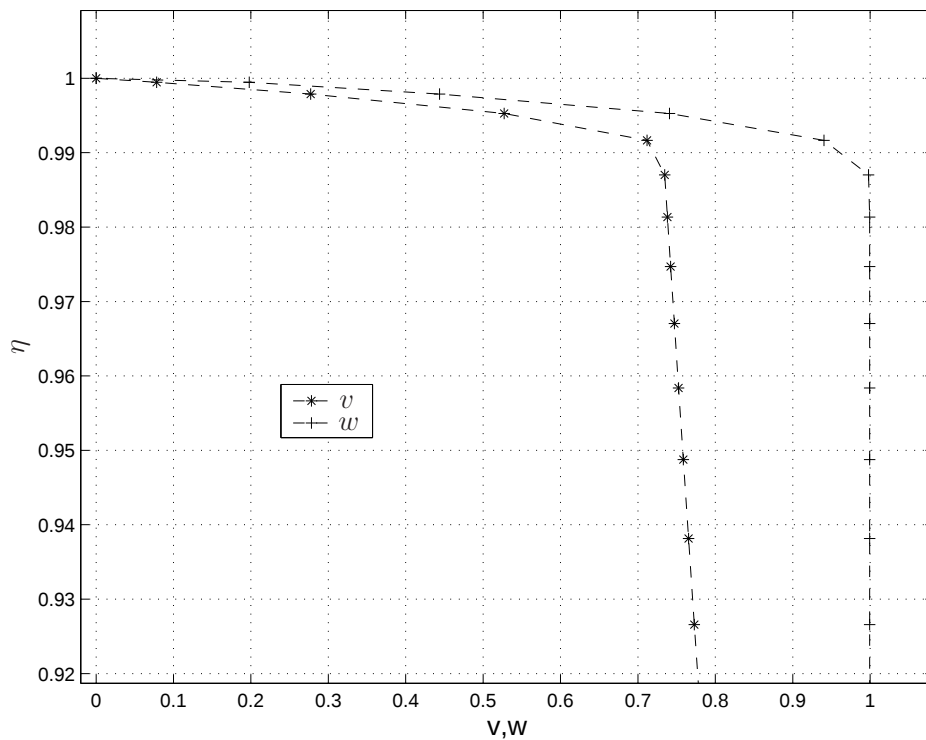


Figura 4.16: Detalle cerca de la pared de los perfiles de velocidad axial w y de giro v a la entrada del conducto.

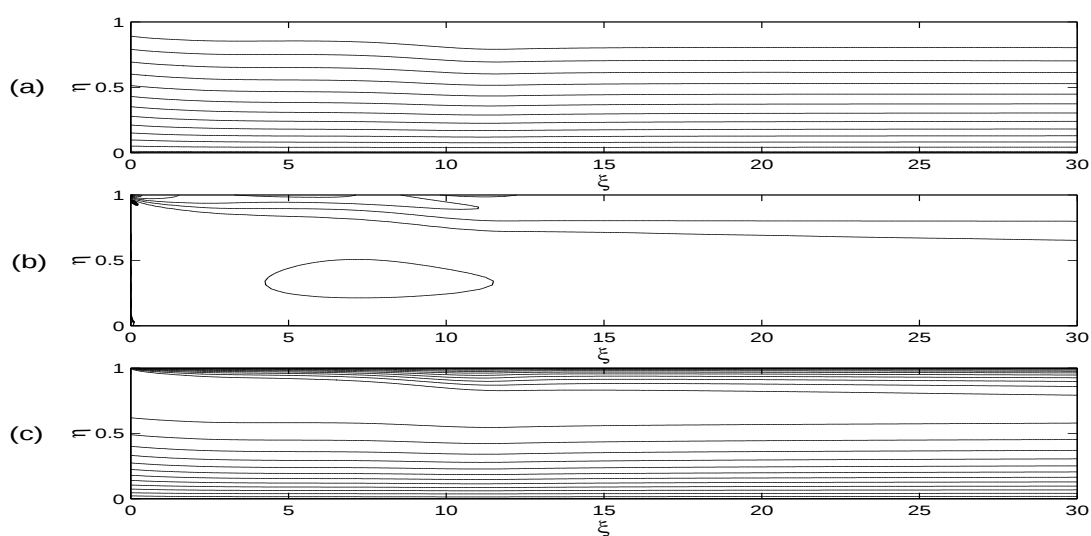


Figura 4.17: Contornos de (a) función de corriente, (b) vorticidad y (c) circulación obtenidos numéricamente para $Re = 2000$ y $L = 0,7475$ con la condición de contorno de no deslizamiento sobre la pared.

nuevo vórtice coincide con el no viscoso e irrotacional excepto en la pequeña capa límite cerca de la pared del conducto. Los resultados obtenidos con la condición de contorno de no deslizamiento y para los mismos valores de Re y L que los usados en la figura 4.14 se muestran en las figuras 4.17(a), (b) y (c). En ellas se puede observar como la solución es totalmente distinta a la obtenida para el caso de deslizamiento en la pared (figuras 4.14 y 4.15). La capa límite crece a lo largo de la pared [ver especialmente la figura 4.17(c)] y su interacción con el núcleo del vórtice da lugar a una solución muy distinta a la obtenida con la pared no viscosa. En particular, y de forma sorprendente, la burbuja de recirculación que surgió con motivo de la rotura del vórtice de entrada en el caso con deslizamiento desaparece al tenerse en cuenta el efecto de la viscosidad en la pared. Esto nos lleva a concluir que la exclusión de la viscosidad, incluso en regiones lejanas del núcleo principal del vórtice, puede dar lugar a resultados e interpretaciones erróneas en el estudio de la rotura de vórtices en conductos.

Capítulo 5

Flujo viscoso en conductos de sección variable: resultados

5.1. Introducción

En este capítulo se utiliza el código numérico descrito y validado en el capítulo anterior para resolver el mismo problema que el planteado en el capítulo 3, pero teniendo en cuenta ahora los términos viscosos. Los resultados se compararán con los no viscosos dados en aquel capítulo. Previamente se introducen en §5.2 las nuevas variables adimensionales y se discute en §5.3 el mallado óptimo con el que realizar las simulaciones numéricas. Para llevar a cabo la comparación se han realizado múltiples simulaciones con diferentes valores del número de Reynolds, Re , y del parámetro de giro, L , en dos de las tres configuraciones posibles de giro aguas arriba comentadas en el capítulo 3: giro tanto de la pared externa como del cuerpo central [caso (a)], y giro de la pared externa únicamente [caso (b)]. Los resultados se han resumido en el plano (Re, L) , donde se muestran las diferentes transiciones que experimenta el flujo en ambos casos.

5.2. Geometría

La geometría en la que se van a obtener los resultados numéricos que se presentan en este capítulo es la misma que la dada en (3.4)–(3.7). Sin embargo, dado que las variables adimensionales definidas en (4.21) son ligeramente distintas, se vuelve a reescribir

a continuación. El cuerpo interno viene dado por

$$r_i(z) = r_1 \tanh\left(-\alpha \frac{z}{r_{ei}}\right), \quad -e_1 \leq z \leq 0, \quad (5.1a)$$

$$r_i(z) = 0, \quad 0 < z \leq e_2, \quad (5.1b)$$

mientras que la pared externa es definida a través de r_i y de la sección interna del conducto, $A(z)$, que se supone conocida:

$$r_e(z) = \sqrt{\frac{A(z)}{\pi} + r_i^2(z)}, \quad -e_1 \leq z \leq e_2, \quad (5.2)$$

Usando la adimensionalización (4.21), y prescindiendo de la tilde, la forma adimensional de la geometría viene dada por

$$r_i(z) = R \tanh(-z), \quad -e_1 \leq z \leq 0, \quad (5.3a)$$

$$r_i(z) = 0, \quad 0 < z \leq e_2, \quad (5.3b)$$

y

$$r_e(z) = \sqrt{\mathcal{S}(z) + r_i^2(z)}, \quad -e_1 \leq z \leq e_2, \quad (5.4)$$

donde

$$e_1 = \frac{e_1}{r_{ei}/\alpha}, \quad e_2 = \frac{e_2}{r_{ei}/\alpha} \quad \text{y} \quad \mathcal{S} = \frac{A}{\pi r_{ei}^2}. \quad (5.5)$$

Con la adimensionalización (4.21), el parámetro geométrico α desaparece en r_i , apareciendo solamente en la forma adimensional de las ecuaciones. Téngase en cuenta que para la comparación directa con los resultados del capítulo 3, el parámetro α debe ser igual a la unidad. En cuanto a la sección exterior del conducto, para que sea posible la comparación con los resultados del capítulo 3, se usará un valor constante para $\mathcal{S}(z)$:

$$\mathcal{S}(z) = 1 - R^2. \quad (5.6)$$

Todas estas funciones, que definen el dominio físico del conducto, mostrado en la figura 5.1, se utilizarán en el cambio de coordenadas (4.32) para obtener el dominio computacional rectangular en el que resolver las ecuaciones del movimiento.

5.3. Análisis de la precisión de los resultados numéricos

En esta sección se van a comparar los resultados numéricos obtenidos con distintos valores del número de nodos y de los factores de escala, tanto en la dirección x como

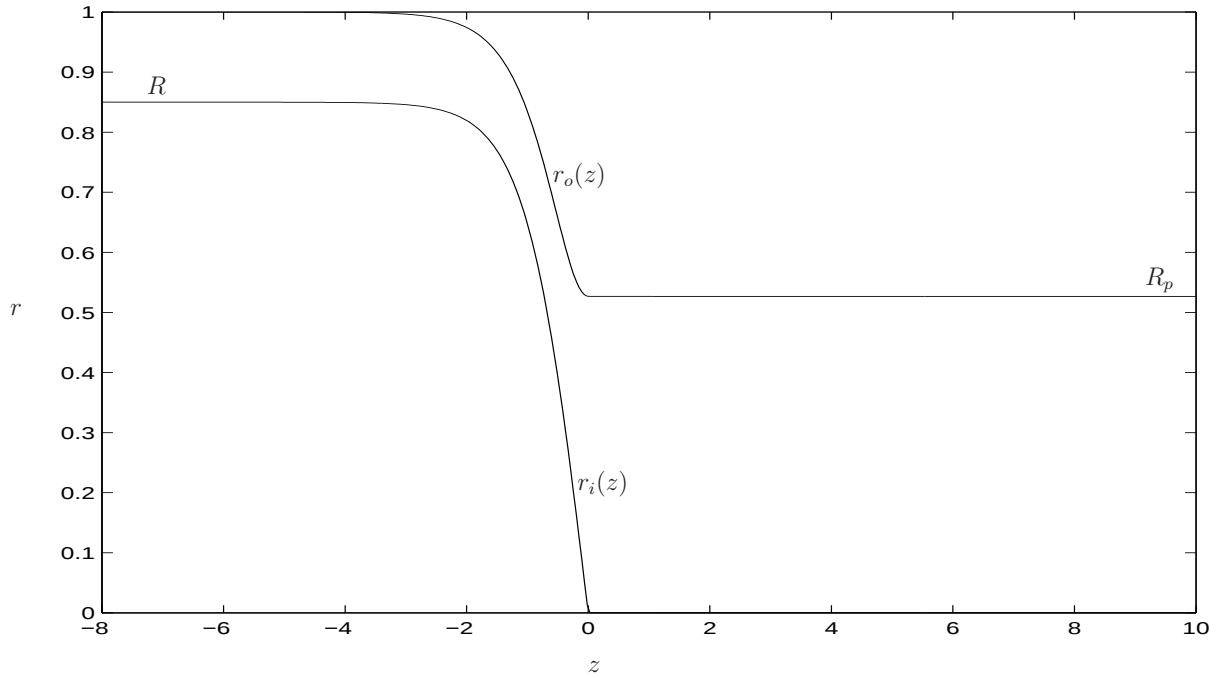


Figura 5.1: Geometría adimensional para $R = 0,85$, $e_1 = 8$, $e_2 = 10$ y sección constante.

en la dirección y , para evaluar la precisión del método numérico y seleccionar el número mínimo de nodos que proporcione resultados con una precisión aceptable prefijada. Para ello se compararán los resultados en la zona más “crítica”: la región comprendida entre el final del cuerpo central y la región inmediata sobre el eje de simetría, es decir, en torno a $z = 0$. Las variables que vamos a comparar van a ser la vorticidad, Π , sobre la pared del cuerpo central [sobre el eje de simetría es nula de acuerdo con la condición de contorno (4.20)] y la velocidad axial sobre el eje (sobre la pared del cuerpo central es nula por la condición de no deslizamiento).

El caso simulado corresponde a $Re = 400$, $L = 1,8$, $\xi_1 = 8$, $\xi_2 = 10$, $\alpha = 1$ y $R = 0,85$, cuando giran aguas arriba la pared externa y el cuerpo central. En la dirección x se llevaron a cabo una serie de simulaciones con diferentes números de nodos nx para esa dirección distribuidos tanto de forma uniforme ($nx = 400, 500$; $\beta_x = 0$), como no uniforme ($nx = 101$; $\beta_x = 5, 10, 12$; $\xi_s = 0$). Los perfiles de velocidad axial en el eje y de vorticidad en la pared del cuerpo central se muestran en las figuras 5.2(a) y 5.2(b), respectivamente. En ambas se puede observar como los perfiles obtenidos con las distribuciones no uniformes con $\beta_x = 10$ y $\beta_x = 12$ prácticamente colapsan en una sola, mejorando tanto la solución con $\beta_x = 5$, como la obtenida con $nx = 500$ y $\beta_x = 0$. En relación a ésta última, se obtiene, además, un ahorro de tiempo computacional por ser

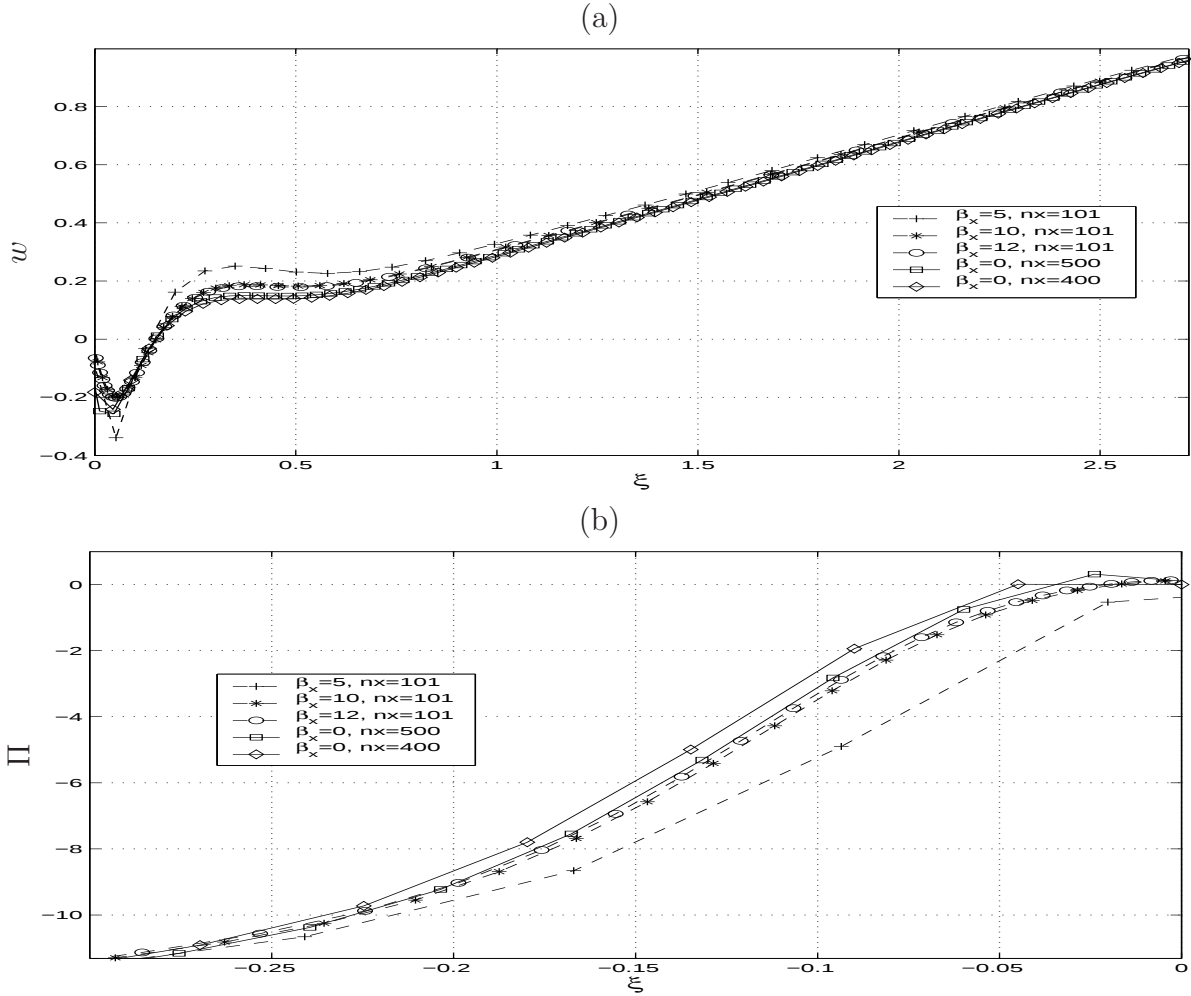


Figura 5.2: Perfiles de velocidad axial w sobre el eje de simetría (a), y perfiles de vorticidad Π sobre la pared del cuerpo central (b) para $Re = 400$, $L = 1,8$ y los valores de β_x y del número de nodos nx indicados. Todos los resultados son para $ny = 141$.

bastante menor el número de nodos. Por otro lado, el usar valores mayores de β_x supondría una pobre precisión en ambos extremos del conducto por concentrar demasiado los nodos en torno a $z = 0$. Por ello se usará $nx = 101$ y $\beta_x = 12$.

En cuanto a la dirección radial y , se hicieron una serie de simulaciones con distribuciones uniformes ($ny = 41, 81, 101, 141$). La comparación entre los distintos perfiles de velocidad axial se muestran en la figura 5.3(a), mientras que los de Π sobre la pared del cuerpo central se presentan en la figura 5.3(b). Se aprecia que los resultados con $ny = 141$ apenas mejoran la solución con $ny = 101$. Por ello, se usará $ny = 141$, pues no supone un coste computacional excesivo el pasar de $ny = 101$ a $ny = 141$ al no

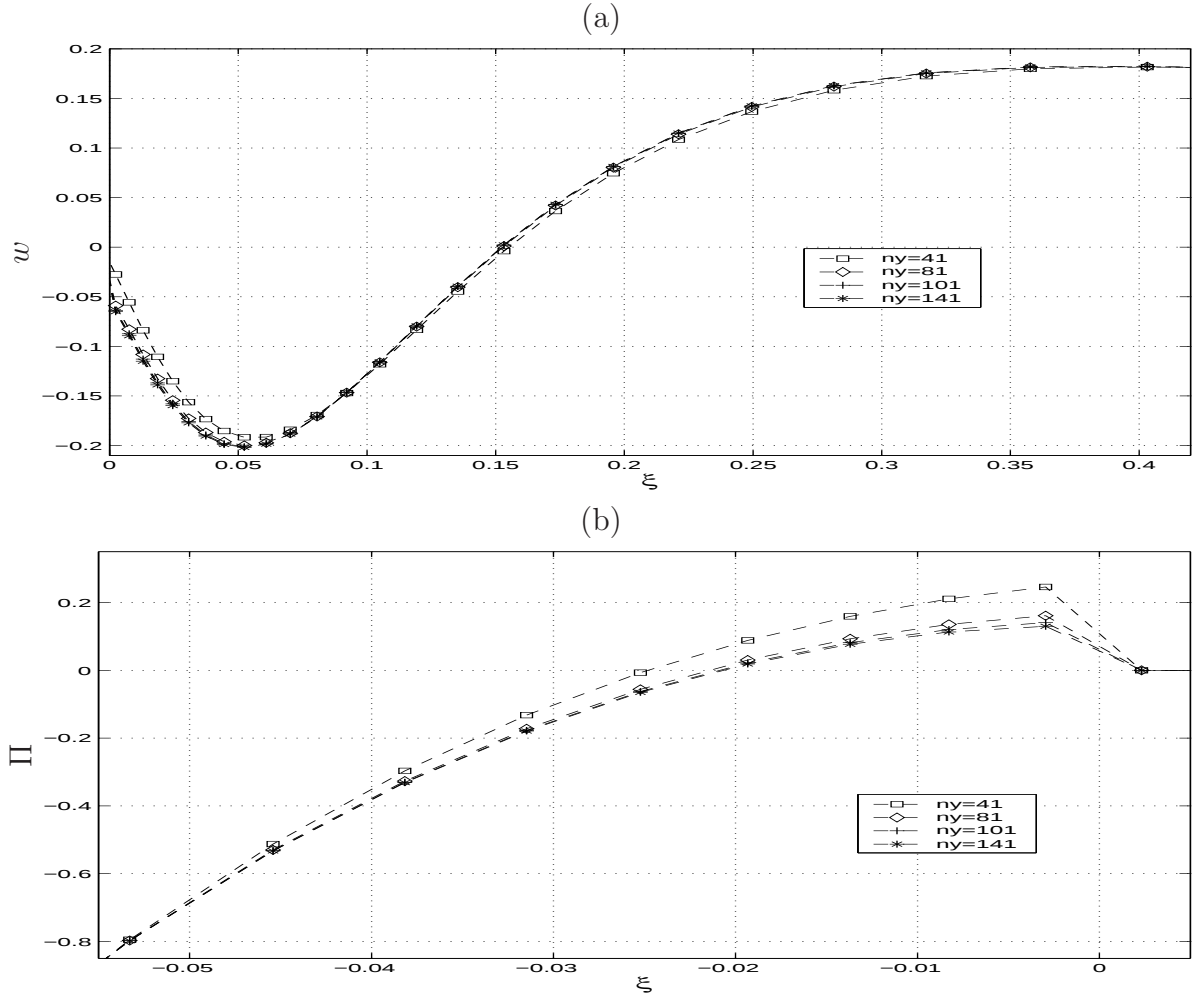


Figura 5.3: Perfiles de velocidad axial w sobre el eje de simetría (a) y perfiles de vorticidad Π sobre la pared del cuerpo central (b) para $Re = 400$, $L = 1,8$ y los números de nodos indicados. En todos los casos $nx = 101$ y $\beta_x = 12$.

ser muy alto el valor usado de nx . Con este valor relativamente alto para el número de nodos en la dirección y se decidió utilizar una distribución uniforme ($y_1 = 0$), ya que una concentración de nodos en la pared y en el eje no modifica los resultados apreciablemente. Resumiendo, los valores escogidos para las simulaciones presentadas a continuación son: $nx = 101$, $\beta_x = 12$, $\xi_s = 0$, $ny = 141$, $y_1 = 0$.

Otro parámetro numérico que hay que seleccionar es el intervalo temporal Δt , el cual está limitado fundamentalmente por la estabilidad numérica (recuérdese que el método numérico usado es explícito en el tiempo y tiene errores de segundo orden en Δt). Para ello se hicieron diversas pruebas, en las que se utilizaron los valores escogidos anteriormente

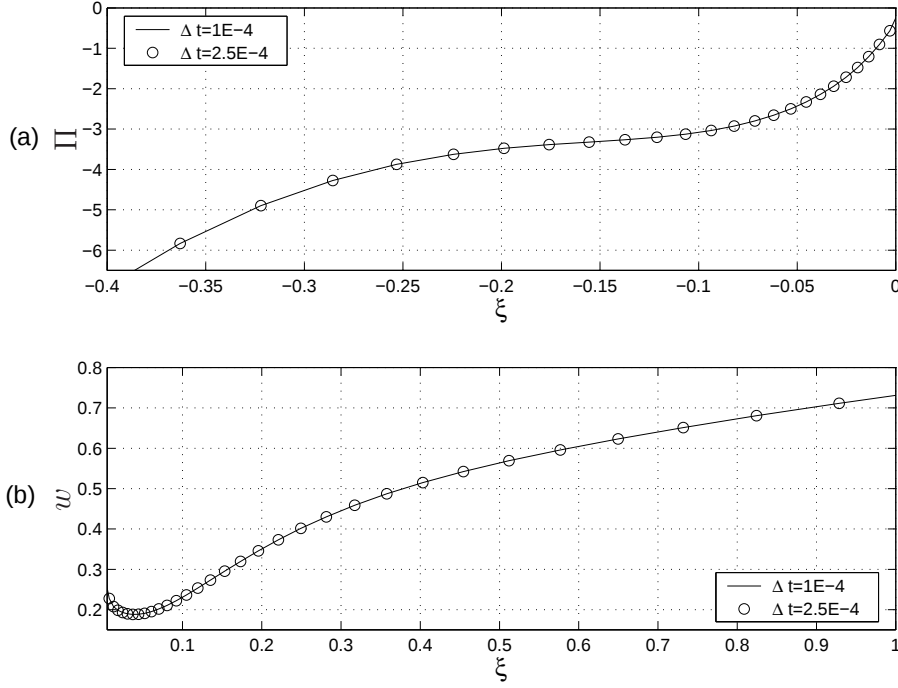


Figura 5.4: Perfiles estacionarios de vorticidad Π sobre el cuerpo central (a) y velocidad axial w sobre el eje de simetría (b), para $Re = 500$, $L = 0,2$ y los Δt indicados.

para los números de nodos y los factores de concentración, con varios números de Reynolds y con distintos valores para el paso temporal de la integración numérica. Se escogió siempre el mayor Δt que permitía obtener una solución estacionaria estable; es decir, se fue aumentando Δt hasta que la solución numérica crecía incontroladamente. Fijado el mallado, este valor máximo de Δt depende del número de Reynolds. Por ejemplo, en la figura 5.4 se comparan las soluciones estacionarias obtenidas con dos valores diferentes de Δt para los mismos Re y L . Se observa la total coincidencia entre los perfiles representados, por lo que en todas la simulaciones con $Re = 500$ se utilizó $\Delta t_{500} = 2,5E(-4)$. Para valores mayores de Δt_{500} , la solución numérica se hace inestable. Se ha observado que los valores de Δt máximos para cada Re siguen, aproximadamente, una ley lineal:

$$\Delta t_{Re} = \Delta t_{500} \frac{Re}{500}. \quad (5.7)$$

5.4. Resultados

Con los valores del número de nodos en cada dirección y de Δt seleccionados, se van a presentar a continuación las soluciones numéricas para diferentes valores del número de Reynolds y del parámetro de giro. Como se comentó en §5.1, de las tres posibles configuraciones para la generación del giro aguas arriba, se han estudiado exhaustivamente dos de ellas: giro tanto de la pared externa como del cuerpo central interno, y giro solamente de la pared externa. De la configuración restante sólo se mostrarán algunos resultados aislados. Las características fundamentales de las diferentes soluciones obtenidas se han plasmado en el plano (Re, L) , donde se muestran las diferentes transiciones que experimenta el flujo. La geometría objeto de estudio queda definida por los parámetros adimensionales $R = 0,85$, $\mathcal{S}(z) = 1 - R^2$, $\xi_1 = 8$, $\xi_2 = 10$ y $\alpha = 1$.

A la entrada, $z = -e_1$, el flujo sólo tiene componentes axial y azimutal, las cuales viene dadas por las ecuaciones:

$$0 = p_l + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} (w) \right), \quad (5.8a)$$

$$0 = \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v) \right) \right], \quad (5.8b)$$

cuyas soluciones son

$$w_{in} = C_1 \ln r - \frac{p_l}{\mu} \frac{r^2}{4} + C_2, \quad (5.9a)$$

$$v_{in} = K_1 r + \frac{K_2}{r}, \quad (5.9b)$$

donde p_l es el gradiente de presión reducida y C_1 , C_2 , K_1 y K_2 son constantes de integración. Las constantes C_1 y C_2 se obtienen de las condiciones de contorno,

$$\begin{aligned} w_{in}(r_{ei}) &= 0, \\ w_{in}(r_{ii}) &= 0, \end{aligned} \quad (5.10)$$

que proporcionan los valores

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{-p_l(r_{ei}^2 - r_{ii}^2)}{4\mu \ln R}, \\ C_2 &= -C_1 \ln r_{ii} + \frac{p_l}{4\mu} r_{ii}^2. \end{aligned} \quad (5.11)$$

El valor conocido del caudal a la entrada,

$$Q = 2\pi \int_{r_{ii}}^{r_{ei}} r w_{in} dr, \quad (5.12)$$

permite obtener el valor de p_l y, finalmente, el perfil de velocidad axial a la entrada. Usando las variables y los parámetros adimensionales definidos en (4.21), se tiene

$$w_{in} = \frac{w_{in}}{U} = \frac{w}{\frac{Q}{\pi(r_{ei}^2 - r_{ii}^2)}} = \frac{-2 \left[(1 - R^2) \ln \frac{r}{R} + (r^2 - R^2) \ln R \right]}{2 \ln R + (1 - R^2)(1 - \ln R)}. \quad (5.13)$$

Por otro lado, la velocidad circunferencial a la entrada depende de qué paredes estén girando. En las variables adimensionales (4.21), se tiene:

(a) giro de las dos paredes:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{in}(r_{ei}) = \Omega r_{ei} \\ v_{in}(r_{ii}) = \Omega r_{ii} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} K_1 = \Omega \\ K_2 = 0 \end{array} \right\}, \quad v_{in} = \frac{v_{in}}{U} = Lr, \quad (5.14)$$

(b) giro de la pared externa con la exterior fija:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{in}(r_{ei}) = \Omega r_{ei} \\ v_{in}(r_{ii}) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} K_1 = \frac{\Omega r_{ei}^2}{r_{ei}^2 - r_{ii}^2} \\ K_2 = \frac{-\Omega r_{ei}^2 r_{ii}^2}{r_{ei}^2 - r_{ii}^2} \end{array} \right\}, \quad v_{in} = L \left(\frac{r}{1 - R^2} - \frac{R^2}{r(1 - R^2)} \right), \quad (5.15)$$

(c) giro de la pared interna con la exterior fija:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{in}(r_{ei}) = 0 \\ v_{in}(r_{ii}) = \Omega r_{ii} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} K_1 = \frac{-\Omega r_{ii}^2}{r_{ei}^2 - r_{ii}^2} \\ K_2 = \frac{\Omega r_{ei}^2 r_{ii}^2}{r_{ei}^2 - r_{ii}^2} \end{array} \right\}, \quad v_{in} = L \left(\frac{R^2}{r(1 - R^2)} - \frac{rR^2}{1 - R^2} \right). \quad (5.16)$$

Estos perfiles de velocidad axial, w_{in} , y velocidad azimutal, v_{in} , nos permitirán obtener las condiciones de contorno a la entrada en términos de la función de corriente, ψ_{in} , y de la circulación, Γ_{in} , mediante

$$\psi_{in} = \int_R^r r w_{in} dr \quad \text{y} \quad \Gamma_{in} = r v_{in}. \quad (5.17)$$

En las subsecciones siguientes, §5.4.1 y §5.4.2, se van a mostrar los resultados viscosos en las configuraciones (b) y (a), respectivamente. Los resultados obtenidos para altos números de Reynolds permitirán la comparación con las soluciones no viscosas dadas en el capítulo 3. Téngase en cuenta que las variables adimensionales son distintas [ahora se ha usado (4.21) en vez de (3.3)] y que en el problema viscoso el perfil de velocidad axial a la entrada es de tipo Poiseuille en vez de ser uniforme [compárese (5.13) con (3.7)]. Por ello, se hará una comparación cualitativa de la estructura del flujo resultante y una comparación cuantitativa de los parámetros de giro críticos.

5.4.1. Giro de la pared externa con la interior fija [caso (b)]

Se va a comenzar por el caso en el que gira únicamente la pared externa [caso (b)], que presenta resultados más simples que el otro caso que se verá a continuación [caso (a)].

Las diferentes estructuras que aparecen en el flujo cuando se varían los dos parámetros adimensionales, Re y L , que lo controlan se muestran en la figura 5.5. Para realizar esta figura se han realizado numerosas simulaciones numéricas fijando una serie de números de Reynolds Re y aumentando el parámetro de giro L para cada Re . Se ha representado con distintos símbolos el comienzo de los diferentes cambios que aparecen en el flujo cuando L aumenta para cada Re , uniendo mediante *splines* estos puntos. Así, el plano (Re, L) queda dividido en diferentes regiones que a continuación se van a describir. Para apoyar gráficamente esta descripción y poder visualizar qué cambios están ocurriendo en el flujo al pasar de una región a otra del plano (Re, L) , nos vamos a ayudar de las figuras 5.12(a)–(m1), que para no entorpecer la presentación se han colocado al final del capítulo. En estas figuras se han representado los contornos de las soluciones estacionarias de las tres variables adimensionales incógnitas del problema, (i) ψ , (ii) Γ y (iii) Π , para valores crecientes de L y $Re = 100$. El incremento de L de una figura a otra se ha tomado pequeño para tener una pintura completa de los distintos flujos que aparecen a medida que L crece. Téngase en cuenta que sólo una parte de la geometría total se representa en las figuras 5.12(a)–(m1). Concretamente se representa la región en torno al final del cuerpo central, entre $-1,2 \leq z \leq 4$ y $0 \leq r \leq 0,8$, que es la más importante desde el punto de vista de la posible rotura del vórtice axial.

Las curvas que dividen el plano (Re, L) en la figura 5.5 son las siguientes:

1. Curva de cruces. Representa el valor mínimo de L para cada Re , para el que se produce el fenómeno de la rotura del vórtice axial. En la región situada debajo de esta curva no aparece ningún punto de remanso en el eje, es decir, no existe una “*burbuja*” de flujo de recirculación, ver las figuras 5.12(a)–(d). Por encima de esta curva aparece el primer punto de remanso sobre el eje con la consiguiente “*burbuja*”, ver las figuras 5.12(e)–(k).
2. Curva de círculos. Marca la desaparición de la primera burbuja que apareció en la curva de cruces. Ver figuras 5.12(l)–(z).
3. Curva de asteriscos. Por encima de esta curva aparece una segunda burbuja

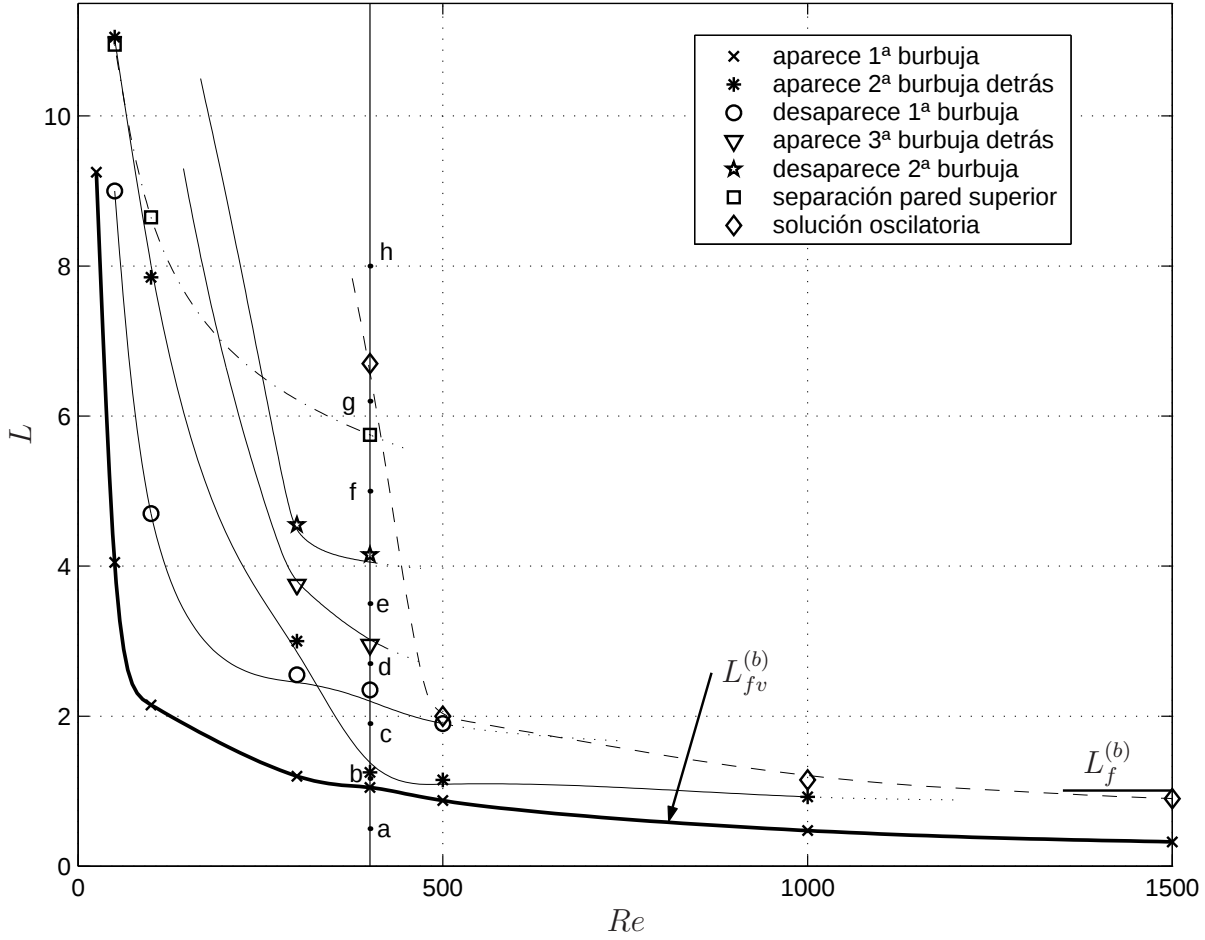


Figura 5.5: Transiciones entre los diferentes tipos de flujos en el plano (Re, L) para el caso de giro de la pared exterior con la interior fija. $L_f^{(b)}$ representa el valor crítico de L obtenido para este mismo caso con las ecuaciones no viscosas.

de recirculación sobre el eje y aguas abajo de la que apareció en la curva de cruces [ver figuras 5.12(a1)–(m1)]. Por encima de un determinado número de Reynolds, marcado por el cruce de las curvas de asteriscos y de círculos, coexisten simultáneamente la primera burbuja y esta segunda burbuja, mientras que para valores inferiores a este Reynolds, primero desaparece la única burbuja existente y después aparece esta segunda.

4. Curva de triángulos. En ella aparece una tercera burbuja aguas abajo de la única existente. Para el caso de $Re = 100$ no se llegó a los valores de L necesarios para visualizar esta nueva burbuja y por ello no se muestra en la figura 5.12.

5. Curva de estrellas: Marca la desaparición de la segunda burbuja. Tampoco se muestran contornos para este caso en la figura 5.12.
6. Curva de cuadrados. Marca el inicio de la separación de la corriente en la pared exterior [figuras 5.12(f1)–(m1)]. A medida que aumenta el parámetro de giro, se va produciendo una intensificación axial del flujo cerca de la pared del cuerpo central, marcado por una concentración de líneas de corriente cerca de esta pared, que provoca la separación de la corriente en la pared externa para valores de L superiores a los de la curva de cuadrados. Esta región de recirculación aparece primero en la región de contracción del conducto, y se va extendiendo hacia el conducto uniforme a medida que aumenta L .
7. Curva a trazos con diamantes. Para valores de L por encima de esta curva el flujo ya no alcanza un estado estacionario, sino que tiende hacia una solución oscilatoria, que no se representa en la figura 5.12. En las figuras 5.6(a) y (b), se muestra la evolución temporal de Π y Γ , normalizadas con el valor de cada una en $t = 0$ para una mejor representación, en un punto fijo de coordenadas $x = \frac{9\pi x}{10}$ e $y = \frac{\pi y}{2}$, para los diferentes valores de Re y L indicados. En ellas se observa como para valores de $L < L_\diamond$ ($\simeq 1,95$ para $Re = 500$) la solución alcanza un estado estacionario, mientras que para $L > L_\diamond$, concretamente para $L = 2,0$ con $Re = 500$, la solución es oscilatoria.

Para completar la descripción de las distintas estructuras del flujo representadas en la figura 5.5, se enumeran a continuación las diferentes estructuras que aparecen para otro número de Reynolds distinto. En concreto, se ha tomado $Re = 400$ (línea vertical en la figura 5.5) y se han marcado diferentes puntos sobre ella. Cuando se aumenta L desde cero, los puntos que nos encontramos son los siguientes:

Punto a: Flujo sin burbuja de recirculación.

Punto b: Aparece la primera burbuja sobre el eje de simetría.

Punto c: Aparece la segunda burbuja aguas abajo de la anterior.

Punto d: Desaparece la primera burbuja que había aparecido.

Punto e: Una nueva burbuja aparece aguas abajo de la única existente.

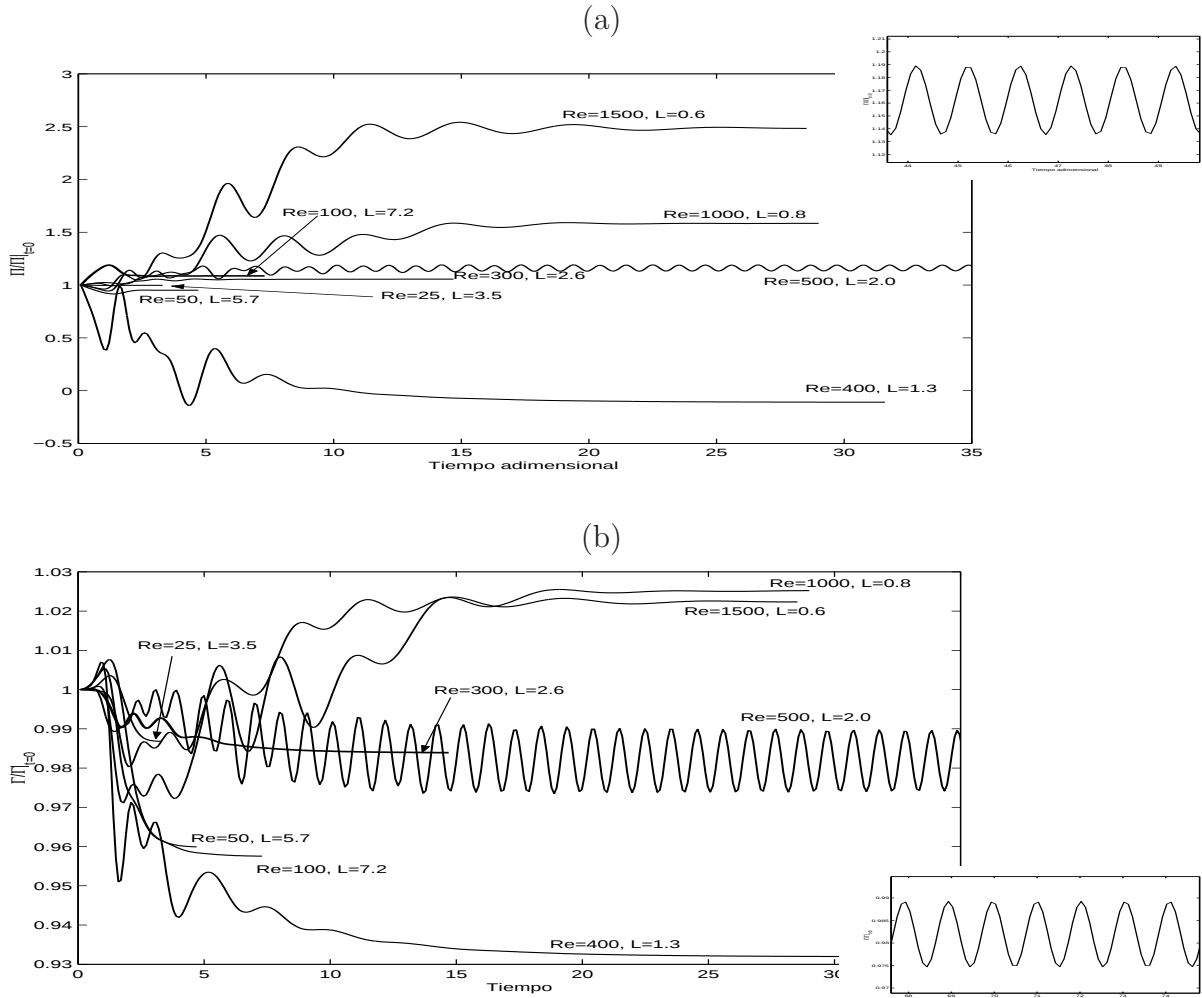


Figura 5.6: Evolución temporal de la vorticidad Π , figura (a), y de la circulación Γ , figura (b), para los valores de Re y L indicados. Se muestra ampliada la solución oscilatoria para el caso $Re = 500$ y $L = 2,0$.

Punto f: Desaparece la segunda burbuja.

Punto g: Sobre el eje existe una única burbuja y se produce la separación de la corriente en la pared exterior.

Punto h: La solución se hace oscilatoria.

Desde el punto de vista del fenómeno de la rotura de vórtices, todas las curvas que en la figura 5.5 marcan la aparición de una burbuja de recirculación sobre el eje nos están indicando una rotura del vórtice axial. Pero estas múltiples roturas que aparecen no son siempre de la misma naturaleza. Para verlo, en la figura 5.7 se ha dibujado el mínimo de la

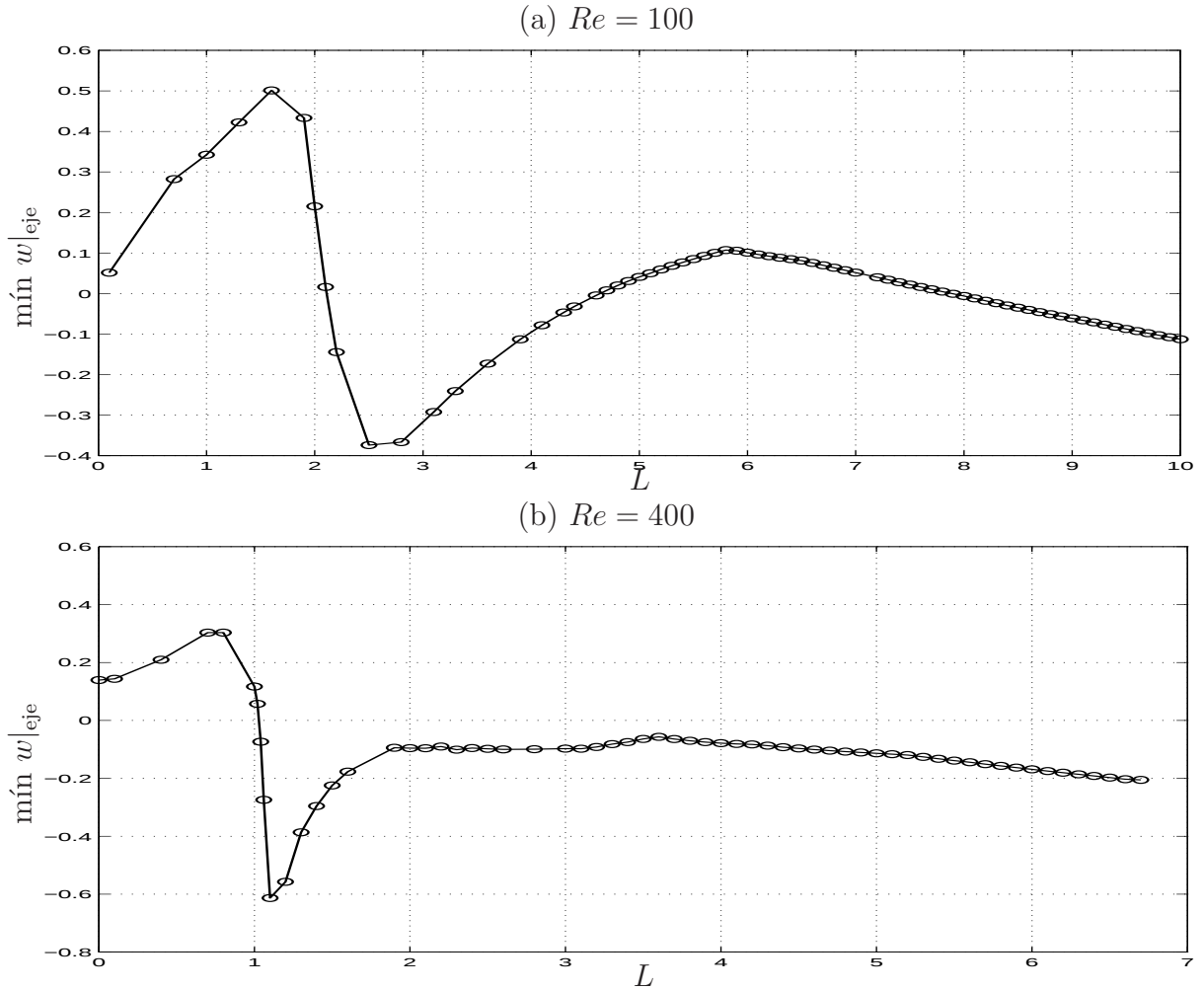


Figura 5.7: Mínimo de la velocidad axial en el eje de simetría del conducto en función de L para el caso (b) con $Re = 100$, figura (a), y $Re = 400$, figura (b).

velocidad axial en el eje de simetría en función del parámetro de giro L , para dos números de Reynolds, $Re = 100$ en la figura 5.7(a) y $Re = 400$ en la (b). Una velocidad axial positiva significa un flujo sin rotura del vórtice, mientras que una velocidad axial negativa significa un flujo con rotura. Al aumentar el parámetro de giro desde $L = 0$, el mínimo de la velocidad va creciendo en ambas figuras (a) y (b). Esto nos indica que en el eje existe un chorro axial que se va acelerando al aumentar L por el efecto de la succión en el eje que produce el giro. Por encima de un L crítico se produce una brusca ca da del mínimo de la velocidad axial hasta hacerse negativo: se ha producido la rotura del vórtice axial. Este L crítico viene marcado por la curva de cruces en la figura 5.5, de forma que $L_{\times}(Re)$ es el valor crítico de rotura. Esta rotura ‘‘brusca’’ es similar a la presentada en el capítulo

2, §2.4, para un flujo con un chorro intenso en el eje, pero regularizado a la entrada. Se vio que el parámetro de giro presenta un máximo, L_f , por encima del cual no existe solución cilíndrica para el caso de un conducto divergente. Para $L > L_f$, la solución no viscosa presentaba una burbuja de flujo estancado en el eje. Para el problema viscoso que se está abordando en esta sección, el código numérico desarrollado proporciona soluciones numéricas estables, de forma que el salto brusco de las figuras 5.7(a) y (b) representa un salto desde una rama de soluciones estables a otra también estable al llegarse a un punto de bifurcación. Por tanto, la curva de cruces de la figura 5.5 nos marca el parámetro de giro crítico viscoso para cada valor del número de Reynolds Re , $L_{fv} \equiv L_{\times}(Re)$. Una vez que se produce el salto en el mínimo de la velocidad axial y éste alcanza su valor más pequeño, el aumento de L va produciendo un aumento del mínimo de la velocidad axial en el eje. En la figura 5.7(a), este mínimo aumenta hasta hacerse positivo, es decir, se supera la curva de círculos de la figura 5.5, que indica que ha desaparecido la burbuja que existía en el eje. Sin embargo, en la figura 5.7(b), el aumento de L no provoca un cambio de signo en el mínimo de la velocidad axial, pues para ningún valor de L se da una configuración sin burbuja de recirculación en el eje: cuando desaparece la primera, ya se ha originado la segunda, y sucesivos incrementos en el valor de L mantendrán el mínimo de w negativo. En la figura 5.7(a), si se sigue aumentando el valor de L por encima de L_* , de nuevo el mínimo de w en el eje se vuelve a hacer negativo: ocurre una segunda rotura de vórtices. En este caso, al contrario que en la primera rotura para $L = L_{\times}$, la transición no es brusca, sino que el mínimo de w se hace negativo de una forma suave.

Esto quiere decir que existen, al menos, dos tipos de rotura del vórtice axial, una brusca y otra suave. Para entender mejor la diferencia entre ellas, en las figuras 5.13(a)–(g) (que de nuevo se han colocado al final para no entorpecer la lectura), se representan los perfiles radiales de la velocidad axial, w , y de velocidad azimutal, v , en dos posiciones axiales distintas, (i) e (ii), aguas arriba y aguas abajo en el conducto, respectivamente, para $Re = 100$ y diferentes valores de L . En las figuras 5.13(a), (b) y (c), la posición (i) donde se muestran los perfiles radiales corresponde a $z = 0,013$, que cae justo detrás del cuerpo central. De la velocidad axial de estas figuras en la posición (i) se observa que no se ha producido la rotura del vórtice axial y el aumento del parámetro L sólo provoca una aceleración del flujo cerca del eje que tiende a desplazar el máximo de la velocidad axial hacia el eje. En cuanto a la velocidad azimutal v , el aumento de L lleva

consigo un aumento de la intensidad de giro en esa posición axial. La posición (ii) de las figuras 5.13(a), (b) y (c), corresponde a $z = 3,048$. Se observa que al no existir rotura, el perfil de velocidad axial va tendiendo a uno de Poiseuille, mientras que la intensidad del giro va decayendo (ver §4.7.1). En la figura 5.13(c), la posición $z = 3,048$ no está lo suficientemente lejos como para que el máximo de w haya alcanzado el eje.

Los valores de L de las figuras 5.13(d) y (e) son mayores que L_{fv} y, por tanto, se ha producido la rotura del vórtice axial. En ellas se comparan los perfiles antes de (i), y en interior de (ii), la burbuja. Se observa cómo se pasa de un flujo axial intenso (pero en forma de “estela”) cerca del eje, con una velocidad axial positiva en el eje [figuras (i)], a un flujo axial con un máximo más alejado del eje y con velocidad axial negativa en el eje, y en el que se ha producido una disminución importante en la intensidad del giro cerca del eje, marcada por una disminución de la pendiente del perfil de v en el eje [figuras (ii)]. Si comparamos la secuencia (i) de las figuras (a), (b), (c) y (e), en las que todos los perfiles están en la misma posición axial $z = 0,013$, se puede observar como el aumento de L va desplazando el máximo del flujo axial hacia el eje en (a), (b) y (c), mientras que en (e) el máximo se ha alejado del eje. Es decir, por encima de un valor de L cesa la tendencia a concentrarse el flujo axial en torno al eje y comienza a concentrarse en otras posiciones radiales lejos de él. Este efecto explica por qué para valores de L mayores, figura 5.13(f), desaparece la burbuja de rotura: se alcanza una situación en la que, a pesar que L aumenta, no se dan las condiciones necesarias para que se produzca la rotura del vórtice axial al no existir una estructura de chorro (o estela) en el eje. La consecuencia del aumento de L ha sido desplazar el chorro axial hacia posiciones radiales alejadas del eje, encontrándose la región cercana a él prácticamente remansada [ver figura 5.13(f)(i)]. Para una posición axial aguas abajo de la anterior, figura 5.13(f)(ii), el giro ha decaído brutalmente y el flujo axial se ha uniformizado. Por último, en la figura 5.13(g), correspondiente a un punto del plano (Re, L) de la figura 5.5 por encima de la curva de asteriscos, aparece de nuevo una prácticamente inapreciable rotura del vórtice axial. En la figura 5.13(g)(i) se observa que, al igual que en la figura 5.13(f)(i), no se dan las condiciones para que ocurra una rotura de vórtices brusca: el flujo está prácticamente remansado en torno al eje, estando la intensidad tanto de la velocidad axial como de la azimutal concentradas lejos del eje. En la figura 5.13(g)(ii) la velocidad axial es negativa en el eje, habiendo por tanto una burbuja de recirculación donde el flujo más bien está casi

estancado, y por tanto se ha producido una rotura “suave” del vórtice axial.

Esta transición suave a un flujo con recirculación axial es comparable a la descrita en la sección 2.4.1 (figuras 2.9) en un conducto divergente cuando el perfil de velocidad axial a la entrada era uniforme (caso analizado por Batchelor, 1967). A diferencia del caso de un perfil en forma de chorro a la entrada, donde la transición al flujo con burbuja axial es brusca, con un L_f máximo correspondiente a un proceso de histéresis de las soluciones no viscosas, cuando el perfil de velocidad a la entrada es uniforme, se produce una transición suave hasta un punto de remanso en el eje. Por tanto, las situaciones de rotura de vórtices que nos encontramos por encima de la curva de cruces en la figura 5.5 son equivalentes a las descritas por las líneas de puntos en las figuras 2.9 para un conducto divergente, que se pueden calificar como rotura de vórtices “suaves”.

Resumiendo, esta geometría tiene el interés de que en el conducto uniforme tienen lugar dos tipos de roturas de vórtices: la rotura de vórtices brusca o rotura típica en conductos, que se produce por encima de un L crítico cuando el flujo axial es intenso cerca del eje, y la rotura de vórtices suave, que aparece por encima de un L crítico cuando el flujo axial cerca del eje es prácticamente uniforme. En este último caso se suelen producir “burbujas” de recirculación más grandes, pero con velocidad interior prácticamente nula.

Concluimos, por tanto, que la curva más relevante de la figura 5.5 para el caso en el que gira únicamente de la pared exterior, es la curva de cruces, la cual marca la transición a la rotura del vórtice axial, $L_{fv}(Re)$. El resto de las curvas, como acabamos de ver, nos indican transiciones suaves a puntos de remanso en el eje (desaparición o aparición de burbujas de recirculación casi estancadas). Para $Re \rightarrow \infty$, $L_{fv}^{(b)}$ debería tender al valor $L_f^{(b)}$ obtenido en el capítulo 3 para el mismo problema no viscoso, el cual también se ha representado en la figura 5.5. Sin embargo, esto no es así, confirmando la diferencia que existe entre un mismo problema resuelto con viscosidad y en ausencia de ella.¹ De hecho, la estructura del flujo no viscoso obtenido en el capítulo 3 no tiene nada que ver con lo que se acaba de presentar. Esta divergencia de resultados viscosos y no viscosos es incluso mucho más acusada en el caso que se va a considerar a continuación.

¹ $L_f^{(b)}$ parece coincidir con el valor asintótico de $L_\diamond$, para el que la solución se hace oscilatoria. Pero esto es pura casualidad, pues en el caso que se verá a continuación, L_f no tiene nada que ver con $L_\diamond$ (ver figura 5.8).

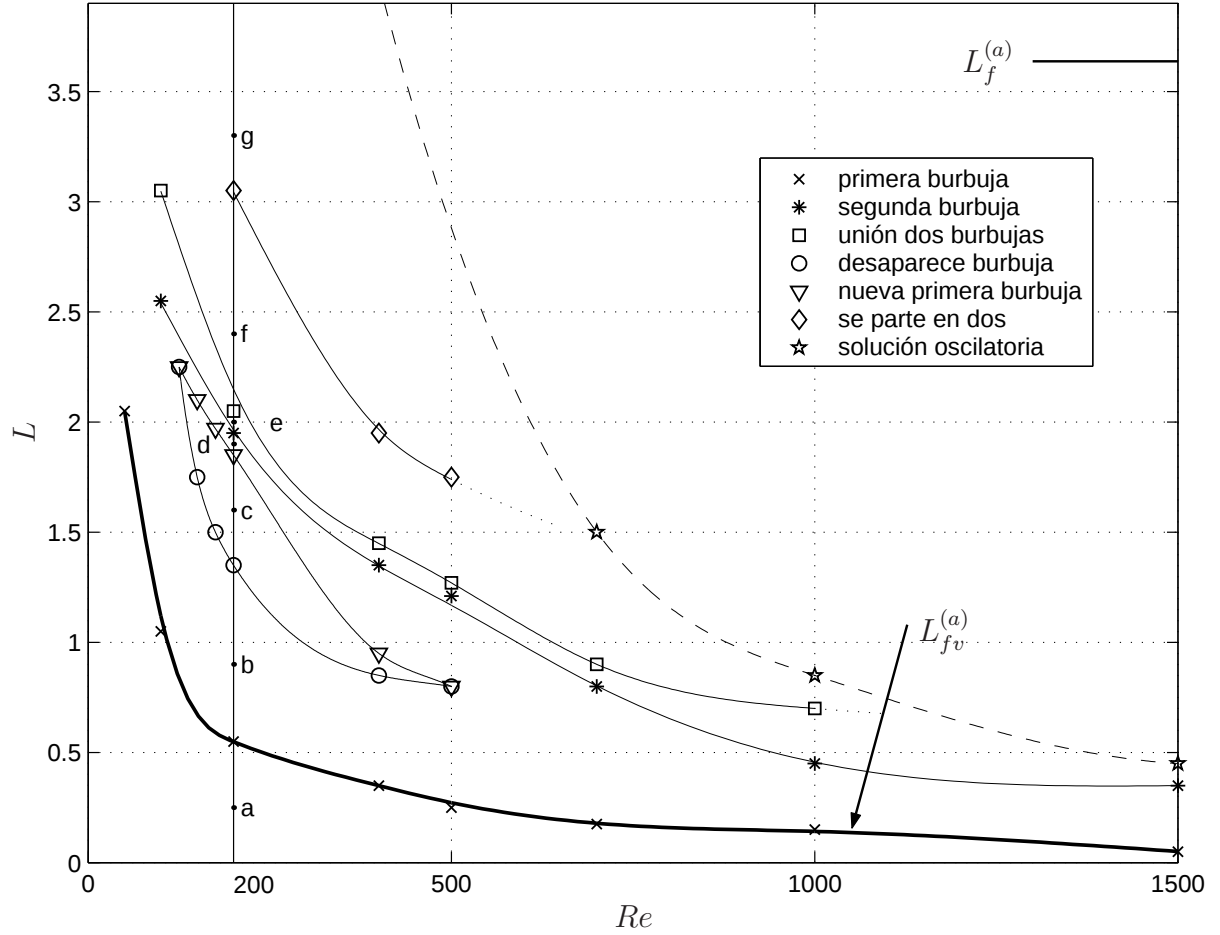


Figura 5.8: Transiciones entre los diferentes tipos de flujos en el plano (Re, L) para el caso de giro de las paredes externa e interna. $L_f^{(a)}$ representa el valor crítico de L obtenido para este mismo caso con las ecuaciones no viscosas.

5.4.2. Giro de las paredes externa e interna [caso (a)]

La presentación de los resultados obtenidos para este caso en el que tanto la pared exterior como la del cuerpo central interno giran aguas arriba, va a seguir la misma secuencia que se siguió para el caso (b) presentado en §5.4.1.

En primer lugar, la figura 5.8 muestra las diferentes transiciones que experimenta el flujo en el plano (Re, L) . Para su comprensión, nos ayudamos de los contornos de las tres variables (i) ψ , (ii) Γ y (iii) Π que se muestran en las figuras 5.14(a)–(b1) para el caso $Re = 200$ y valores secuenciales del parámetro de giro L . El significado de las diferentes curvas que aparece en la figura 5.8 son los siguientes:

1. Curva de cruces. Marca la separación entre flujo sin burbuja de recirculación, parte

inferior a esta curva [ver figuras 5.14(a)–(c)], y flujo con burbuja de recirculación en el eje, parte superior a la curva [ver figuras 5.14(d)–(k)].

2. Curva de círculos. Marca la desaparición de la primera burbuja de recirculación [ver figuras 5.14(l)–(ñ)]. Esta desaparición de la burbuja solamente tiene lugar para un intervalo de números de Reynolds (entre $Re = 125$ y $Re = 500$, aproximadamente).
3. Curva de triángulos. Por encima de ella vuelve a aparecer una primera burbuja, ver la figura 5.14(o). Al igual que para la curva de círculos, ésta sólo existe entre el mismo intervalo de números de Reynolds.
4. Curva de asteriscos. Por encima de ella aparece una segunda burbuja de recirculación aguas abajo de la existente, ver las figuras 5.14(p)–(r). Como puede verse en estas figuras, existen dos burbujas de recirculación, aumentando de tamaño con el aumento de L la última que ha aparecido.
5. Curva de cuadrados. Marca la unión de las dos burbujas existentes en una sola [ver figuras 5.14(s)–(y)].
6. Curva de diamantes. Para $L > L_\diamond$ la única burbuja existente se parte en dos [ver figuras 5.14(z)–(b1)].
7. Curva a trazos. Para valores de Re y L situados a la derecha de esta curva, el flujo no alcanza un estado estacionario, llegándose a una solución oscilatoria. En las figuras 5.9(a) y (b) se ha representado la evolución temporal de la vorticidad Π y de la circulación Γ , respectivamente, en un punto fijo de coordenadas $x = \frac{9nx}{10}$ e $y = \frac{ny}{2}$, para los valores del número de Reynolds y del parámetro L indicados. En ella se pueden observar las soluciones estacionarias para diversos casos situados a la izquierda de la línea de trazos de la figura 5.8, y una solución oscilatoria correspondiente a un punto a la derecha de esta línea. También se han incluido dos ampliaciones de la solución oscilatoria.

Para complementar esta descripción de los diferentes tipos de flujo, se enumeran a continuación las diversas estructuras por las que va pasando el flujo cuando, para un valor fijo del número de Reynolds, $Re = 200$, se va aumentando el valor de L . Para ello se

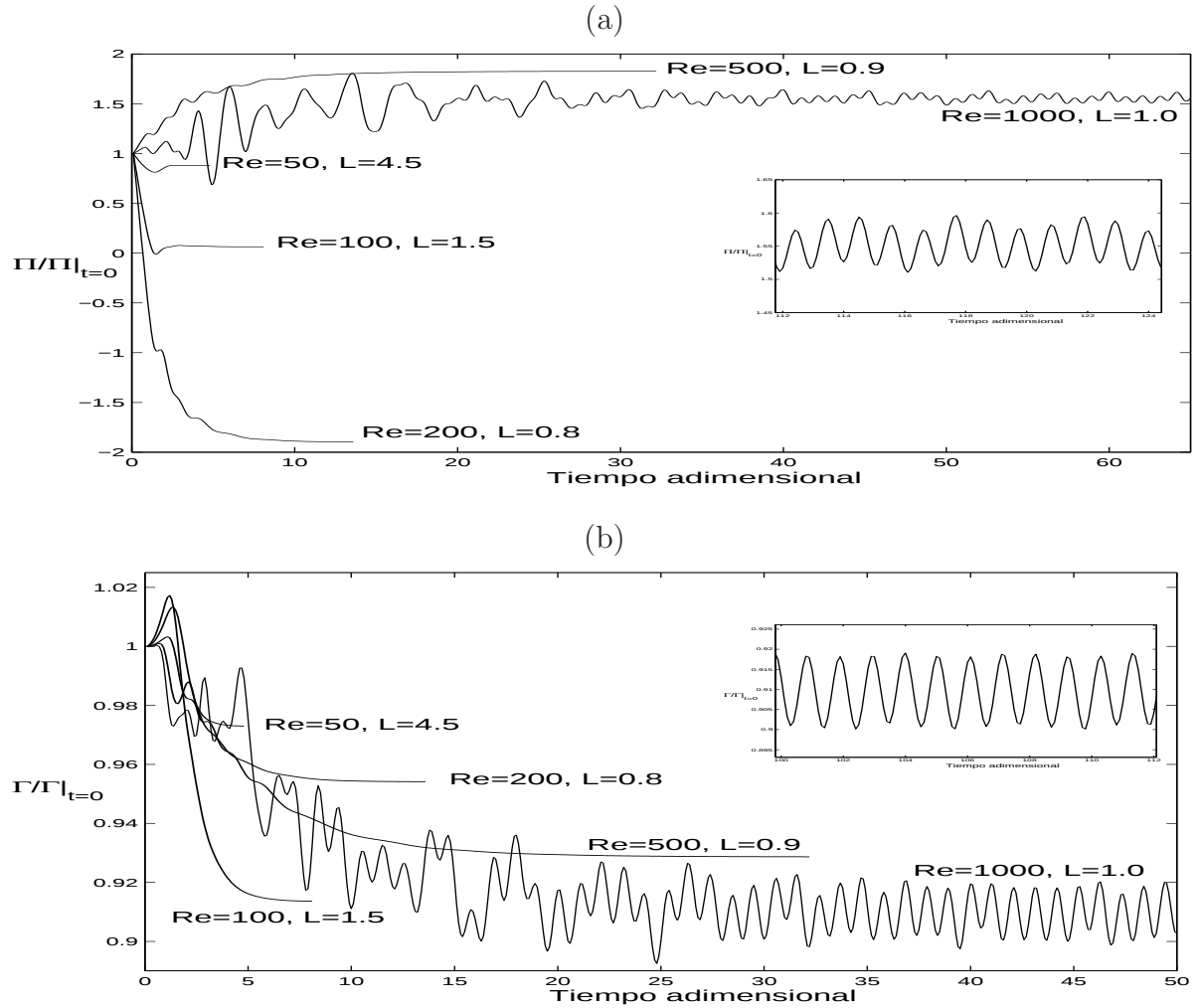


Figura 5.9: Evolución temporal de la vorticidad Π , figura (a), y la circulación Γ , figura (b), para los valores de Re y L indicados. Se muestra ampliada la solución oscilatoria para el caso $Re = 1000$ y $L = 1,0$.

han marcado distintos puntos sobre una línea continua vertical en la figura 5.8. El flujo existente en cada punto es el siguiente:

Punto a: Flujo sin burbuja de recirculación.

Punto b: Aparece la primera burbuja con un punto de remanso sobre el eje de simetría.

Punto c: La burbuja desaparece.

Punto d: Aparece otra burbuja aguas abajo del punto en que apareció la primera.

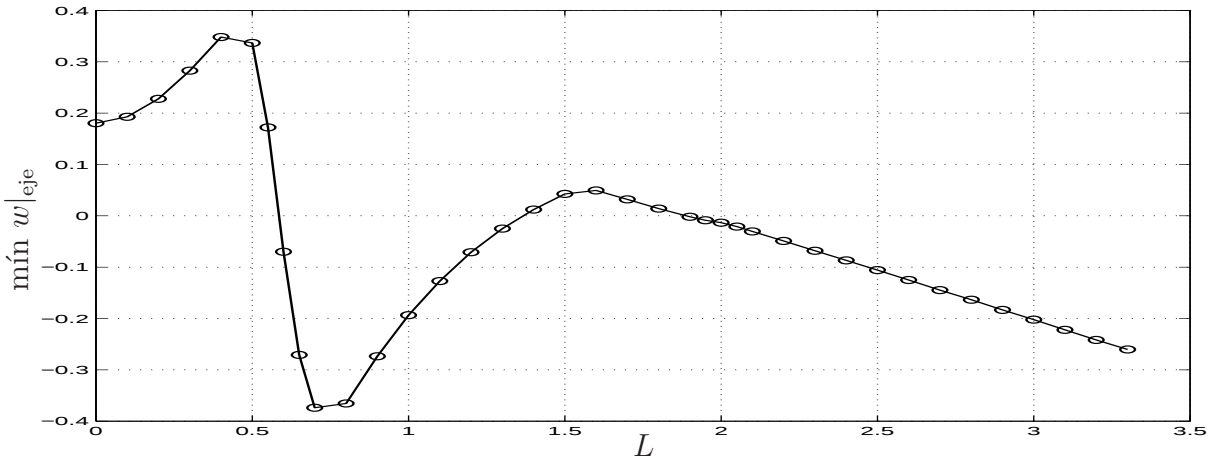


Figura 5.10: Mínimo de la velocidad axial en el eje de simetría del conducto en función de L para la configuración de giro de las dos paredes [caso (a)] y $Re = 200$.

Punto e: Aparece una nueva burbuja detrás de la anterior. Existen simultáneamente dos burbujas.

Punto f: Las dos burbujas se unen en una sola.

Punto g: La única burbuja se rompe en dos.

Como ocurre en el caso descrito en §5.4.1, de todas las curvas mostradas en la figura 5.8, la más relevante es la que marca la aparición de la primera burbuja, $L = L_{\times}(Re)$ que, como veremos, corresponde a una rotura “brusca” del vórtice axial, mientras que las otras curvas que aparecen para valores mayores de L indican una rotura “suave”. En la figura 5.10 se ha dibujado el mínimo de la velocidad axial en el eje para $Re = 200$ en función del parámetro L . Al aumentar L desde $L = 0$ se va acelerando el flujo en el eje hasta que se produce una caída brusca en el valor del mínimo de la velocidad axial llegando a hacerse negativo para $L \simeq 0,6$, correspondiente a $L_{\times}(200)$ en la figura 5.8. Una vez que el mínimo de la velocidad alcanza su valor más pequeño, valores mayores de L vuelven a aumentar el mínimo de la velocidad axial hasta hacerlo positivo. Esto significa que en el eje ha dejado de haber una burbuja, correspondiendo esta configuración con un valor de L por encima de la curva de círculos de la figura 5.8. Un nuevo aumento de L por encima de L_{∇} en la figura 5.8 provoca de nuevo el cambio de signo en el mínimo de velocidad axial, es decir, vuelve a aparecer una burbuja de recirculación. Como se ve, esta nueva transición desde velocidad positiva a negativa es una transición suave que corresponde a

lo que hemos llamado como rotura de vórtices suave.

Estas diferentes rotura de vórtices, brusca y suave, que hemos explicado con la figura 5.10, también se puede describir a través de los perfiles radiales de la velocidad axial y azimutal, presentados en las figuras 5.15(a)–(e), en dos posiciones axiales distintas, (i) e (ii). Estas dos posiciones axiales corresponden a puntos aguas arriba y aguas abajo en el conducto, respectivamente, en las figuras (a), (b) y (c), para los que no existe rotura del vórtice axial, y corresponden a posiciones axiales justo delante y en el interior de la burbuja, respectivamente, en las figuras (d) y (e), para los que sí se ha producido la rotura del vórtice axial. El comportamiento del flujo en las posiciones (i) e (ii) en las figuras 5.15(a), (b) y (c), es idéntico al comentado para las figuras 5.13(a), (b) y (c): en las posiciones (i), el aumento de L acelera el flujo axial cerca del eje y lo concentra en torno a él, a la vez que va aumentando el máximo del giro en esa posición axial. En las posiciones (ii) se observa que el flujo tiende a uno de Poiseuille sin giro. La figura 5.13(d), correspondiente a un punto justo por encima de la curva de círculos de la figura 5.8, para el que existe rotura del vórtice axial, presenta, en la posición (i) justo delante de la burbuja, una estructura tipo estela cerca del eje, con el flujo axial concentrado cerca de él, y con el máximo de la velocidad azimutal también cerca del eje. Estas condiciones son las necesarias para que se produzca la rotura del vórtice, figura 5.13(d)(ii), donde se observa que la velocidad axial es negativa en el eje, desplazándose el flujo axial hacia posiciones radiales más exteriores, y con una disminución en la intensidad del giro cerca del eje. Por último, en la figura 5.13(e), para la que también existe rotura del vórtice axial, se observa que delante de la burbuja, posición (i), el perfil de velocidad axial es casi uniforme cerca del eje con casi todo el flujo axial, y la máxima intensidad de giro, concentrados cerca de la pared exterior. Bajo estas condiciones la rotura del vórtice que ocurre es una rotura del tipo suave, obteniéndose dentro de la burbuja los perfiles radiales mostrados en la figura 5.13(e)(ii).

Resumiendo, para esta configuración (a) vuelven a aparecer los dos tipos de rotura de vórtices, el brusco y el suave. La curva de cruces de la figura 5.8, que marca la transición brusca, nos está indicando el valor crítico del parámetro de giro viscoso $L_{fv}^{(a)} \equiv L_{\times}$. Con el fin de llevar a cabo la comparación con el problema no viscoso, en la figura 5.5 también se ha incluido el valor del parámetro de giro crítico no viscoso $L_f^{(a)} \simeq 3,65$, que es notablemente superior a $L_{fv}^{(a)}$ para $Re \rightarrow \infty$. La estructura del flujo no viscoso para

$L > L_f^{(a)}$ (figura 3.10) tampoco tiene nada que ver con las estructuras para $L > L_{fv}^{(a)}$ descritas arriba.

5.4.3. Giro de la pared interna [caso (c)]

Este caso no ha sido estudiado exhaustivamente debido a que los pocos resultados que se han obtenido son muy similares a los del caso (a) de giro de las dos paredes. Por ello sólo se presenta el mínimo de la velocidad axial en el eje en función de L para $Re = 500$ (figura 5.11), donde se observa una estructura muy similar a la de la figura 5.10. De esta figura se puede comprobar que el valor de $L_{fv}^{(c)}(500) \simeq 0,375$, dado por el valor de L para el que el mínimo de la velocidad axial es nulo, es muy similar, aunque algo mayor, al de $L_{fv}^{(a)}(500) \simeq 0,25$ (figura 5.8), mientras que para el caso (b) se tenía $L_{fv}^{(b)}(500) \simeq 0,875$ (figura 5.5). Los valores de $L_{fv}^{(c)}(Re)$ obtenidos para otros valores de Re (no mostrados aquí) son siempre muy parecidos y algo mayores a los dados por $L_{fv}^{(a)}(Re)$. Esta similitud es debido a que en ambos casos gira el cuerpo central interno, siendo los valores de $L_{fv}^{(c)}(Re)$ mayores a los de $L_{fv}^{(a)}(Re)$ por no estar girando la pared exterior. La rotación de ésta hace que la intensidad del giro cerca del eje sea algo mayor para el caso (a) que para el (c), motivando esto que sean menores los valores críticos de L necesarios para que se produzca la rotura del vórtice axial para el caso (a) que para el (c). Así, al igual que ocurriera para el caso (a), existe una notable diferencia entre $L_{fv}^{(a)}(Re \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ y el parámetro de giro crítico no viscoso $L_f^{(c)} \simeq 1,397$ mostrado en la figura 3.3. Sin embargo, este valor límite de $L_{fv}^{(a)}(\infty)$ coincide con el valor del parámetro de giro no viscoso por encima del cual se obtenían soluciones cilíndricas con zona de flujo inverso alrededor del eje, que también tiende a cero.

5.5. Resumen

Las simulaciones numéricas que usan las ecuaciones de Navier–Stokes presentadas en este capítulo para una geometría donde las condiciones a la entrada están muy bien definidas muestran una gran riqueza de comportamientos cuando se varían los parámetros Re y L , que difieren sustancialmente de los encontrados en el capítulo 3 con las ecuaciones no viscosas. En particular, los parámetros de giro críticos obtenidos en este capítulo para $Re \rightarrow \infty$ son muy diferentes de los no viscosos obtenidos en el capítulo 3, sobre todo para

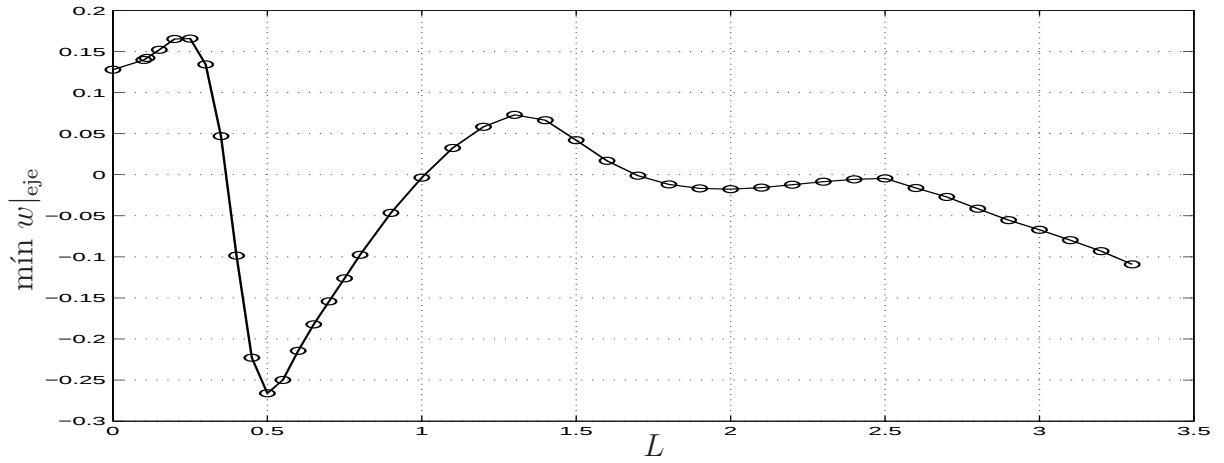


Figura 5.11: Mínimo de la velocidad axial en el eje de simetría del conducto en función de L para la configuración de giro de la pared interna del cuerpo central [caso (c)] y $Re = 500$.

la configuración de giro (a). El valor crítico de rotura $L_{fv}^{(a)}(Re)$ es siempre apreciablemente menor que $L_{fv}^{(b)}(Re)$ (compárense las figura 5.5 y 5.8) debido q que en el caso (a) el giro del cuerpo central concentra la intensidad del giro cerca del eje [recuérdese que en ausencia de viscosidad, la velocidad azimutal era singular en el eje en los casos (a) y (c)]. Finalmente, el problema viscoso muestra la existencia de dos tipos diferentes de rotura de vórtices, la rotura brusca, que es la típica que tiene lugar en conductos, y la que aquí se ha calificado como suave. Esta última es similar a la que también se observa en simulaciones no viscosas en conductos divergentes cuando el perfil de velocidad axial a la entrada es uniforme (sección 2.4.1).

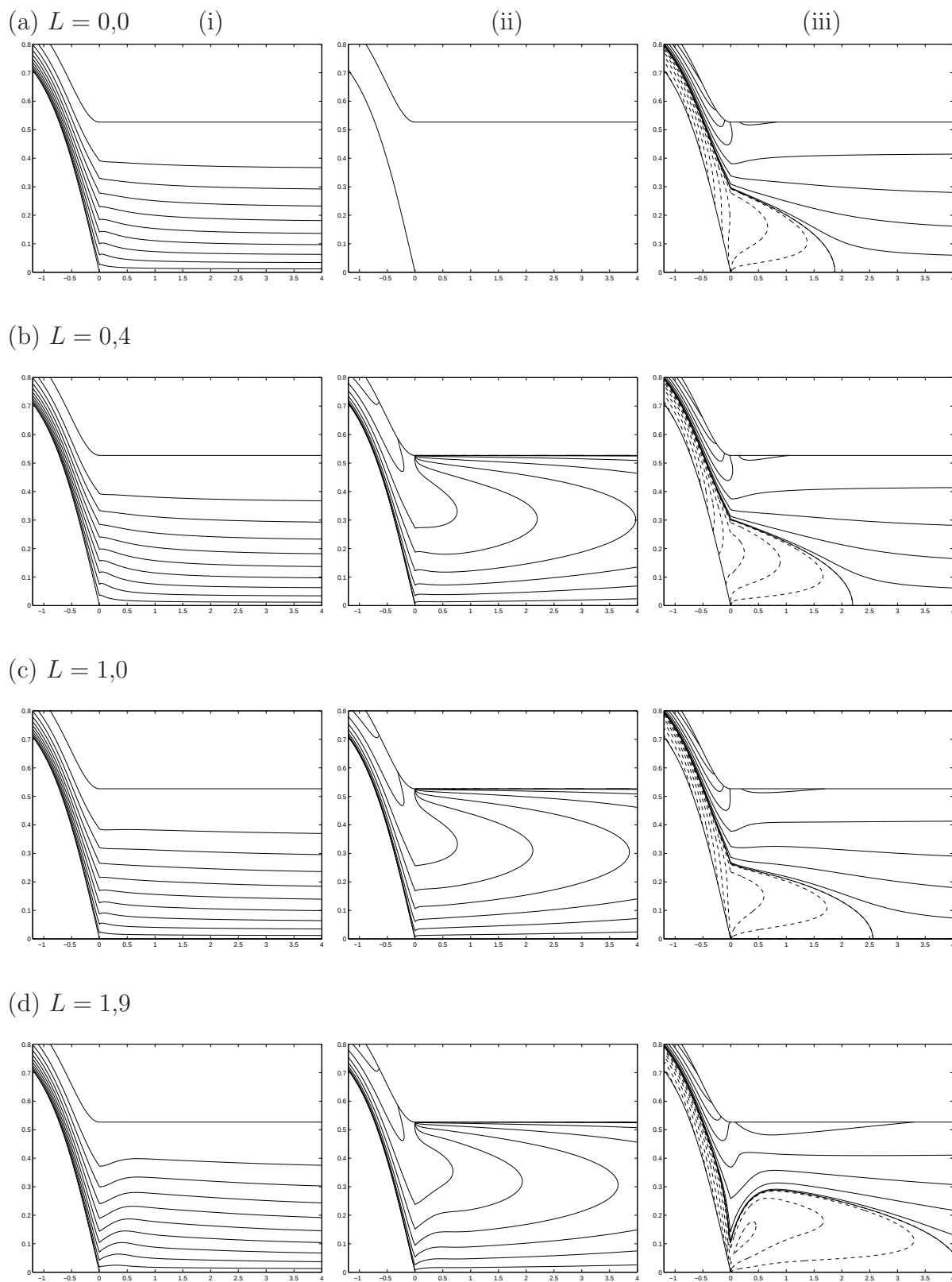


Figura 5.12(a)–(d). Para pie de figura ver página 147.

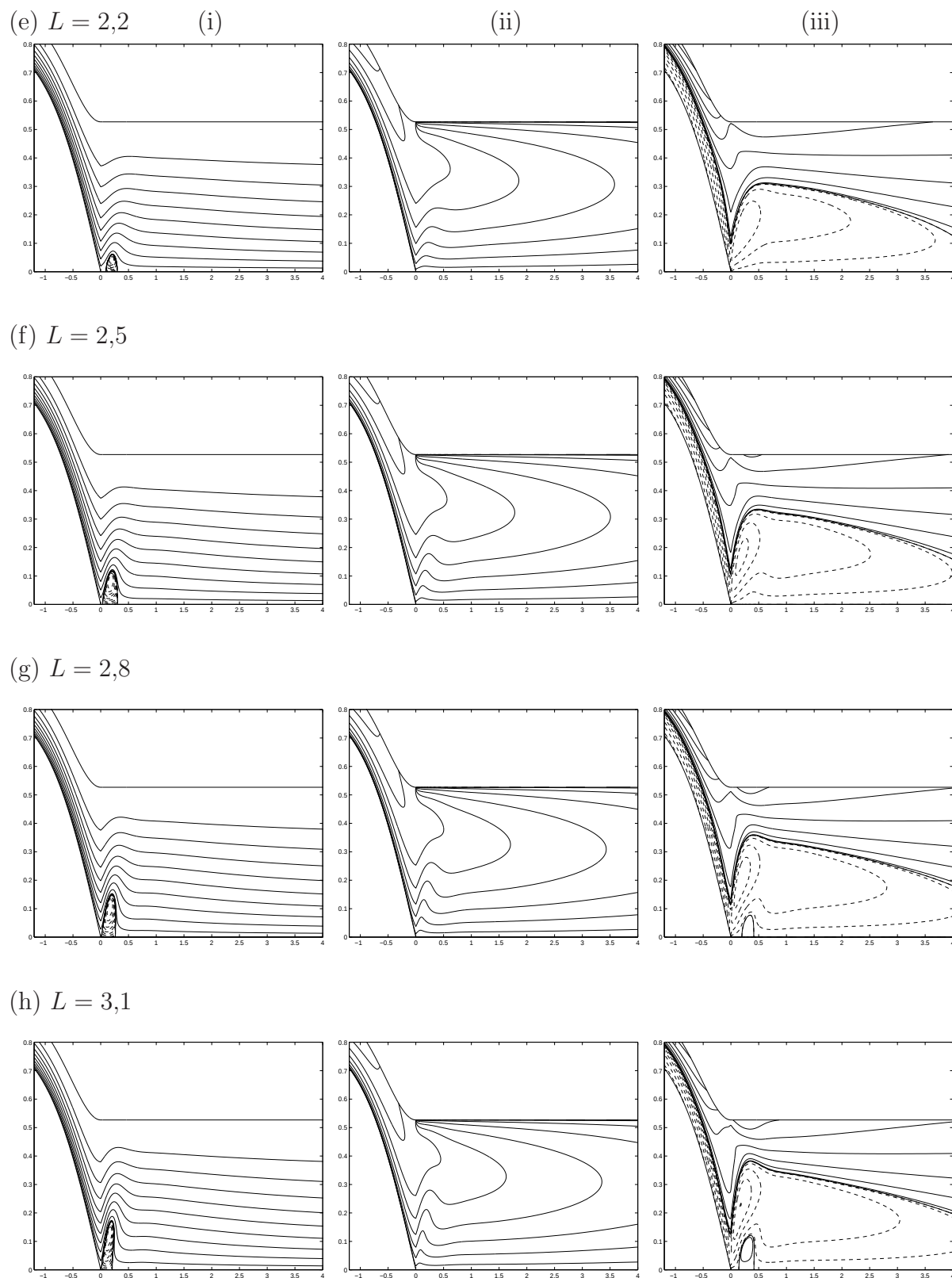


Figura 5.12(e)–(h). Para pie de figura ver página 147.

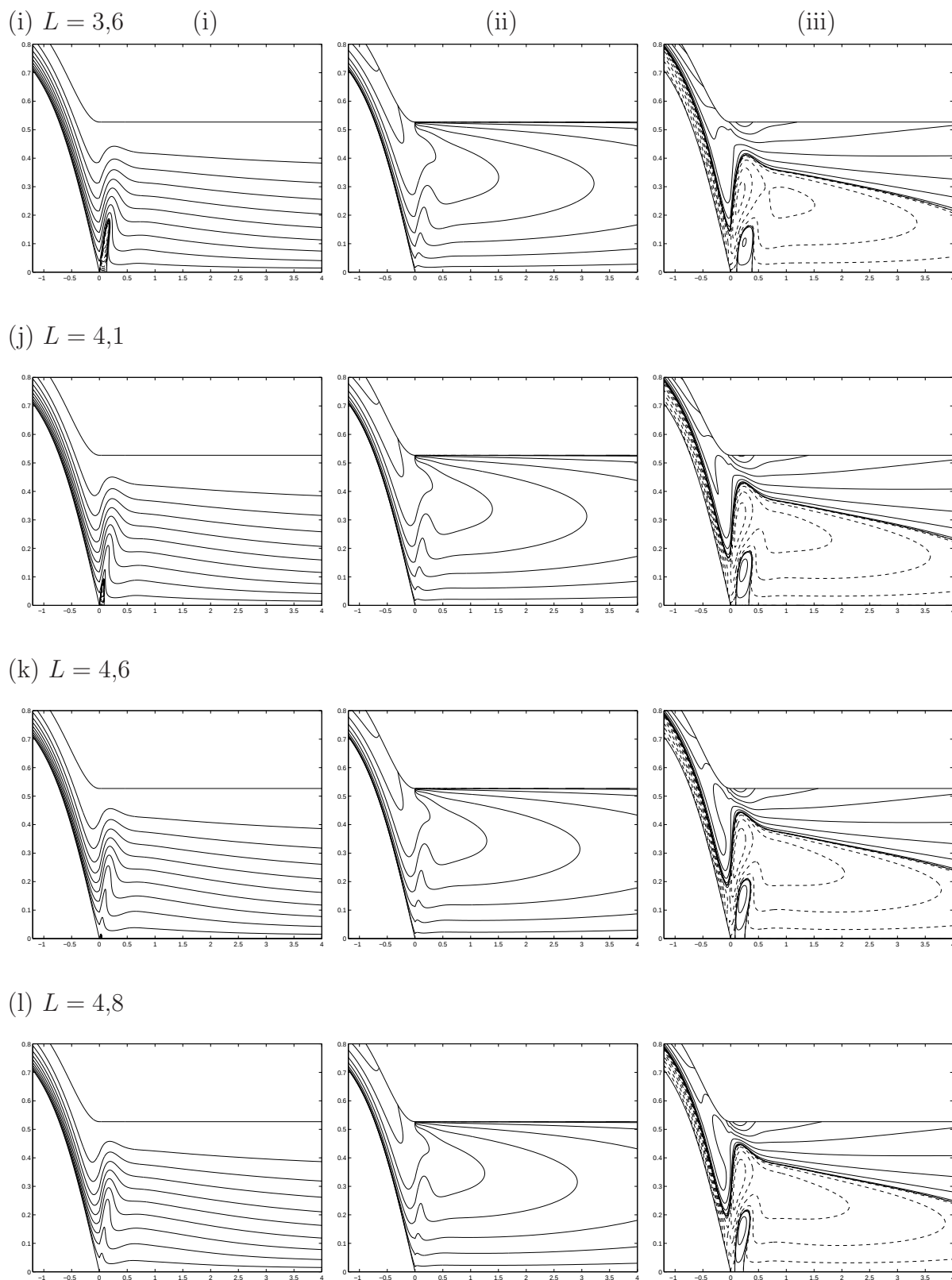


Figura 5.12(i)–(l). Para pie de figura ver página 147.

(m) $L = 5,0$

(i)

(ii)

(iii)

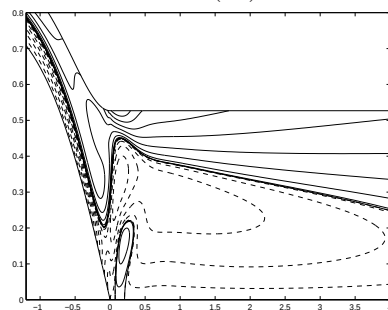
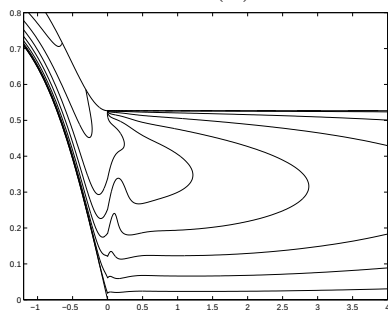
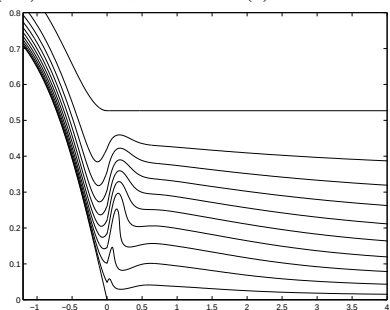
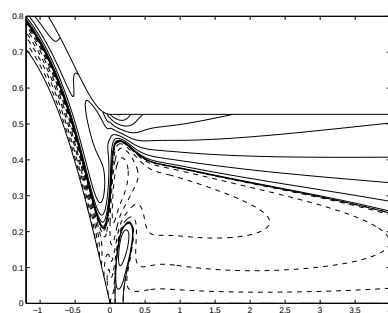
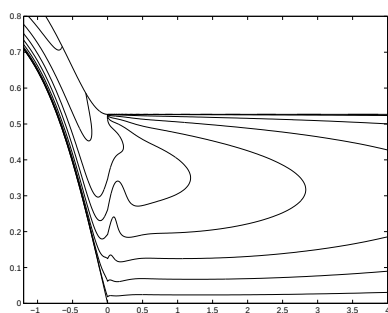
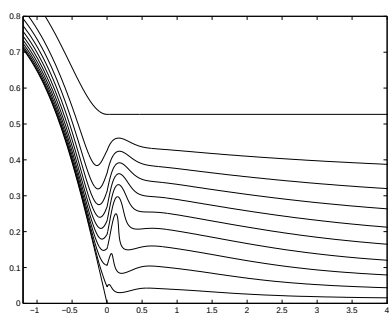
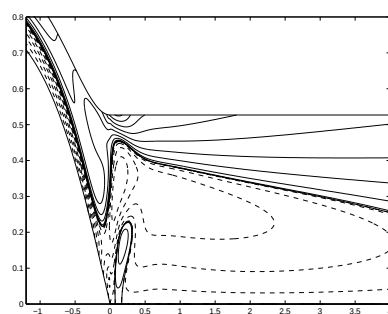
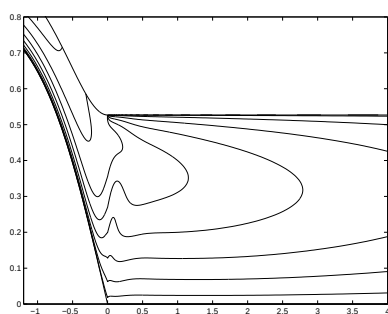
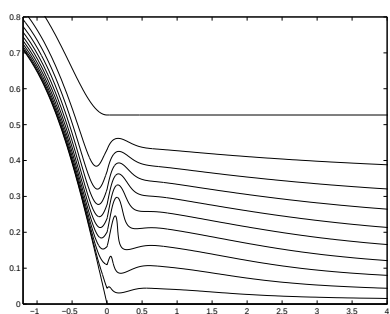
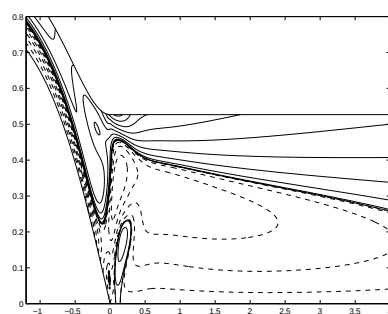
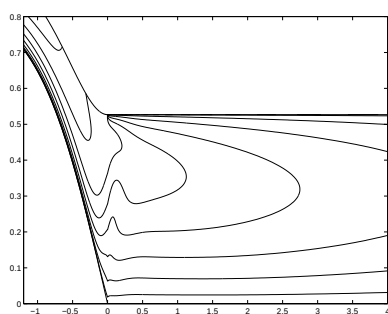
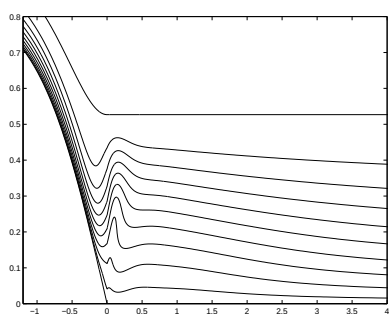
(n) $L = 5,2$ ($\tilde{n}$) $L = 5,4$ (o) $L = 5,6$ 

Figura 5.12(m)–(o). Para pie de figura ver página 147.

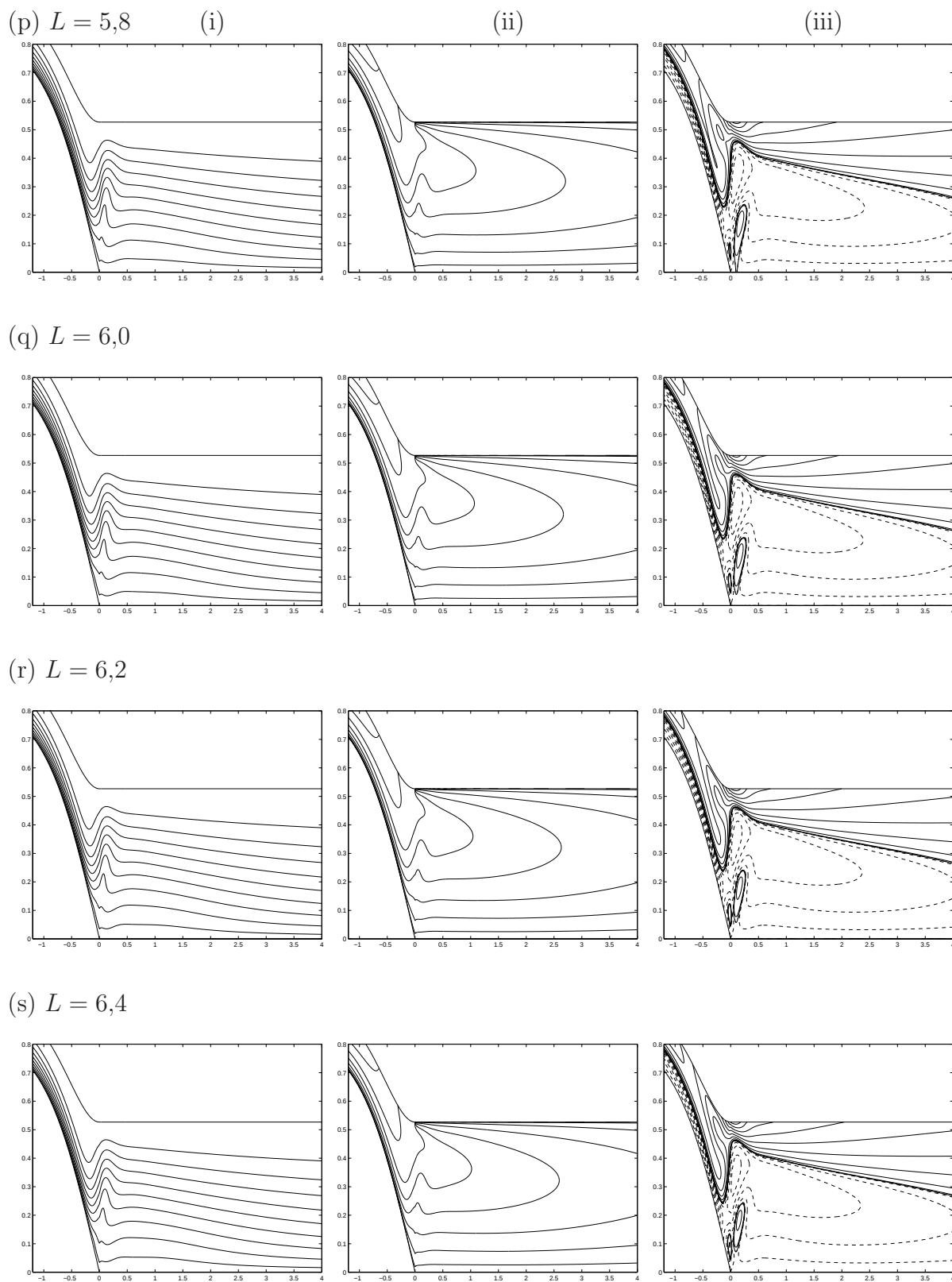
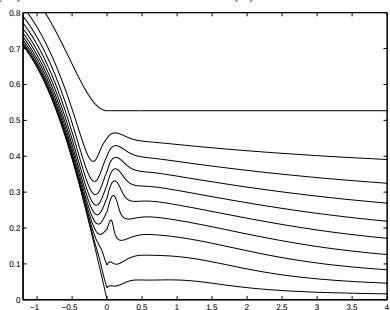


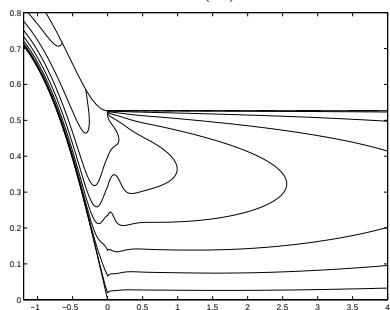
Figura 5.12(p)–(s). Para pie de figura ver página 147.

(t) $L = 6,6$

(i)



(ii)



(iii)

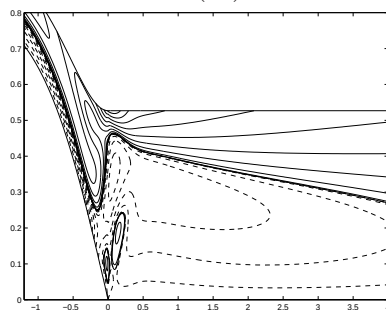
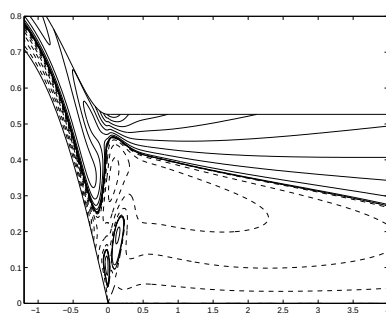
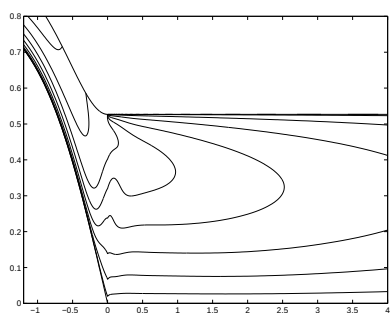
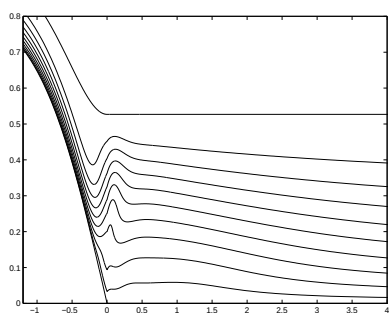
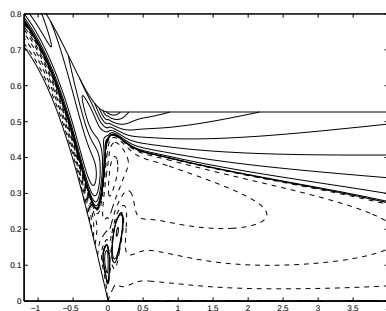
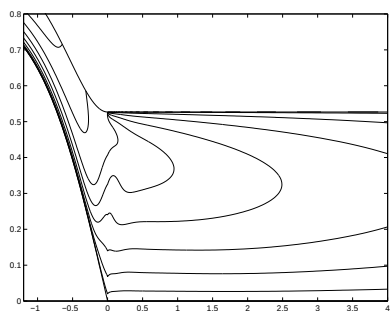
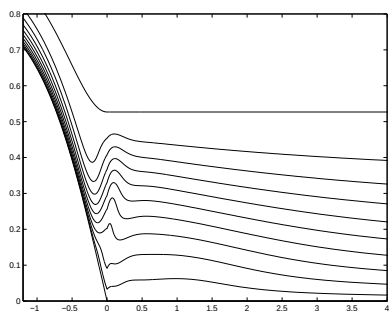
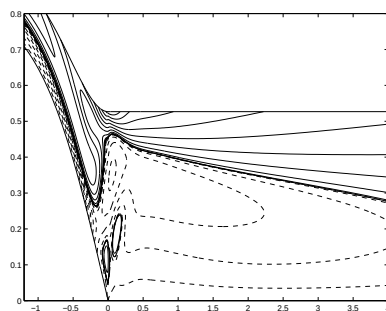
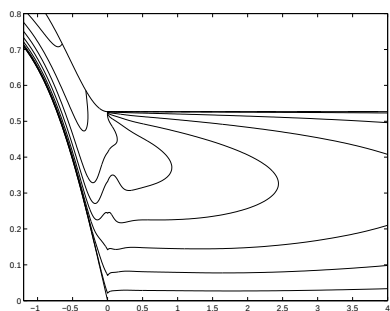
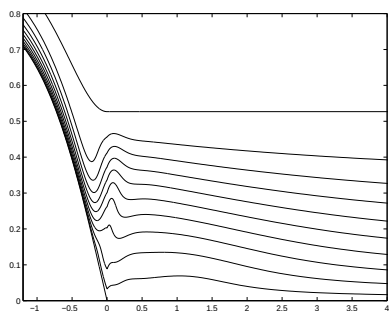
(u) $L = 6,8$ (v) $L = 7,0$ (w) $L = 7,3$ 

Figura 5.12(t)–(w). Para pie de figura ver página 147.

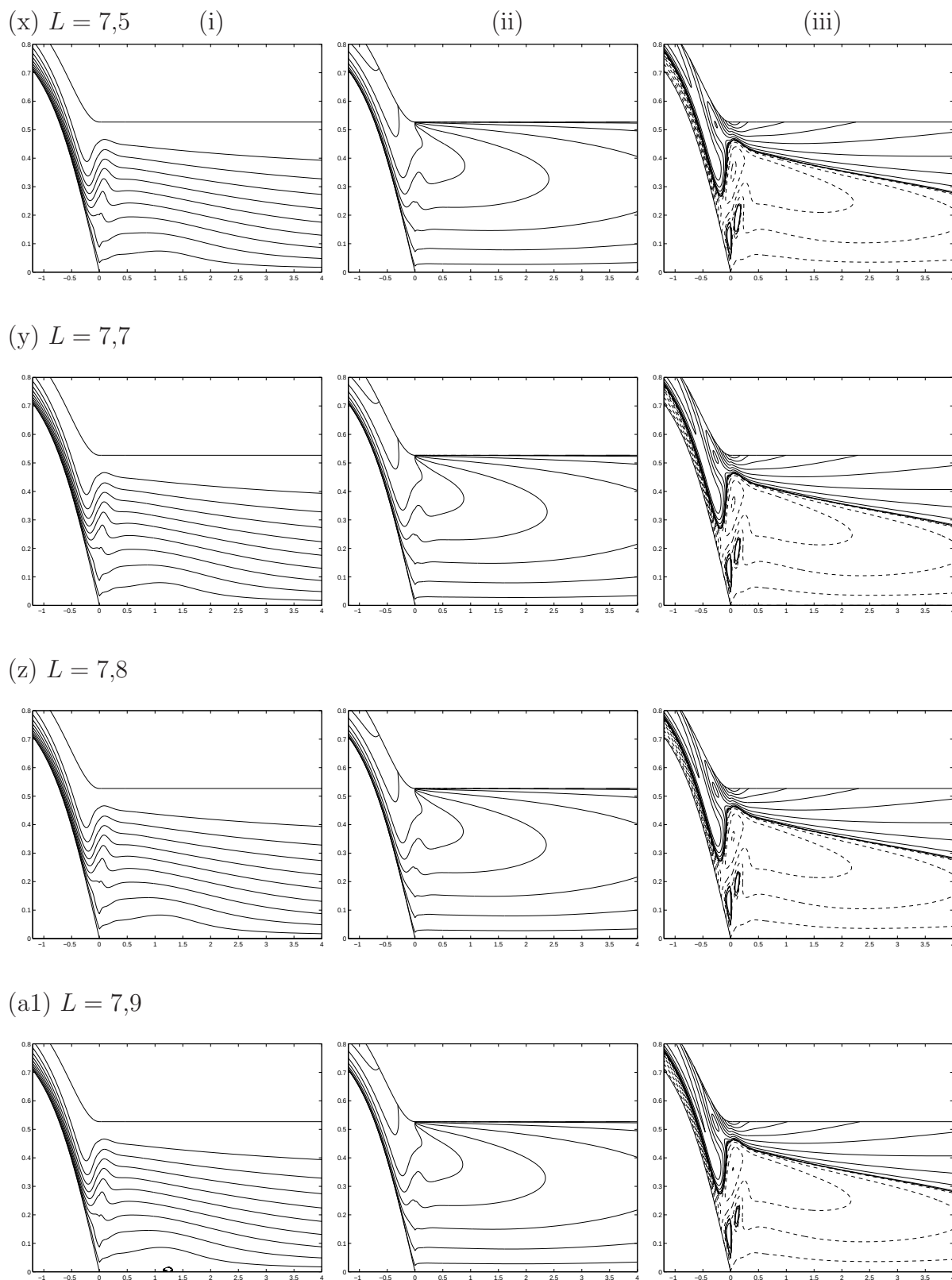


Figura 5.12(x)–(a1). Para pie de figura ver página 147.

(b1) $L = 8,0$

(i)

(ii)

(iii)

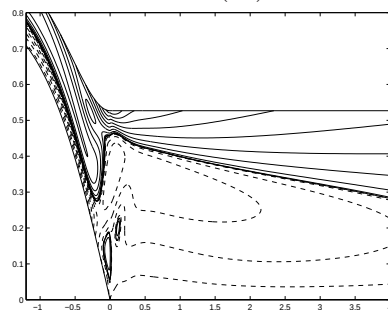
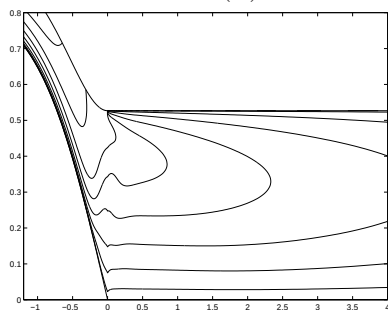
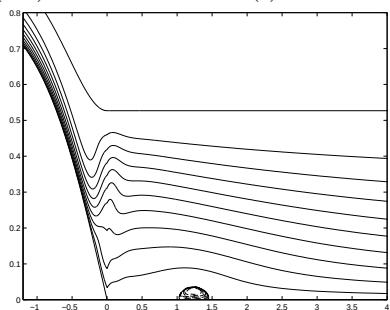
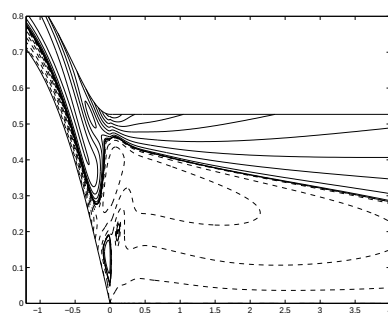
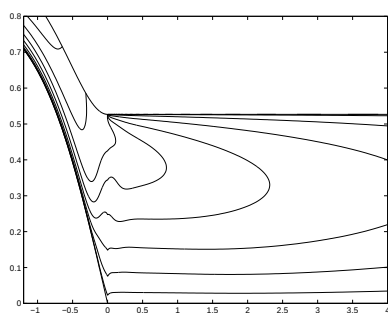
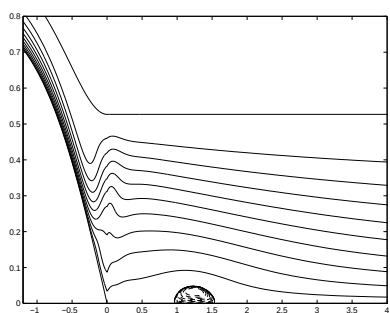
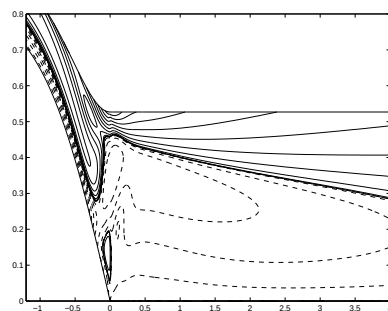
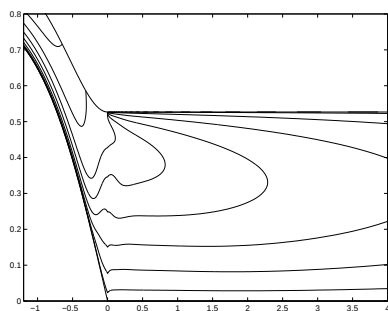
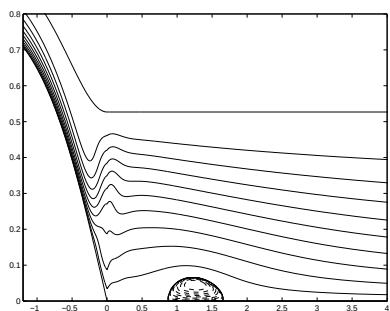
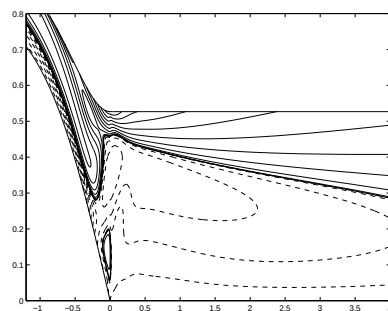
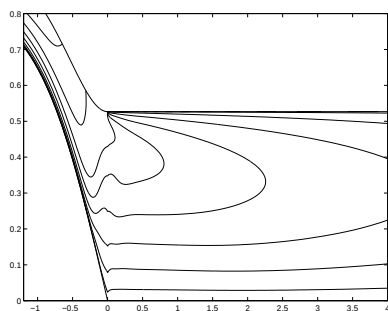
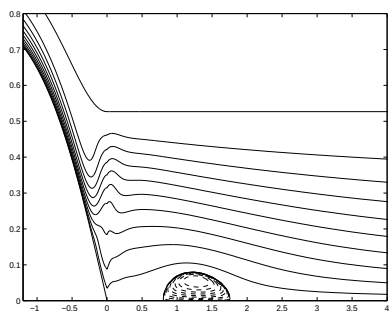
(c1) $L = 8,1$ (d1) $L = 8,3$ (e1) $L = 8,5$ 

Figura 5.12(b1)–(e1). Para pie de figura ver página 147.

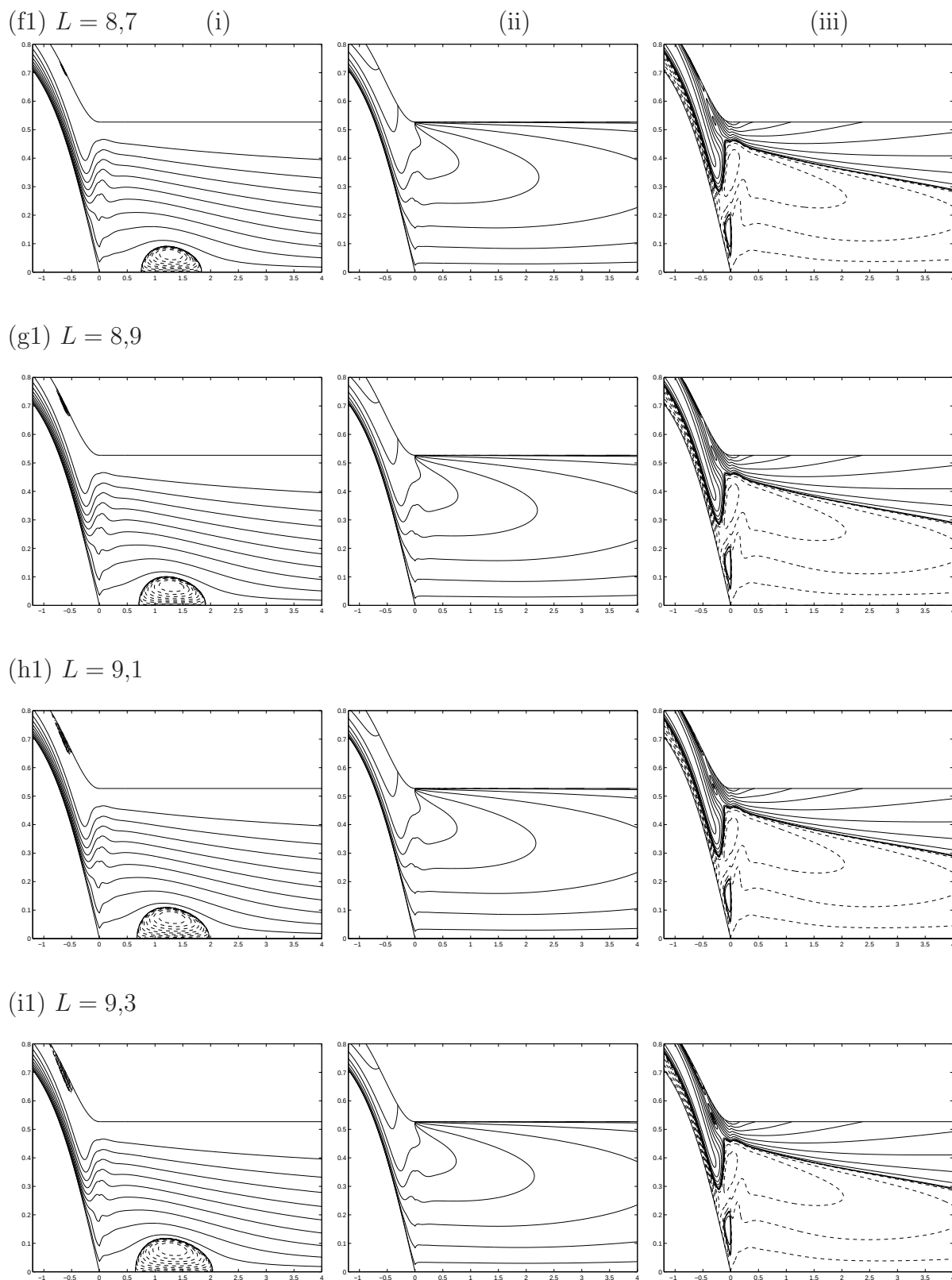


Figura 5.12(f1)–(i1). Para pie de figura ver página 147.

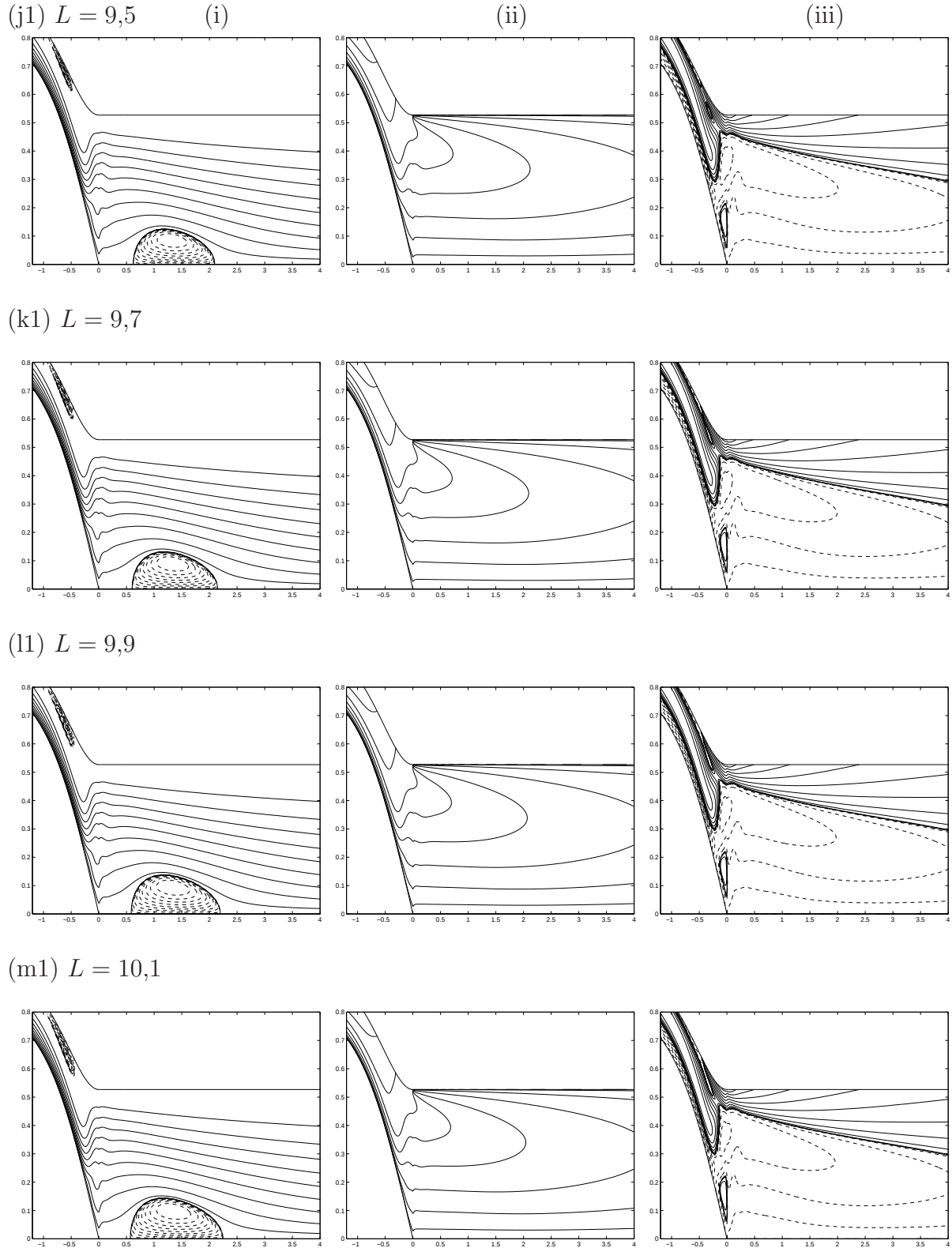


Figura 5.12: Contornos de (i) ψ , (ii) Γ y (iii) Π para la configuración de giro (b), para $Re = 100$ y los valores de L desde 0 hasta 10,1. Los valores de los contornos, 10 positivos y 10 negativos, para las tres variables están dados por $\text{contorno}(i) = \text{Máx}(\text{variable}) \times (i/10)^3$ para los positivos, y $\text{contorno}(i) = \text{Mín}(\text{variable}) \times (i/10)^3$ para los negativos. Las líneas a trazos indican contornos negativos.

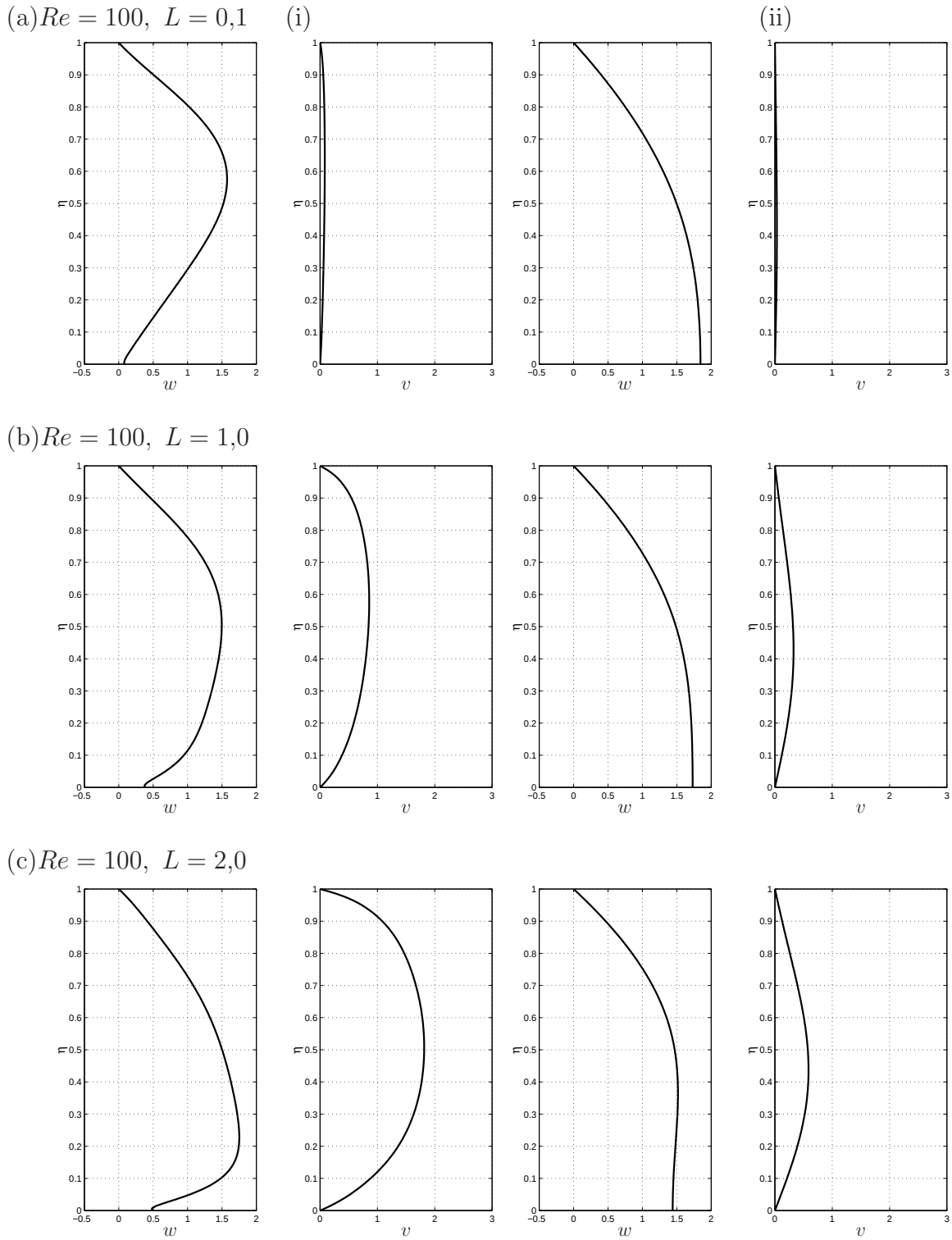
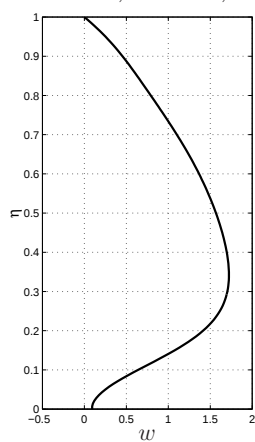
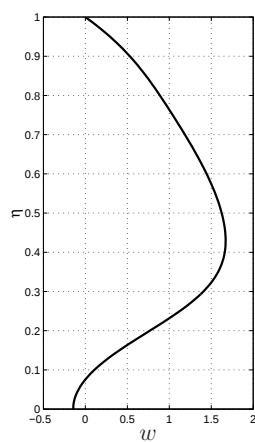
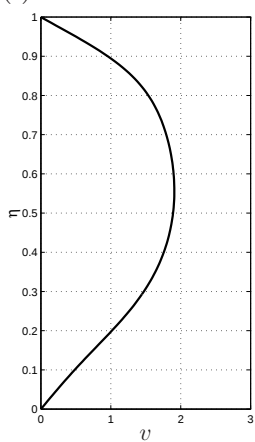


Figura 5.13(a)–(c): Para pie de figura ver página 150.

(d) $Re = 100$, $L = 2,2$ 

(i)



(ii)

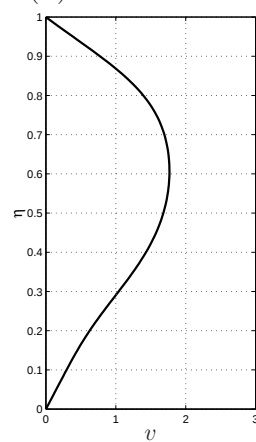
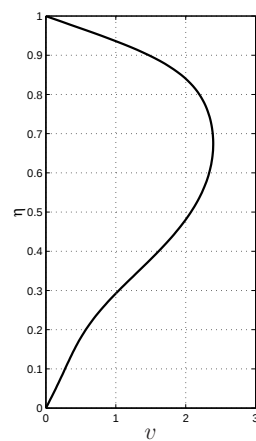
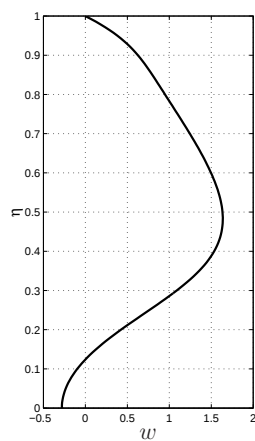
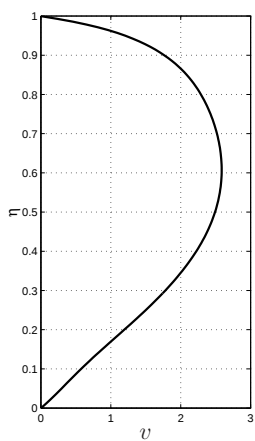
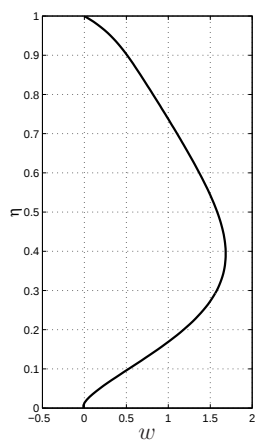
(e) $Re = 100$, $L = 3,1$ 

Figura 5.13(d)–(e): Para pie de figura ver página 150.

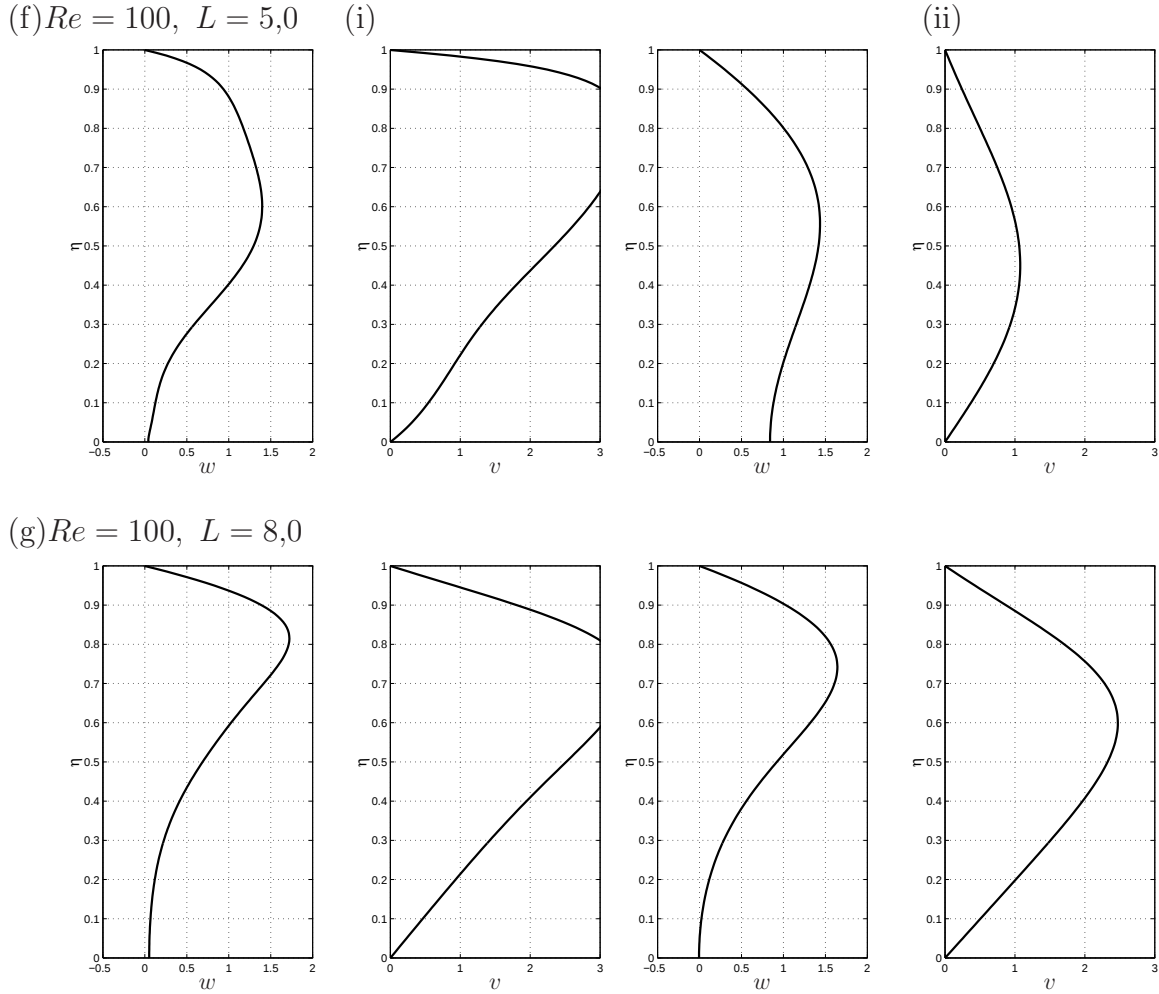


Figura 5.13: Perfiles radiales de la velocidad axial w y azimutal v en las posiciones axiales (a)(i), (b)(i), (c)(i): $z = 0,013$; (a)(ii), (b)(ii), (c)(ii): $z = 3,048$; (d)(i): $z = 0,0702$, (d)(ii): $z = 0,1733$; (e)(i): $z = 0,013$, (e)(ii): $z = 0,0702$; (f)(i): $z = 0,013$, y (f)(ii): $z = 3,048$. Los perfiles (a), (b), (c) y (f) corresponden a flujos sin rotura del vórtice axial. Los (d), (e) y (g) a flujos con rotura, siendo las posiciones (i) posiciones delante de la burbuja y las (ii) posiciones en el interior de la burbuja.

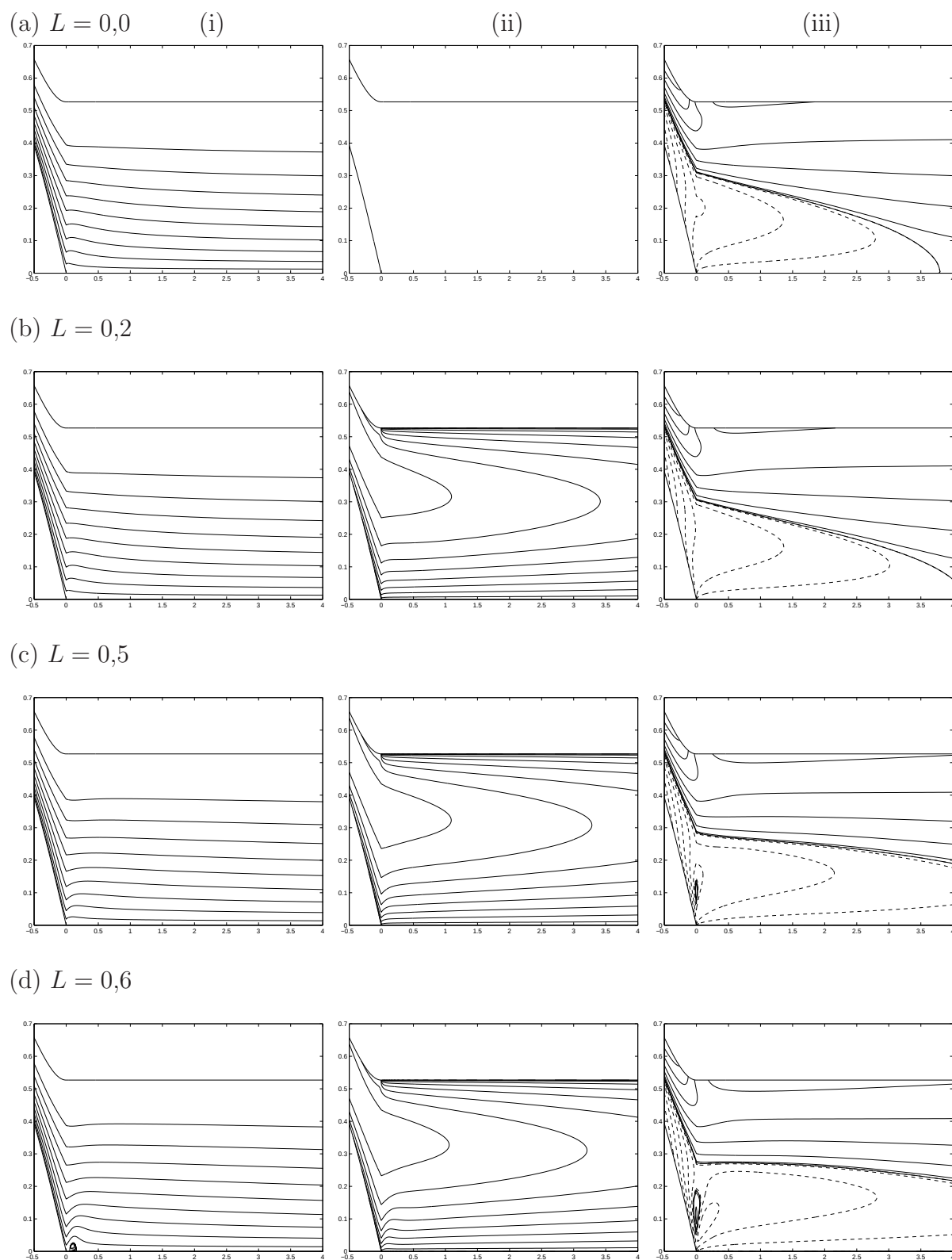


Figura 5.14(a)–(d). Para pie de figura ver página 158.

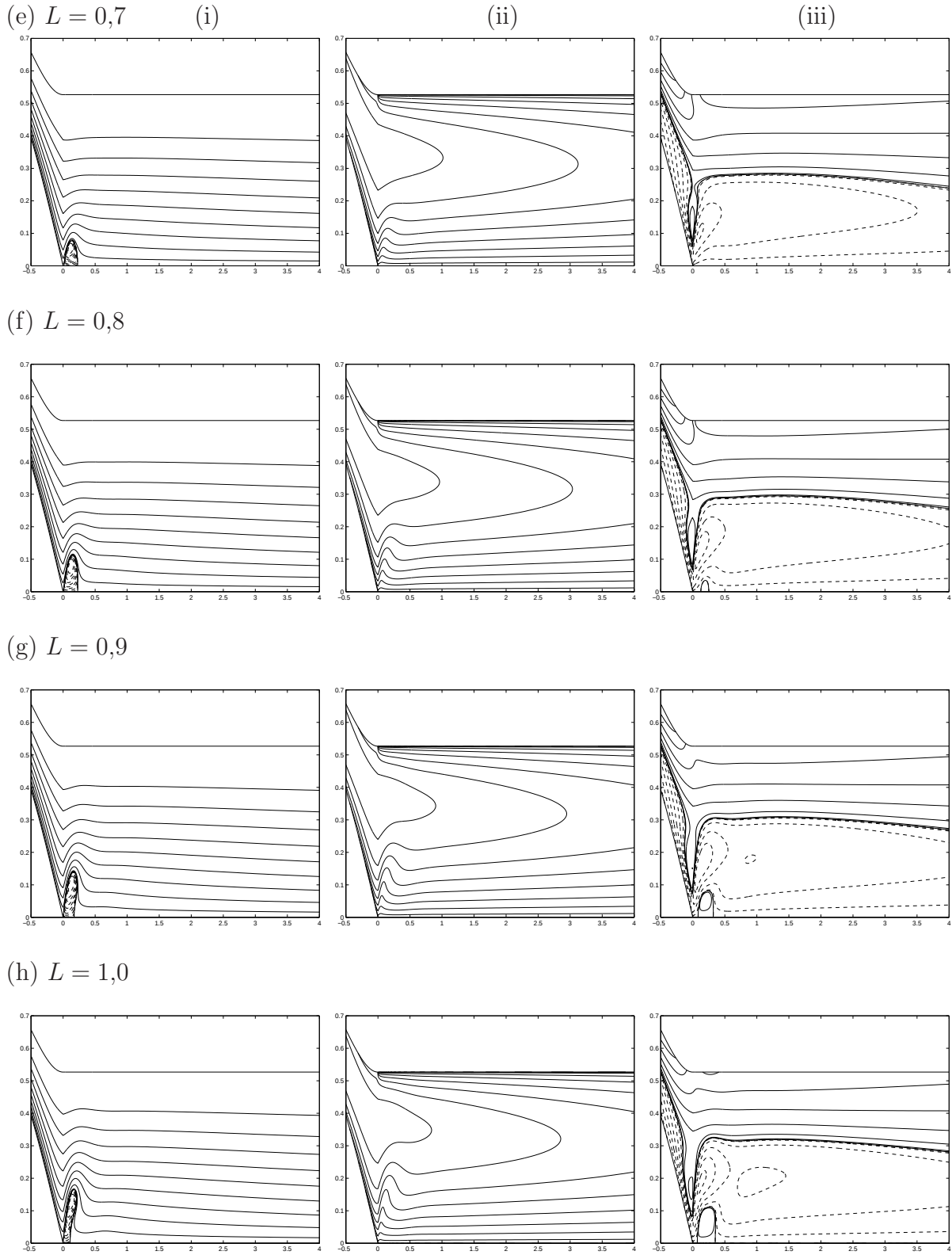


Figura 5.14(e)–(h). Para pie de figura ver página 158.

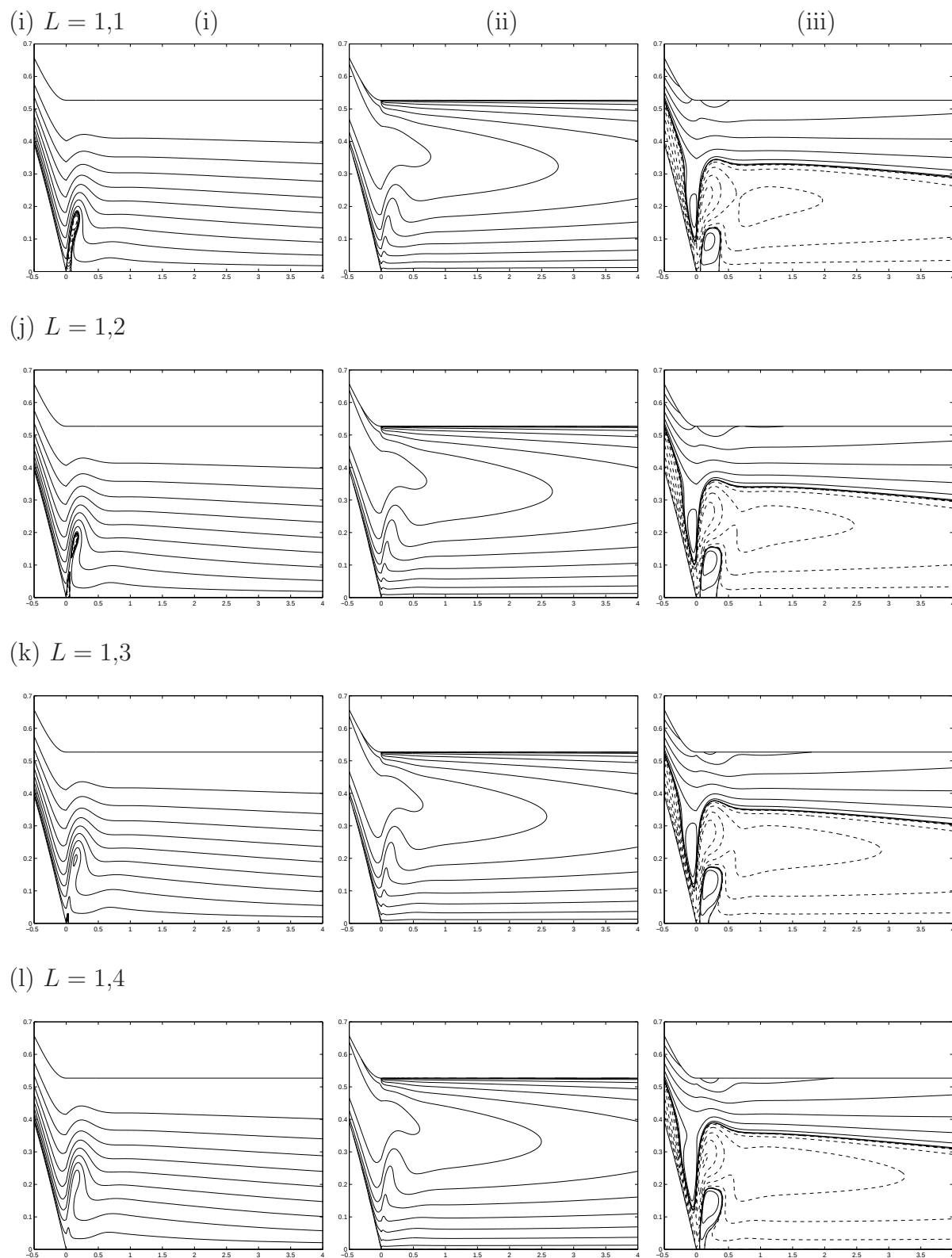


Figura 5.14(i)–(l). Para pie de figura ver página 158.

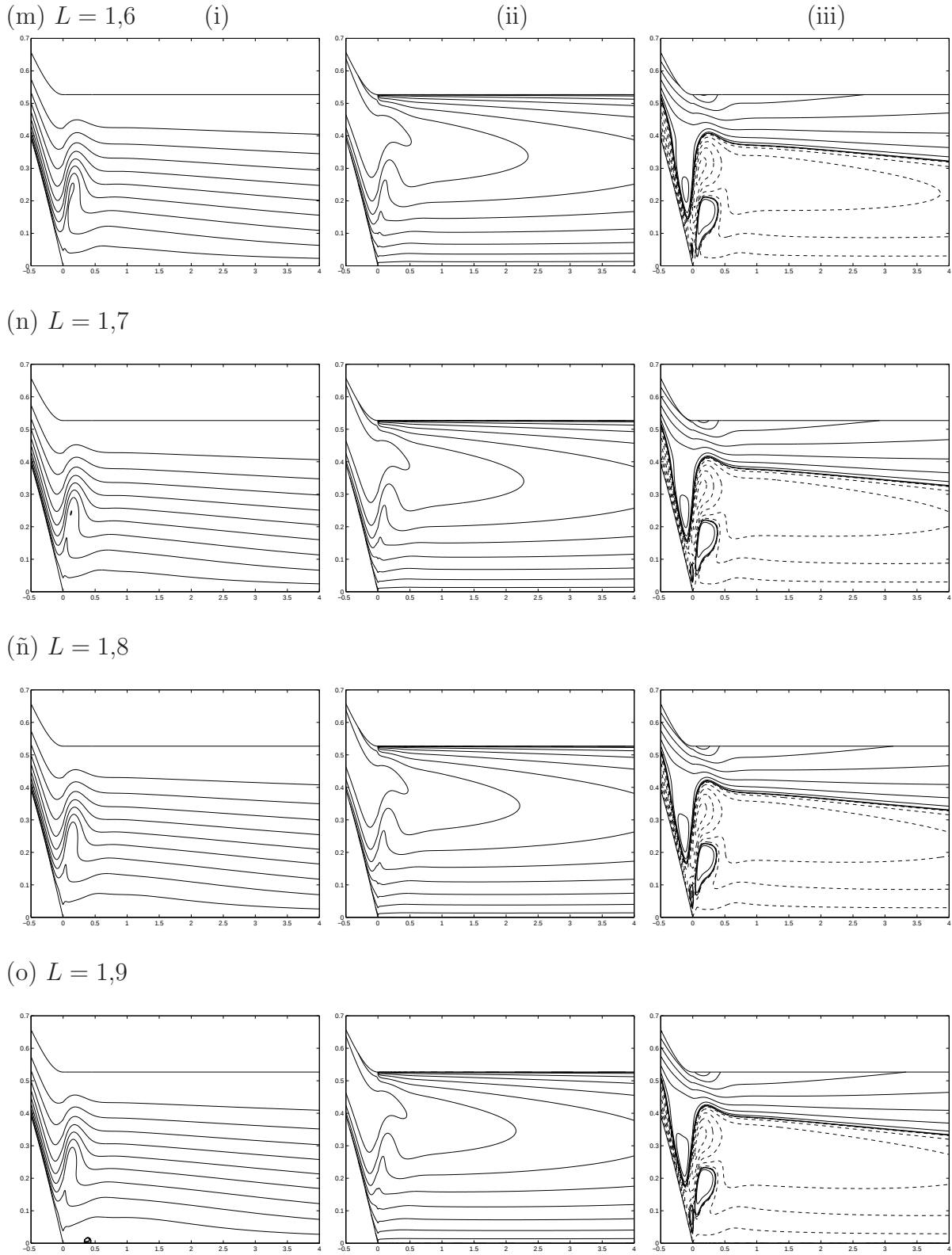


Figura 5.14(m)–(o). Para pie de figura ver página 158.

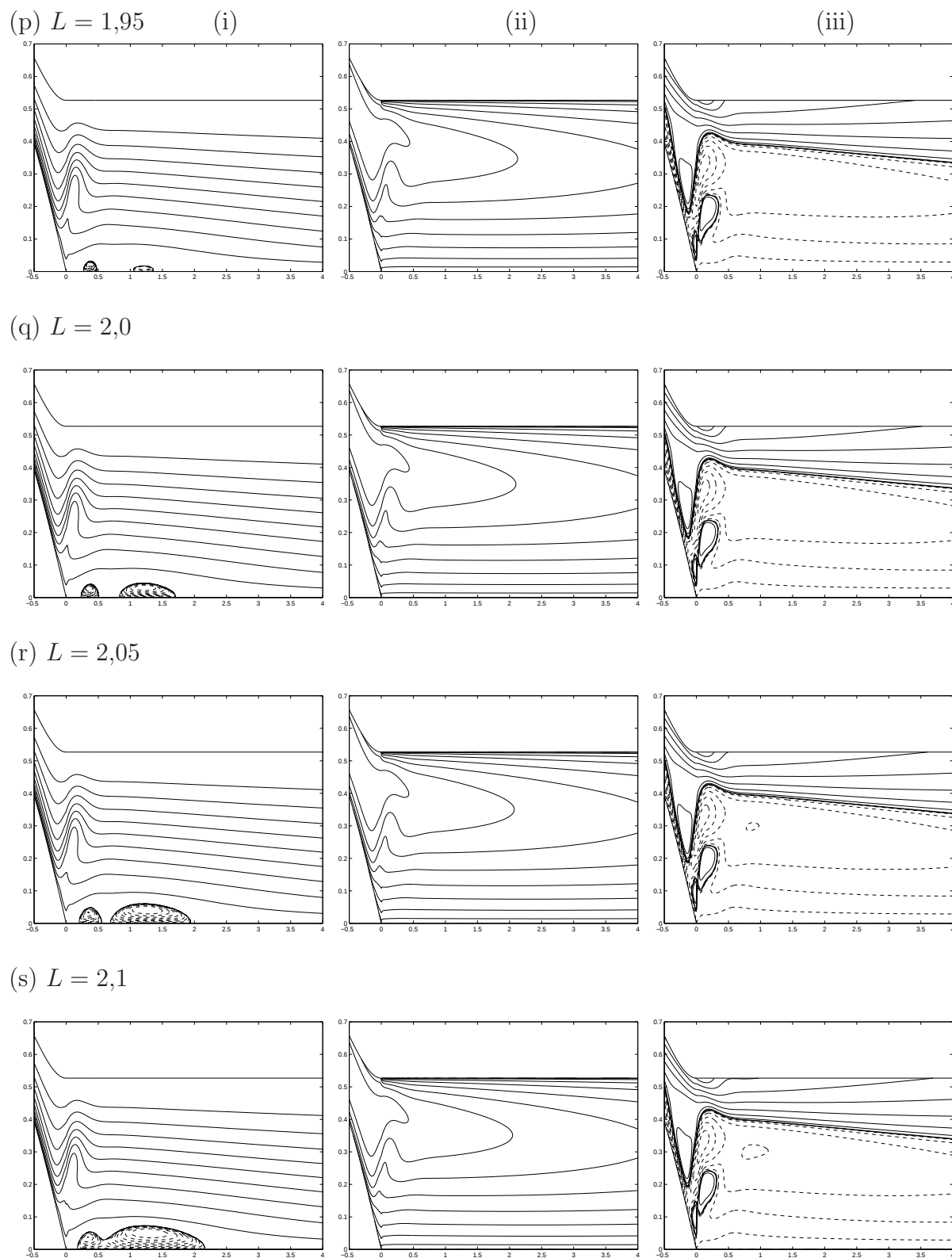


Figura 5.14(p)–(s). Para pie de figura ver página 158.

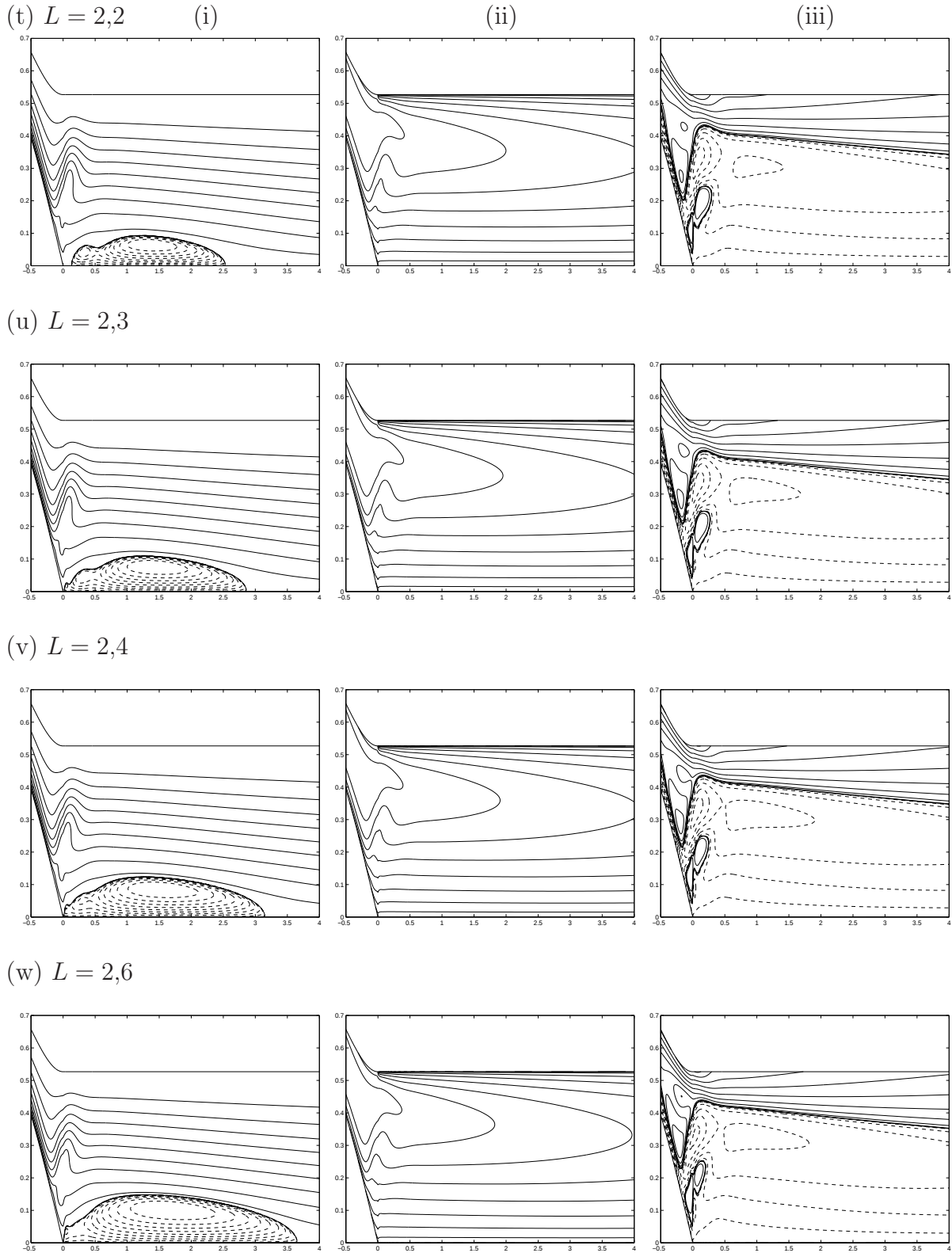


Figura 5.14(t)–(w). Para pie de figura ver página 158.

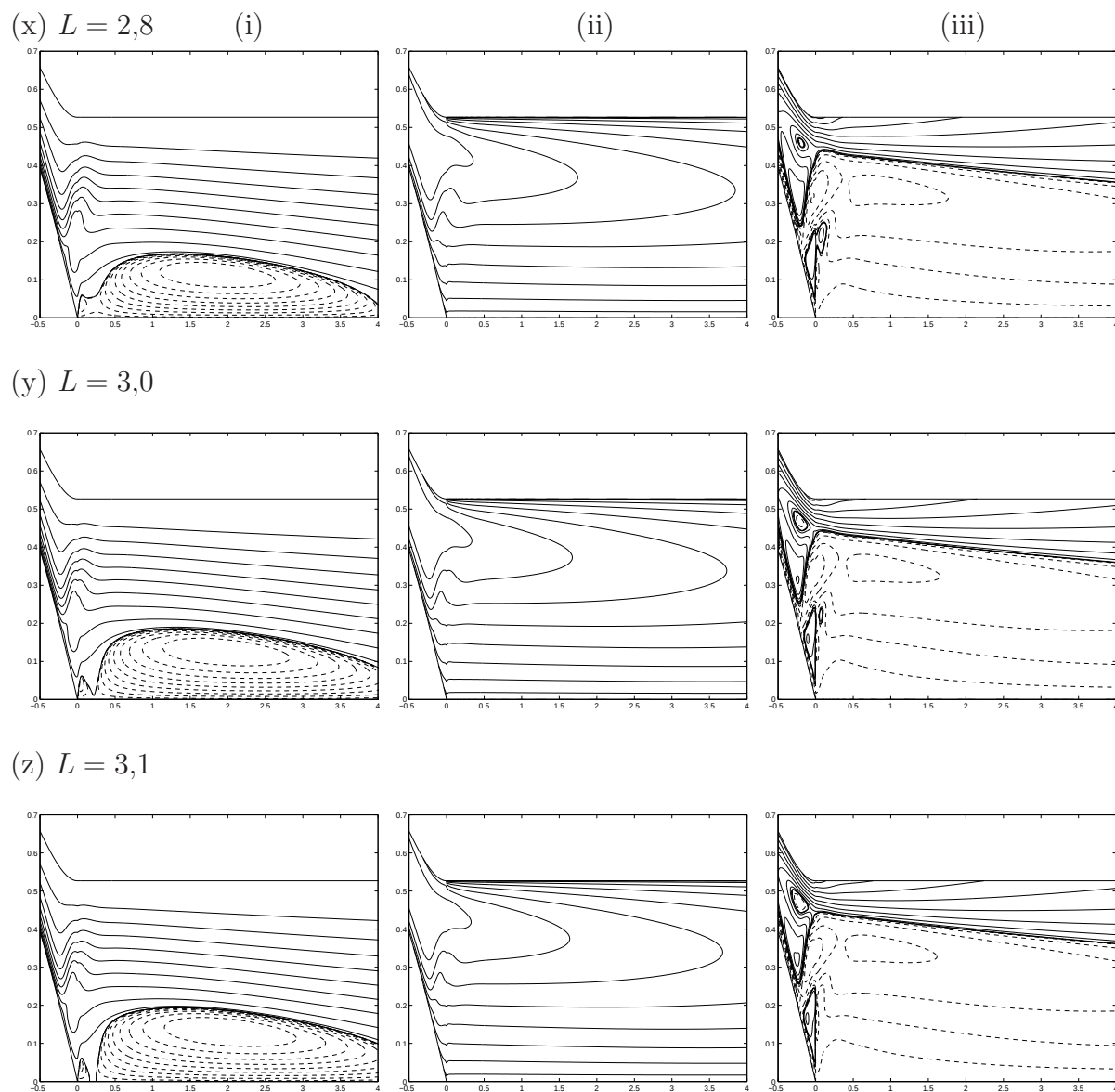


Figura 5.14(x)–(z). Para pie de figura ver página 158.

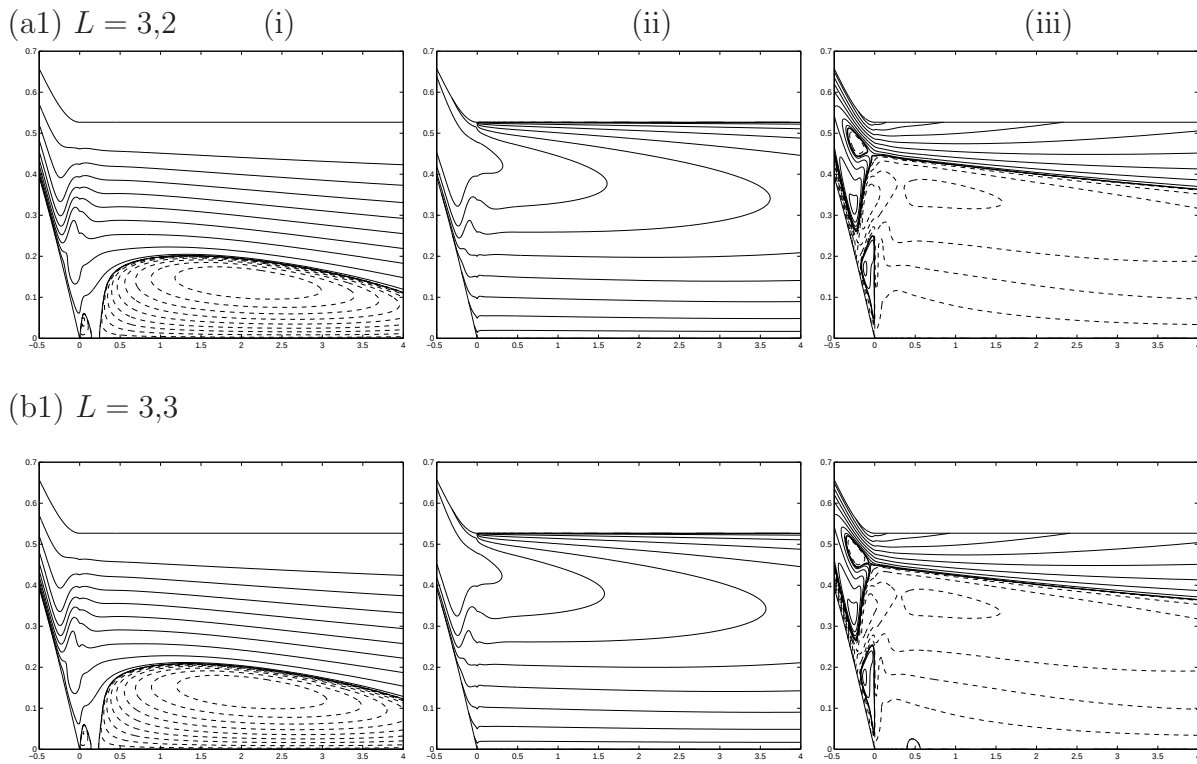
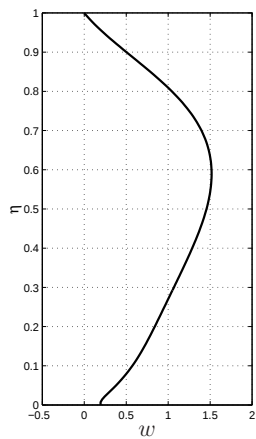
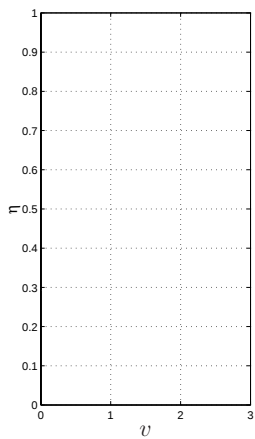


Figura 5.14: Contornos de (i) ψ , (ii) Γ y (iii) Π para la configuración de giro (a), para $Re = 200$ y los valores de L desde 0 hasta 3,3. Los valores de los contornos, 10 positivos y 10 negativos, para las tres variables están dados por $\text{contorno}(i) = \text{Máx}(\text{variable}) \times (i/10)^3$ para los positivos, y $\text{contorno}(i) = \text{Mín}(\text{variable}) \times (i/10)^3$ para los negativos. Las líneas a trazos indican contornos negativos.

(a) $Re = 200$, $L = 0,0$ 

(i)



(ii)

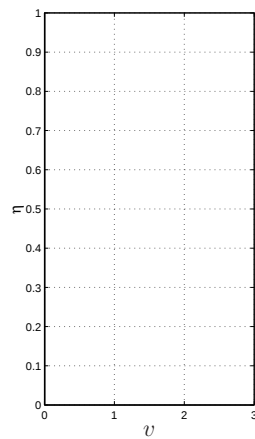
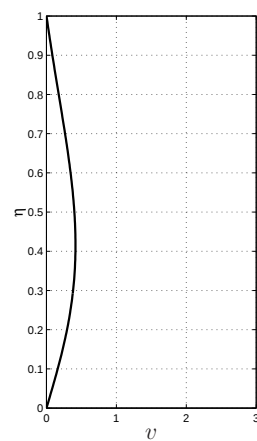
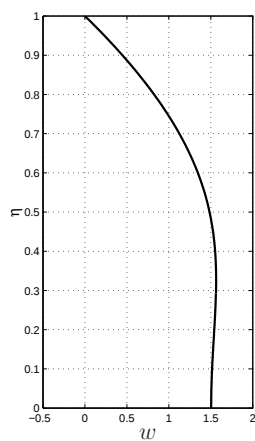
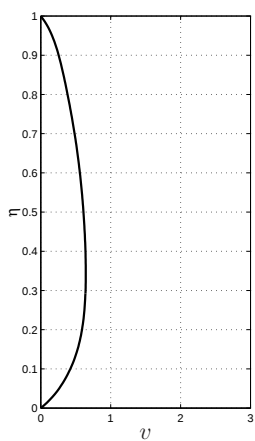
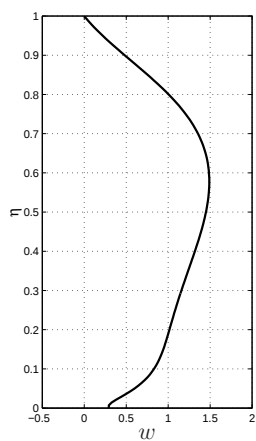
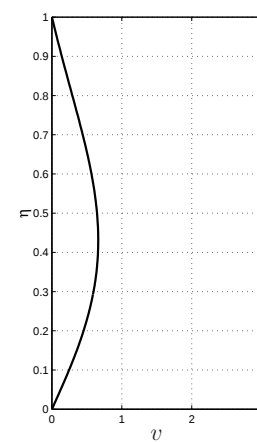
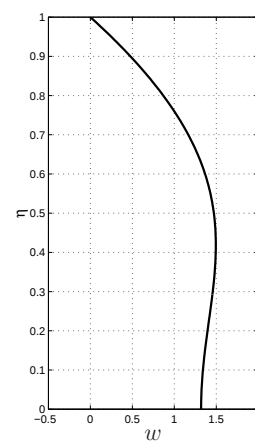
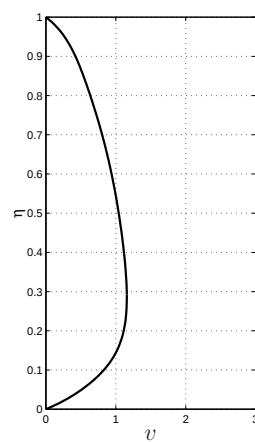
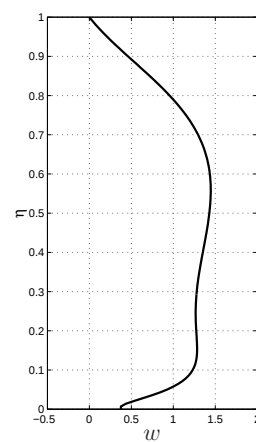
(b) $Re = 200$, $L = 0,3$ (c) $Re = 200$, $L = 0,5$ 

Figura 5.15(a)–(c): Para pie de figura ver página 160.

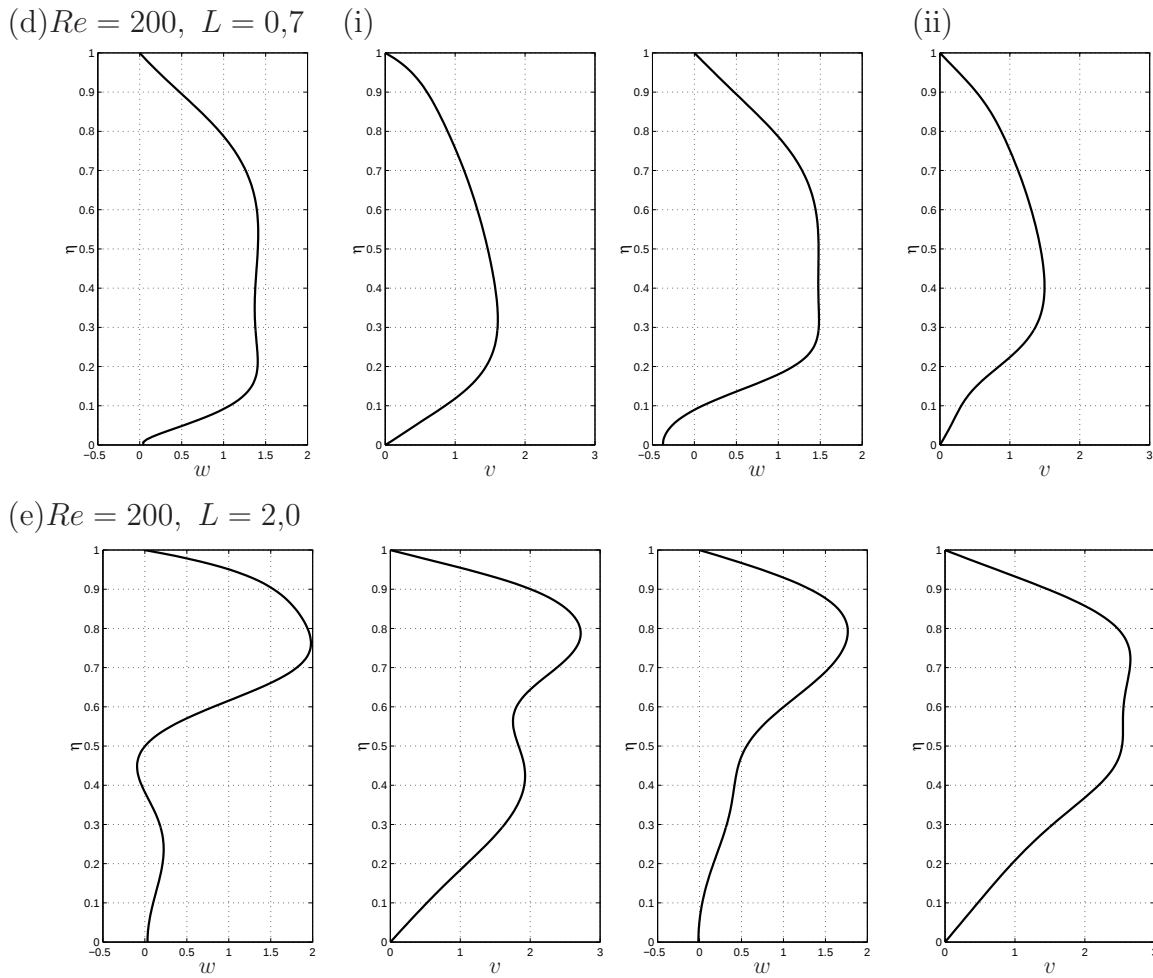


Figura 5.15: Perfiles radiales de velocidad axial w y azimuthal v en las posiciones axiales (a)(i), (b)(i), (c)(i): $z = 0,013$; (a)(ii), (b)(ii), (c)(ii): $z = 3,048$; (d)(i): $z = 0,013$, (d)(ii): $z = 0,0806$; (e)(i): $z = 0,0076$, (e)(ii): $z = 0,0186$; (f)(i): $z = 0,1353$, y (f)(ii): $z = 0,3577$. Los perfiles (a), (b) y (c) corresponden a flujos sin rotura del vórtice axial. Los (d), (e) y (f) a flujos con rotura, siendo las posiciones axiales (i) posiciones delante de la burbuja y las (ii) posiciones en el interior de la burbuja.

Capítulo 6

Conclusiones

6.1. Contribuciones de la tesis

Esta tesis se ha dedicado al estudio de varios aspectos del fenómeno de rotura de vórtices en conductos, particularmente al análisis de la influencia de la viscosidad en la aparición de dicho fenómeno.

Entre las contribuciones más relevantes están el desarrollo y validación de dos códigos numéricos, uno para flujos no viscosos y otro para viscosos, con los que estudiar el flujo axilsimétrico con giro en conductos de geometría arbitraria. En el código viscoso se ha puesto especial cuidado en el tratamiento de las condiciones de contorno, implementándose correctamente la importante condición de no deslizamiento en las paredes sólidas del conducto. La gran mayoría de los trabajos numéricos previos existentes en la literatura para el análisis de flujos viscosos con giro en conductos han eliminado esta condición de contorno de no deslizamiento en la pared del conducto debido a su difícil implementación en la formulación función de corriente–circulación–vorticidad (López, 1994, Beran & Culik, 1992, entre otros; la única excepción es Darmofal, 1996, pero utiliza variables primitivas, que hacen mucho más ineficiente numéricamente al código). Se demostró en el capítulo 4 que el uso de una condición de contorno con deslizamiento conduce a resultados totalmente diferentes a los que se obtienen cuando se usa una condición de contorno sin deslizamiento, dando lugar, por tanto, a predicciones erróneas del parámetro de giro crítico de rotura del vórtice.

La teoría ideal nos dice que un torbellino originado por el giro de una pared sólida aguas arriba es singular en el eje, con velocidad circunferencial proporcional a Γ/r , donde Γ es la circulación. En el capítulo 2 se demostró, mediante un análisis no viscoso sencillo, que

este tipo de torbellinos nunca presenta el fenómeno de rotura de vórtices en un conducto; pero, si es artificialmente regularizado en el eje, se rompe aguas abajo por encima de un valor crítico del parámetro de giro. Se concluyó que la viscosidad era relevante en el fenómeno, aunque sólo sea en su papel trivial de regularizar un perfil no viscoso en el eje. También se observó en este simple análisis que había dos tipos de roturas del vórtice en el conducto, una brusca en la que no había solución casi cilíndrica por encima de un cierto valor del parámetro de giro L_f , existiendo una situación de histéresis en la que la solución casi cilíndrica salta a otra correspondiente a una región de estancamiento en el eje para $L > L_f$, y otra suave, en la que el punto de remanso en el eje se alcanza de una manera continua a medida que aumenta el parámetro de giro. Este segundo tipo de rotura no viscosa del vórtice se produce cuando la velocidad axial es uniforme a la entrada, mientras que la transición brusca se produce cuando el flujo tiene la forma de un chorro axial.

Debido a la necesidad de imponer perfiles de velocidad conocidos sin ambigüedad a la entrada de un conducto uniforme para predecir correctamente el fenómeno de rotura, se decidió resolver numéricamente tanto el conducto como el elemento generador del giro, todo ello presente en la geometría utilizada en las simulaciones numéricas de los capítulos 3 (ecuaciones no viscosas) y 5 (ecuaciones viscosas). Con este tipo de geometría se consigue que las condiciones a la entrada del conducto uniforme estén bien definidas, siendo las que se obtienen del desarrollo del flujo aguas arriba en el elemento generador del giro. Esta geometría así elegida nos permitió comparar correctamente los resultados no viscosos con los viscosos en el conducto uniforme. En ambos casos se encuentran valores críticos del parámetro de giro que marcan el comienzo de la rotura del vórtice axial. La comparación de estos valores críticos mostró el escaso acuerdo existente entre ambos casos, siendo también muy diferentes las estructuras que aparecen en el flujo después de la rotura dependiendo de que se tenga en cuenta o no la viscosidad. Además, las simulaciones no viscosas mostraron que los parámetros críticos de rotura no viscosa son extremadamente sensibles a la forma del perfil a la entrada del conducto.

El amplio estudio que se ha llevado a cabo para el problema viscoso nos ha mostrado la riqueza de este flujo en cuanto a la variedad de estructuras por las que pasa en función de los parámetros Re y L . De éstas hay que destacar que, dependiendo de L y Re , se pueden observar los dos tipos de rotura de vórtices, brusca y suave, que también se observan en el

análisis no viscoso del capítulo 2, corroborando que la transición continua (o suave) hacia un punto de remanso en el eje se produce cuando el perfil de velocidad axial se aproxima a un flujo uniforme cerca del eje.

6.2. Trabajo futuro relacionado con esta tesis

Como se ha comentado anteriormente, una de las aportaciones más importantes de esta tesis ha sido el código numérico viscoso axilsimétrico desarrollado. A corto y medio se pretende afrontar el análisis de la estabilidad espacial para un flujo base realista obtenido de simulaciones con el código numérico, con el objetivo de buscar los diferentes modos de inestabilidad convectiva y absoluta que puedan tener relación con las diferentes transiciones que hemos visto que experimenta el flujo.

El código numérico también se utilizará para optimizar el diseño de los aparatos experimentales que nos ayuden a corroborar en el laboratorio las teorías sobre la rotura de vórtices, mediante la previa simulación numérica del sistema completo.

Por último, otro tema interesante abordar es el desarrollo de un código numérico no axilsimétrico (tridimensional) para flujos en conductos, sirviéndonos para ello de toda la experiencia numérica ganada a lo largo de este trabajo.

Bibliografía

- ABRAMOWITZ, M. & STEGUN, I. E. 1964 *Handbook of Mathematical Functions*. Dover, New York. Capítulo 2.
- BATCHELOR, G. K. 1967 *An introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press. Sección 7.5.
- BENJAMIN, T. B. 1962 Theory of the vortex breakdown phenomenon. *Journal of Fluid Mechanics* **14**, 593–629.
- BERAN, P. & CULIK, F. 1992 The role of non-uniqueness in the development of vortex breakdown in tubes. *J. Fluid Mech.* **242**, 491–527.
- BRAGG, S. L. & HAWTHORNE, W. R. 1950 Some exact solutions of the flow through annular cascade actuator disc. *J. Aero. Sci.* **17**, 243–249.
- BUNTINE, J. D. & SAFFMAN, P. G. 1995 Inviscid swirling flows and vortex breakdown. *Proc. R. Soc. Lond.* **449**, 139–153.
- BURGGRAF, O. R. & FOSTER, M. R. 1977 Continuation and breakdown in tornado-like vortices. *J. Fluid Mech.* **80**, 685–703.
- CHOW, C.-Y. 1969 Swirling flow in tubes of non-uniform cross-sections. *J. Fluid Mech.* **38**, part 4, 843–854.
- DARMOFAL, D. L. 1996 Comparison of experimental and numerical results for axisymmetric vortex breakdown in pipes. *Comp. Fluids* **25**, 353–371.
- DELBENDE, I., CHOMAZ, J.-M. & HUERRE, P. 1998 Absolute/convective instabilities in the batchelor vortex: a numerical study of the linear impulse response. *J. Fluid Mech.* **355**, 229.

- DELERY, J. M. 1994 Aspects of vortex breakdown. *Prog. Aerospace Sci* **30**, 1–59.
- ESCUDIER, M. & KELLER, J. 1983 Vortex breakdown: a two-stage transition. *Tech. Rep.* CP-342. AGARD.
- ESCUDIER, M. P. 1988 Vortex breakdown: observations and explanations. *Prog. Aero. Sci* **25**, 189–229.
- FERNÁNDEZ FERIA, R. 1996 Viscous and inviscid instabilities of non-parallel self-similar axisymmetric vortex cores. *J. Fluid Mech.* **323**, 339–365.
- FERNÁNDEZ FERIA, R. 1999 Nonparallel linear stability analysis of long's vortex. *Physics of Fluids* **11** (5), 1114–1126.
- FERNÁNDEZ FERIA, R., FERNÁNDEZ DE LA MORA, J. & BARRERO, A. 1995 Solution breakdown in a family of self-similar nearly inviscid axisymmetric vortices. *J. Fluid Mech.* **305**, 77–91.
- FERNÁNDEZ FERIA, R., FERNÁNDEZ DE LA MORA, J., PÉREZ SABORID, M. & BARRERO, A. 1999 Conically similar swirling flows at high reynolds number. part 1. one cell solutions. *Q. J. Mech. Appl. Math.* **52** (1), 1–53.
- FERNÁNDEZ FERIA, R. & ORTEGA CASANOVA, J. 1999 Inviscid vortex breakdown models in pipes. *ZAMP* **50/5**, 698–730.
- GELFGAT, A. Y., BAR-YOSEPH, P. & SOLAN, A. 1996 Stability of confined swirling flow with and without vortex breakdown. *J. Fluid Mech.* **311**, 1–36.
- HALL, M. 1966 On the occurrence and identification of vortex breakdown. *Tech. Rep.* TN-66283. Royal Aircraft Establishment, Farnborough Hants.
- HALL, M. 1967 A new approach to vortex breakdown. In *Proceedings of Heat Transfer Fluid Mechanics Inst*, pp. 319–340. University of California, San Diego, La Jolla.
- HALL, M. 1972 Vortex breakdown. *Annual Review of Fluid Mechanics* **4**, 195–218.
- JONES, J. P. 1960 The breakdown of vortices in separated flow. *Tech. Rep.* Rept. 140. University of Southampton, Aeronautics and Astronautics Department.

- KELLER, J. J., EGLI, W. & EXLEY, J. 1985 Force and loss-free transitions between flow states. *Appl. Math. Phys. (ZAMP)* **36**, 854–889.
- LANDAHL, M. & WIDNALL, S. 1971 Vortex control. In *Aircraft Wake Turbulence and its Detection*. NASA Office of Life and Microgravity Science & Applications.
- LEIBOVICH, S. 1978 The structure of vortex breakdown. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **10**, 221–346.
- LEIBOVICH, S. 1983 Vortex stability and breakdown: Survey and extension. *AIAA Journal*, **22** (9), 1192–1206.
- LEIBOVICH, S. & KRIBUS, A. 1990 Large amplitude wavetrains and solitary waves in vortices. *J. Fluid Mech.* **216**, 459–504.
- LONG, R. R. 1961 A vortex in an infinite viscous fluid. *J. Fluid Mech.* **11**, 611–625.
- LÓPEZ, J. M. 1994 On the bifurcation structure of axisymmetric vortex breakdown in a constricted pipe. *Phys. Fluids* **6** (11), 3683–3693.
- LUDWIEG, H. 1962 Zur erklarand der lustabilitat der :uber angestellten delta:ugeln auftreten freien wirkbelkern. *Zeitschrift fur Flugwissenschaften* **10**, 242.
- LUDWIEG, H. 1964 Experimentelle Nachprufung des stabilitatstheorien fur reibungsfreie Stromungen mit schraubenlinienformigen stromlinien. *Z. Flugwiss* **12**, 304–309.
- LYNCH, R. E., RICE, J. R. & THOMAS, D. H. 1964 Direct solution of partial differential equations by tensor product methods. *Numer. Math.* **6**, 185–199.
- ORTEGA CASANOVA, J. & FERNÁNDEZ FERIA, R. 1999 Inviscid evolution of incompressible swirling flows in pipes: The dependence of the flow structure upon the inlet velocity field. *European J. Mech. B/Fluids* **18** (6), 1067–1084.
- ORTEGA CASANOVA, J. & FERNÁNDEZ FERIA, R. 2000 Numerical simulation of a viscous swirling flow in pipes with varying radius. 4th Euromech Fluid Mechanics Conference, 19–23 November, Eindhoven.
- ROACHE, P. J. 1998 *Fundamentals of computational fluid dynamics*. Hermosa, Albuquerque.

- RUSAK, Z., JUDD, K. P. & WANG, S. 1997 The effect of small pipe divergence on near critical swirling flows. *Phys. Fluids* **9**, 2273–2285.
- RUSAK, Z. & WANG, S. 1996 Review of theoretical approaches to the vortex breakdown phenomenon. In *1st AIAA Theoretical Fluid Mechanics Meeting*. June 17–20, 1996, New Orleans, LA.
- SAFFMAN, P. 1992 *Vortex dynamics*. Cambridge University Press, Secc. 14.4.
- SPALL, R., GATSKI, T. B. & GROSH, C. E. 1987 A criterion for vortex breakdown. *Phys. Fluids* **30**, 3434–3440.
- SQUIRE, H. B. 1960 Analysis of the vortex breakdown phenomenon, part i. *Tech. Rep.* Rept. 102. Aeronautics Department, Imperial College, London.
- STUART, J. T. 1987 A critical review of vortex-breakdown theory. In *Vortex Control and Breakdown Behaviour, 2nd Intl colloquium on Vortical flows*. April 6–7, 1987, Baden, Switzerland.
- TALBOT, L. 1954 Laminar swirling pipe flow. *J. Appl. Mechanics* **21**, 1–7.
- WANG, S. & RUSAK, Z. 1996a On the stability of and axisymmetric rotating flow in a pipe. *Phys. Fluids* **8**, 1007–1016.
- WANG, S. & RUSAK, Z. 1996b On the stability of non-columnar swirling flows. *Phys. Fluids* **8**, 1017–1023.
- WANG, S. & RUSSAK, Z. 1997 The dynamics of swirling flows in a pipe and transition to asisymmetric vortex breakdwon. *J. Fluid Mech.* **340**, 177–223.